PME 3100 • Mecânica I • Módulo 3.3

Produtos de inércia

Matriz de inércia

Teorema da Quantidade de Movimento Angular

Prof. Dr. Renato Maia Matarazzo Orsino

1 Produtos de inércia e matriz de inércia
2 Diádico de inércia
3 TQMA para um corpo rígido
4 Movimento plano de um corpo rígido
5 Equações de Euler
6 *Rotação em torno de eixo fixo

Produto de inércia

O **produto de inércia** do corpo B com respeito ao par de eixos Qs e Qu, respectivamente orientados pelos vetores unitários $\hat{\mathrm{s}}$ e $\hat{\mathrm{u}}$ é definido como:

$$J_{\mathrm{Qsu}} = J_{\mathrm{Qus}} = -\sum_i m_i(\vec{\rho}_i \wedge \hat{\mathrm{s}}) \cdot (\vec{\rho}_i \wedge \hat{\mathrm{u}})$$

Utilizando a representação matricial:

$$J_{\mathrm{Qsu}} = -\sum_i m_i(\tilde{\boldsymbol{\rho}}_i \mathbf{s})^\top(\tilde{\boldsymbol{\rho}}_i \mathbf{u}) = -\mathbf{s}^\top\left(-\sum_i m_i \tilde{\boldsymbol{\rho}}_i^2\right)\mathbf{u} = -\mathbf{s}^\top \boldsymbol{J}_{\mathrm{Q}}\mathbf{u}$$

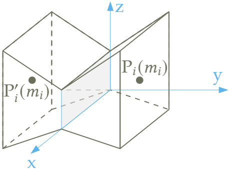
$$\boxed{J_{\mathrm{Qsu}} = -\mathbf{s}^\top \boldsymbol{J}_{\mathrm{Q}}\mathbf{u} = -\mathbf{u}^\top \boldsymbol{J}_{\mathrm{Q}}\mathbf{s} = J_{\mathrm{Qus}}}$$

Por exemplo para os eixos Qx e Qy, respectivamente orientados pelos vetores unitários $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$:

$$\vec{\rho}_i \wedge \hat{\imath} = z_i\hat{\jmath} - y_i\hat{\mathrm{k}} \quad \text{e} \quad \vec{\rho}_i \wedge \hat{\jmath} = -z_i\hat{\imath} + x_i\hat{\mathrm{k}} \quad \Rightarrow \quad J_{\mathrm{Qxy}} = \sum_i m_i x_i y_i$$

Produtos de inércia e simetria

O corpo homogêneo indicado na figura apresenta simetria na distribuição de massa com respeito ao plano xz. Observe que para cada ponto P_i, existe um ponto espelho P'_i, de mesma massa tal que:



$$\mathrm{P}_i = (x_i, y_i, z_i) \quad \text{e} \quad \mathrm{P}'_i = (x_i, -y_i, z_i)$$

Assim:

$$J_{\mathrm{xy}} = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k y_k = \ldots + m_i x_i y_i + m_i x_i (-y_i) + \ldots = 0$$

$$J_{\mathrm{yz}} = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k z_k = \ldots + m_i y_i z_i + m_i (-y_i) z_i + \ldots = 0$$

Os produtos de inércia que envolvem um eixo ortogonal a um plano de simetria inercial são identicamente nulos.

Matriz de inércia: eixos principais e momentos principais de inércia

A matriz de inércia de um corpo rígido B em um sistema de coordenadas $\mathrm{Qxyz} = (\mathrm{Q}, \hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$ é uma matriz:

- **simétrica** ($\boldsymbol{J}_\mathrm{Q}^\top = \boldsymbol{J}_\mathrm{Q}$) e, portanto, **diagonalizável**;
- **definida positiva** ($\mathbf{w}^\top \boldsymbol{J}_\mathrm{Q} \mathbf{w} > 0, \forall \mathbf{w} \neq \mathbf{0}$), e portanto, **invertível**.

Existe uma **base ortonormal positiva** $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ tal que a representação da matriz de inércia no sistema de coordenadas $(\mathrm{Q}, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ é diagonal:

$$\boldsymbol{J}_\mathrm{Q} = \begin{bmatrix} J_{\mathrm{Q}1} & 0 & 0 \\ 0 & J_{\mathrm{Q}2} & 0 \\ 0 & 0 & J_{\mathrm{Q}3} \end{bmatrix}$$

- Os eixos do sistema $(\mathrm{Q}, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ são denominados **eixos principais de inércia** (ou, se $\mathrm{Q} = \mathrm{G}$, *eixos centrais de inércia*).
- Os momentos de inércia $J_{\mathrm{Q}1}$, $J_{\mathrm{Q}2}$ e $J_{\mathrm{Q}3}$ são denominados **momentos principais de inércia** (ou, se $\mathrm{Q} = \mathrm{G}$, *momentos centrais de inércia*).
- Como consequência de a matriz $\boldsymbol{J}_\mathrm{Q}$ ser definida positiva, os momentos principais de inércia são positivos.

Matriz de inércia e simetrias inerciais de um corpo rígido

Simetria inercial esférica

Ocorre quando os três **momentos centrais** de inércia são idênticos. Exs.: corpos homogêneos em forma de esfera ou de poliedros regulares (tetraedro, cubo, . . .); bolas de futebol, vôlei, basquete, . . .

Axissimetria inercial

Ocorre quando dois dos três **momentos centrais** de inércia são idênticos, de valor I, e o terceiro momento central tem valor J, com:

- $J > I$, se o corpo for oblato (achatado) – exs.: discos homogêneos, engrenagens cilíndricas e cônicas balanceadas, rodas de veículos terrestres balanceadas.
- $J < I$, se o corpo for prolato (esbelto) – exs.: cilindros homogêneos esbeltos, eixos balanceados, bolas de rugby e de futebol americano.

O eixo principal associado ao momento de valor J é o eixo de simetria.

Teorema de Steiner (eixos paralelos)

Considerando dois sistemas de eixos, Qxyz e Gxyz, o último com origem no centro de massa G do corpo rígido B e tal que os eixos Gx, Gy e Gz sejam respectivamente paralelos aos eixos Qx, Qy e Qz:

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{Q}} = \boldsymbol{J}_{\mathrm{G}} + m \begin{bmatrix} (y_{\mathrm{G}}^2 + z_{\mathrm{G}}^2) & -x_{\mathrm{G}} y_{\mathrm{G}} & -x_{\mathrm{G}} z_{\mathrm{G}} \\ -x_{\mathrm{G}} y_{\mathrm{G}} & (x_{\mathrm{G}}^2 + z_{\mathrm{G}}^2) & -y_{\mathrm{G}} z_{\mathrm{G}} \\ -x_{\mathrm{G}} z_{\mathrm{G}} & -y_{\mathrm{G}} z_{\mathrm{G}} & (x_{\mathrm{G}}^2 + y_{\mathrm{G}}^2) \end{bmatrix}$$

Assim, os momentos e produtos de inércia correspondentes aos eixos paralelos destes sistemas podem ser relacionados pelas expressões:

$$J_{\mathrm{Qx}} = J_{\mathrm{Gx}} + m(y_{\mathrm{G}}^2 + z_{\mathrm{G}}^2) \qquad J_{\mathrm{Qxy}} = J_{\mathrm{Gxy}} + m x_{\mathrm{G}} y_{\mathrm{G}}$$

$$J_{\mathrm{Qy}} = J_{\mathrm{Gy}} + m(x_{\mathrm{G}}^2 + z_{\mathrm{G}}^2) \qquad J_{\mathrm{Qxz}} = J_{\mathrm{Gxz}} + m x_{\mathrm{G}} z_{\mathrm{G}}$$

$$J_{\mathrm{Qz}} = J_{\mathrm{Gz}} + m(x_{\mathrm{G}}^2 + y_{\mathrm{G}}^2) \qquad J_{\mathrm{Qyz}} = J_{\mathrm{Gyz}} + m y_{\mathrm{G}} z_{\mathrm{G}}$$

Diádico de inércia

- A distribuição espacial de massa de um corpo rígido B com respeito a um dado sistema de coordenadas Qxyz pode ser representada por meio da respectiva **matriz de inércia**.
- Tal abordagem, no entanto, exige o uso de representação matricial em todas as operações envolvidas.
- A representação equivalente denominada **diádico de inércia** permite realizar todas as operações em forma vetorial.

Em particular, o diádico de inércia $\bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{Q}}$ equivalente à matriz de inércia $\boldsymbol{J}_{\mathrm{Q}}$ é definido pela expressão:

$$\bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{Q}} = +J_{\mathrm{Qx}}\hat{\mathrm{i}}\hat{\mathrm{i}} - J_{\mathrm{Qxy}}\hat{\mathrm{i}}\hat{\mathrm{j}} - J_{\mathrm{Qxz}}\hat{\mathrm{i}}\hat{\mathrm{k}} - J_{\mathrm{Qxy}}\hat{\mathrm{j}}\hat{\mathrm{i}} + J_{\mathrm{Qy}}\hat{\mathrm{j}}\hat{\mathrm{j}} - J_{\mathrm{Qyz}}\hat{\mathrm{j}}\hat{\mathrm{k}} - J_{\mathrm{Qxz}}\hat{\mathrm{k}}\hat{\mathrm{i}} - J_{\mathrm{Qyz}}\hat{\mathrm{j}}\hat{\mathrm{k}} + J_{\mathrm{Qz}}\hat{\mathrm{k}}\hat{\mathrm{k}}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{J}_{\mathrm{Q}} = \begin{bmatrix} J_{\mathrm{Qx}} & -J_{\mathrm{Qxy}} & -J_{\mathrm{Qxz}} \\ -J_{\mathrm{Qxy}} & J_{\mathrm{Qy}} & -J_{\mathrm{Qyz}} \\ -J_{\mathrm{Qxz}} & -J_{\mathrm{Qyz}} & J_{\mathrm{Qz}} \end{bmatrix}$$

Diádico de inércia

O produto escalar de um diádico por um vetor é definido a partir das seguintes regras:

$$\vec{x}\vec{y} \cdot \vec{z} = \vec{x}(\vec{y} \cdot \vec{z}) \qquad \text{e} \qquad \vec{z} \cdot \vec{x}\vec{y} = (\vec{z} \cdot \vec{x})\vec{y}$$

Dessa forma, se $\vec{\omega} = \omega_x\hat{\imath} + \omega_y\hat{\jmath} + \omega_z\hat{k}$, então:

$$\bar{\boldsymbol{J}}_Q \cdot \vec{\omega} = \left(+J_{Qx}\omega_x - J_{Qxy}\omega_y - J_{Qxz}\omega_z\right)\hat{\imath} + \left(-J_{Qxy}\omega_x + J_{Qy}\omega_y - J_{Qyz}\omega_z\right)\hat{\jmath} + \left(-J_{Qxz}\omega_x - J_{Qyz}\omega_y + J_{Qz}\omega_z\right)\hat{k}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{J}_Q\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} J_{Qx} & -J_{Qxy} & -J_{Qxz} \\ -J_{Qxy} & J_{Qy} & -J_{Qyz} \\ -J_{Qxz} & -J_{Qyz} & J_{Qz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +J_{Qx}\omega_x - J_{Qxy}\omega_y - J_{Qxz}\omega_z \\ -J_{Qxy}\omega_x + J_{Qy}\omega_y - J_{Qyz}\omega_z \\ -J_{Qxz}\omega_x - J_{Qyz}\omega_y + J_{Qz}\omega_z \end{bmatrix}$$

Quantidade de movimento angular e energia cinética

A expressão anteriormente obtida para a **quantidade de movimento angular** de um corpo rígido B com respeito a um **pólo** Q a ele **solidário** pode ser escrita alternativamente nas formas matricial ou vetorial:

$$\mathbf{H}_{\mathrm{Q}} = m\widetilde{\boldsymbol{\rho}}_{\mathrm{G}}\mathbf{v}_{\mathrm{Q}} + \boldsymbol{J}_{\mathrm{Q}}\boldsymbol{\omega}$$

$$\vec{\mathrm{H}}_{\mathrm{Q}} = m(\mathrm{G} - \mathrm{Q}) \wedge \vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{Q}} + \bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{Q}} \cdot \vec{\omega}$$

Analogamente, a expressão da **energia cinética** deste corpo rígido também pode ser escrita utilizando as representações matricial e vetorial para as operações algébricas envolvidas:

$$T = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_{\mathrm{Q}}^{\top}\mathbf{v}_{\mathrm{Q}} + m\mathbf{v}_{\mathrm{Q}}^{\top}\widetilde{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\rho}_{\mathrm{G}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^{\top}\boldsymbol{J}_{\mathrm{Q}}\boldsymbol{\omega}$$

$$T = \frac{1}{2}m\vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{Q}} \cdot \vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{Q}} + m\vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{Q}} \cdot \left[\vec{\omega} \wedge (\mathrm{G} - \mathrm{Q})\right] + \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{Q}} \cdot \vec{\omega}$$

Teorema da Quantidade de Movimento Angular para um corpo rígido

A derivada temporal de $\vec{\mathrm{H}}_{\mathrm{Q}}$ é dada por:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{H}}_{\mathrm{Q}}}{\mathrm{d}t} = m(\vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{G}} - \vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{Q}}) \wedge \vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{Q}} + m(\mathrm{G} - \mathrm{Q}) \wedge \vec{\mathrm{a}}_{\mathrm{Q}} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{Q}} \cdot \vec{\omega}\right)$$

A expressão do Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA) com respeito ao pólo Q é:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{H}}_{\mathrm{Q}}}{\mathrm{d}t} + \vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{Q}} \wedge m\vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{G}} = \vec{\mathrm{M}}_{\mathrm{Q}}$$

Notando que $m(\vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{G}} - \vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{Q}}) \wedge \vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{Q}} = m\vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{G}} \wedge \vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{Q}} = -\vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{Q}} \wedge m\vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{G}}$, conclui-se que a expressão do TQMA para o corpo rígido B com respeito ao pólo Q a ele solidário é:

$$\boxed{m(\mathrm{G} - \mathrm{Q}) \wedge \vec{\mathrm{a}}_{\mathrm{Q}} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{Q}} \cdot \vec{\omega}\right) = \vec{\mathrm{M}}_{\mathrm{Q}}}$$

com $\vec{\mathrm{M}}_{\mathrm{Q}}$ denotando a resultante de momentos externos ao corpo.

Teorema da Quantidade de Movimento Angular para um corpo rígido

A expressão anterior pode ser simplificada considerando uma base ortonormal positiva $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$ solidária ao corpo B. Neste caso:

- a distribuição espacial de massa do corpo B com respeito ao sistema de coordenadas $\mathrm{Qxyz} = (\mathrm{Q}, \hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$ permanece invariante no tempo; os momentos e produtos de inércia associados são, portanto, constantes;
- a partir do vetor velocidade angular de B determinam-se as expressões das derivadas temporais versores da base:

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\imath}}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega} \wedge \hat{\imath} \qquad \frac{\mathrm{d}\hat{\jmath}}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega} \wedge \hat{\jmath} \qquad \frac{\mathrm{d}\hat{k}}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega} \wedge \hat{k}$$

Assim:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{Q}} \cdot \vec{\omega}) = {} & (+J_{\mathrm{Qx}}\dot{\omega}_{\mathrm{x}} - J_{\mathrm{Qxy}}\dot{\omega}_{\mathrm{y}} - J_{\mathrm{Qxz}}\dot{\omega}_{\mathrm{z}})\hat{\imath} + (-J_{\mathrm{Qxy}}\dot{\omega}_{\mathrm{x}} + J_{\mathrm{Qy}}\dot{\omega}_{\mathrm{y}} - J_{\mathrm{Qyz}}\dot{\omega}_{\mathrm{z}})\hat{\jmath} \\ & + (-J_{\mathrm{Qxz}}\dot{\omega}_{\mathrm{x}} - J_{\mathrm{Qyz}}\dot{\omega}_{\mathrm{y}} + J_{\mathrm{Qz}}\dot{\omega}_{\mathrm{z}})\hat{k} + (+J_{\mathrm{Qx}}\omega_{\mathrm{x}} - J_{\mathrm{Qxy}}\omega_{\mathrm{y}} - J_{\mathrm{Qxz}}\omega_{\mathrm{z}})\vec{\omega} \wedge \hat{\imath} \\ & + (-J_{\mathrm{Qxy}}\omega_{\mathrm{x}} + J_{\mathrm{Qy}}\omega_{\mathrm{y}} - J_{\mathrm{Qyz}}\omega_{\mathrm{z}})\vec{\omega} \wedge \hat{\jmath} + (-J_{\mathrm{Qxz}}\omega_{\mathrm{x}} - J_{\mathrm{Qyz}}\omega_{\mathrm{y}} + J_{\mathrm{Qz}}\omega_{\mathrm{z}})\vec{\omega} \wedge \hat{k}\end{aligned}$$

Teorema da Quantidade de Movimento Angular para um corpo rígido

Notando que, uma vez que $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$ solidária ao corpo B o vetor aceleração angular deste corpo é dado por $\vec{\alpha} = \dot{\omega}_x \hat{\imath} + \dot{\omega}_y \hat{\jmath} + \dot{\omega}_z \hat{k}$, então:

$$\frac{d}{dt}\left(\bar{\boldsymbol{J}}_Q \cdot \vec{\omega}\right) = \bar{\boldsymbol{J}}_Q \cdot \vec{\alpha} + \vec{\omega} \wedge \left(\bar{\boldsymbol{J}}_Q \cdot \vec{\omega}\right)$$

A expressão do TQMA para o corpo rígido B com respeito ao pólo Q a ele solidário pode, portanto, ser reescrita como:

$$\boxed{m(G - Q) \wedge \vec{a}_Q + \bar{\boldsymbol{J}}_Q \cdot \vec{\alpha} + \vec{\omega} \wedge \left(\bar{\boldsymbol{J}}_Q \cdot \vec{\omega}\right) = \vec{M}_Q}$$

A expressão se torna ainda mais simples se o corpo B tiver um Q a ele solidário com $\vec{a}_Q$ sendo um vetor nulo ou paralelo a $(G - Q)$ e este for tomado como pólo:

$$\bar{\boldsymbol{J}}_Q \cdot \vec{\alpha} + \vec{\omega} \wedge \left(\bar{\boldsymbol{J}}_Q \cdot \vec{\omega}\right) = \vec{M}_Q$$

Por outro lado, escolhendo o pólo Q coincidente com o centro de massa G:

$$\boxed{\bar{\boldsymbol{J}}_G \cdot \vec{\alpha} + \vec{\omega} \wedge \left(\bar{\boldsymbol{J}}_G \cdot \vec{\omega}\right) = \vec{M}_G}$$

*Relação entre TEC e TR/TQMA para um corpo rígido

Se o sistema mecânico em questão é composto por um único corpo rígido, a **potência e o trabalho das forças internas** são identicamente **nulos**. Tomando a derivada temporal da energia cinética do corpo, temos:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = m\vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{G}} \cdot \vec{\mathrm{a}}_{\mathrm{G}} + \vec{\omega} \cdot \bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{G}} \cdot \vec{\alpha}$$

Tomando o produto escalar da equação do TR por $\vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{G}}$ e somando-a ao produto escalar da equação do TQMA (com pólo G) por $\vec{\omega}$, obtém-se:

$$\vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{G}} \cdot \left(m\vec{\mathrm{a}}_{\mathrm{G}}\right) + \vec{\omega} \cdot \left[\bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{G}} \cdot \vec{\alpha} + \vec{\omega} \wedge \left(\bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{G}} \cdot \vec{\omega}\right)\right] = \vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{G}} \cdot \vec{\mathrm{R}} + \vec{\omega} \cdot \vec{\mathrm{M}}_{\mathrm{G}}$$

$$m\vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{G}} \cdot \vec{\mathrm{a}}_{\mathrm{G}} + \vec{\omega} \cdot \bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{G}} \cdot \vec{\alpha} = \vec{\mathrm{R}} \cdot \vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{G}} + \vec{\mathrm{M}}_{\mathrm{G}} \cdot \vec{\omega}$$

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = P$$

A equação obtida pela aplicação do TEC para um corpo rígido é, portanto, uma combinação linear das equações fornecidas pelo TR e pelo TQMA.

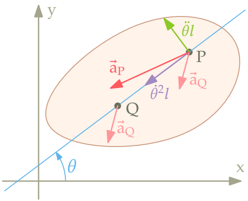
Movimento plano de um corpo rígido

- Um corpo rígido B está em movimento plano quando puder ser modelado como uma figura plana em movimento no próprio plano.
- O plano Oxy escolhido para a representação deste movimento deve ser um plano de simetria inercial do corpo, ou seja, G pertence ao plano e $J_{\mathrm{Qxz}} = J_{\mathrm{Qyz}} = 0$ para qualquer ponto Q deste plano.

Em um movimento plano, $\vec{\omega} = \omega\hat{\mathrm{k}}$, $\vec{\alpha} = \alpha\hat{\mathrm{k}}$ e as equações de campos de velocidades e acelerações são, respectivamente:

$$\vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{P}} = \vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{Q}} + \omega\hat{\mathrm{k}} \wedge (\mathrm{P} - \mathrm{Q})$$

$$\vec{\mathrm{a}}_{\mathrm{P}} = \vec{\mathrm{a}}_{\mathrm{Q}} + \alpha\hat{\mathrm{k}} \wedge (\mathrm{P} - \mathrm{Q}) - \omega^2(\mathrm{P} - \mathrm{Q})$$



Nota-se ainda que, para qualquer ponto Q do plano de simetria Oxy:

$$\bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{Q}} \cdot \vec{\omega} = \bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{Q}} \cdot (\omega\hat{\mathrm{k}}) = J_{\mathrm{Qz}}\omega\hat{\mathrm{k}}$$

$$\bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{Q}} \cdot \vec{\alpha} = \bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{Q}} \cdot (\alpha\hat{\mathrm{k}}) = J_{\mathrm{Qz}}\alpha\hat{\mathrm{k}}$$

Dinâmica de um corpo rígido em movimento plano

Observando finalmente que, para para um sistema de forças atuantes sobre um corpo rígido em movimento plano:

$$\vec{\mathrm{R}} = R_{\mathrm{x}}\hat{\imath} + R_{\mathrm{y}}\hat{\jmath} \quad \text{e} \quad \vec{\mathrm{M}}_{\mathrm{Q}} = M_{\mathrm{Qz}}\hat{\mathrm{k}}$$

Assim, do Teorema da Resultante (TR), $m\vec{\mathrm{a}}_{\mathrm{G}} = \vec{\mathrm{R}}$, obtêm-se 2 equações, associadas às componentes $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$, e do Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA), obtém-se 1 única equação, associada à componente $\hat{\mathrm{k}}$:

$$\begin{aligned} m a_{\mathrm{Gx}} &= R_{\mathrm{x}} \\ m a_{\mathrm{Gy}} &= R_{\mathrm{y}} \\ m(\mathrm{G}-\mathrm{Q}) \wedge \vec{\mathrm{a}}_{\mathrm{Q}} \cdot \hat{\mathrm{k}} + J_{\mathrm{Qz}}\alpha &= M_{\mathrm{Qz}} \end{aligned}$$

A primeira parcela da última equação se cancela se o pólo Q coincidir com G ou se $\vec{\mathrm{a}}_{\mathrm{Q}}$ for um vetor nulo ou paralelo a $(\mathrm{G}-\mathrm{Q})$.

Adoção de eixos principais de inércia

Dado um corpo rígido B que descreve um movimento genérico, adote:

- um pólo Q que coincida com o centro de massa G de B ou tal que sua aceleração $\vec{a}_{\mathrm{Q}}$ seja um vetor nulo ou paralelo a $(\mathrm{G}-\mathrm{Q})$, tal que:

$$\bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{Q}} \cdot \vec{\alpha} + \vec{\omega} \wedge \bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{Q}} \cdot \vec{\omega} = \vec{\mathrm{M}}_{\mathrm{Q}}$$

- uma base ortonormal positiva $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$, **solidária** a B e com **versores alinhados aos eixos principais de inércia** de B, tal que:

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{Q}} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix}$$

Adotando a notação $\vec{\omega} = \omega_1\hat{e}_1 + \omega_2\hat{e}_2 + \omega_3\hat{e}_3$, pode-se afirmar que:

$$\bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{Q}} \cdot \vec{\omega} = J_1\omega_1\hat{e}_1 + J_2\omega_2\hat{e}_2 + J_3\omega_3\hat{e}_3$$

$$\bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{Q}} \cdot \vec{\alpha} = J_1\dot{\omega}_1\hat{e}_1 + J_2\dot{\omega}_2\hat{e}_2 + J_3\dot{\omega}_3\hat{e}_3$$

$$\vec{\omega} \wedge \bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{Q}} \cdot \vec{\omega} = -(J_2 - J_3)\omega_2\omega_3\hat{e}_1 - (J_3 - J_1)\omega_3\omega_1\hat{e}_2 - (J_1 - J_2)\omega_1\omega_2\hat{e}_3$$

Equações de Euler

As equações fornecidas pelo TQMA para um corpo rígido que descreve um movimento genérico, quando expressas em componentes das direções dos eixos principais de inércia do mesmo, são denominadas **equações de Euler**:

$$\begin{cases} J_1\dot{\omega}_1 - (J_2 - J_3)\omega_2\omega_3 = M_1 \\ J_2\dot{\omega}_2 - (J_3 - J_1)\omega_3\omega_1 = M_2 \\ J_3\dot{\omega}_3 - (J_1 - J_2)\omega_1\omega_2 = M_3 \end{cases}$$

com $\vec{\mathrm{M}}_Q = M_1\hat{\mathrm{e}}_1 + M_2\hat{\mathrm{e}}_2 + M_3\hat{\mathrm{e}}_3$.

Nota: as três equações de Euler são idênticas em forma, bastando realizar uma permutação cíclica dos índices $1, 2, 3$ (ou seja, $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 3$ e $3 \rightarrow 1$, com "$\rightarrow$" sendo entendido como "substituído por") para obter a segunda e terceira equações a partir da primeira.

Teorema do eixo intermediário

Teorema do eixo intermediário (Poinsot, 1834)

Considere um corpo rígido B que possui os três momentos principais de inércia distintos, tal que $J_1 > J_2 > J_3 > 0$. A rotação livre de B em torno de:

- seu primeiro ou terceiro eixos principais de inércia é **estável**;
- seu segundo eixo principal de inércia é **instável**.

***Demonstração:** admitamos uma rotação livre ($M_1 = M_2 = M_3 = 0$) em torno do segundo eixo principal de inércia, com pequenas perturbações, ou seja, $\omega_2 = \Omega$ tem valor finito e ω_1 e ω_3 são infinitesimais. O produto $\omega_1\omega_3$ é, portanto, desprezível. Assim, da segunda equação de Euler: $J_2\dot{\omega}_2 \approx 0$, ou seja, Ω é praticamente constante. Da primeira equação e terceira equações de Euler:

$$\begin{cases} J_1\dot{\omega}_1 = (J_2 - J_3)\Omega\omega_3 \\ J_3\dot{\omega}_3 = (J_1 - J_2)\Omega\omega_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\omega}_1 = K_2\omega_1 \\ \ddot{\omega}_3 = K_2\omega_3 \end{cases} \quad \text{com} \quad K_2 = \frac{(J_1 - J_2)(J_2 - J_3)\Omega^2}{J_1 J_3}$$

Para que uma equação diferencial da forma $\ddot{x} = Kx$ tenha soluções limitadas é necessário que $K < 0$. No entanto, como $K_2 > 0$ ($J_1 - J_2 > 0$, $J_2 - J_3 > 0$), os valores de ω_1 e ω_3, mesmo que inicialmente infinitesimais, com o tempo, deixariam de sê-lo.

1 Produtos de inércia e matriz de inércia
2 Diádico de inércia
3 TQMA para um corpo rígido
4 Movimento plano de um corpo rígido
5 Equações de Euler
6 *Rotação em torno de eixo fixo

Rotação em torno de eixo fixo

Sempre que, pela presença de vínculos, um corpo rígido tiver dois pontos A e B fixos, estando livre para descrever uma rotação em torno da linha AB, diz-se que seu movimento é uma **rotação em torno de eixo fixo**. Definindo o eixo Bz passando por A e B, tem-se:

$$\vec{\omega} = \omega\hat{\mathrm{k}} \quad \Rightarrow \quad \bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{B}} \cdot \vec{\omega} = -J_{\mathrm{xz}}\omega\hat{\imath} - J_{\mathrm{yz}}\omega\hat{\jmath} + J_{\mathrm{z}}\omega\hat{\mathrm{k}}$$

$$\vec{\alpha} = \alpha\hat{\mathrm{k}} \quad \Rightarrow \quad \bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{B}} \cdot \vec{\alpha} = -J_{\mathrm{xz}}\alpha\hat{\imath} - J_{\mathrm{yz}}\alpha\hat{\jmath} + J_{\mathrm{z}}\alpha\hat{\mathrm{k}}$$

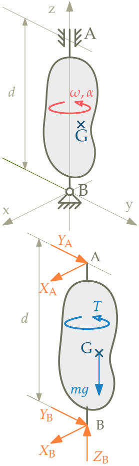
$$\vec{\omega} \wedge (\bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{B}} \cdot \vec{\omega}) = \omega\hat{\mathrm{k}} \wedge \left(-J_{\mathrm{xz}}\omega\hat{\imath} - J_{\mathrm{yz}}\omega\hat{\jmath} + J_{\mathrm{z}}\omega\hat{\mathrm{k}}\right) = J_{\mathrm{yz}}\omega^2\hat{\imath} - J_{\mathrm{xz}}\omega^2\hat{\jmath}$$

Como B é um ponto fixo ($\vec{a}_{\mathrm{B}} = \vec{0}$), do TQMA com pólo B, resulta:

$$\bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{B}} \cdot \vec{\alpha} + \vec{\omega} \wedge \bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{B}} \cdot \vec{\omega} = \vec{\mathrm{M}}_{\mathrm{B}}$$

$$\begin{cases} -J_{\mathrm{xz}}\alpha + J_{\mathrm{yz}}\omega^2 = M_{\mathrm{Bx}} \\ -J_{\mathrm{yz}}\alpha - J_{\mathrm{xz}}\omega^2 = M_{\mathrm{By}} \\ J_{\mathrm{z}}\alpha = M_{\mathrm{Bz}} \end{cases}$$

Rotação em torno de eixo fixo



Considerando $G = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_B + \vec{\alpha} \wedge (G - B) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (G - B)]$$
$$= (-\omega^2\bar{x} - \alpha\bar{y})\hat{\imath} + (\alpha\bar{x} - \omega^2\bar{y})\hat{\jmath}$$

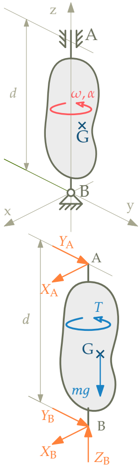
Sistema de esforços externos (ver DCL):

$$\vec{R} = (X_A + X_B)\hat{\imath} + (Y_A + Y_B)\hat{\jmath} + (Z_B - mg)\hat{k}$$
$$\vec{M}_B = (G - B) \wedge (-mg\hat{k}) + (A - B) \wedge (X_A\hat{\imath} + Y_A\hat{\jmath}) + T\hat{k}$$
$$= (-dY_A - mg\bar{y})\hat{\imath} + (dX_A + mg\bar{x})\hat{\jmath} + T\hat{k}$$

Expressões do TR e do TQMA:

$$m\vec{a}_G = \vec{R}$$
$$\bar{\boldsymbol{J}}_B \cdot \vec{\alpha} + \vec{\omega} \wedge \bar{\boldsymbol{J}}_B \cdot \vec{\omega} = \vec{M}_B$$

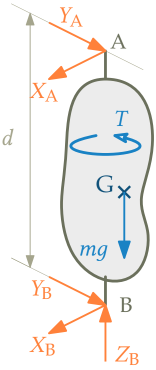
Rotação em torno de eixo fixo



Substituindo as expressões obtidas nas equações dos teoremas, obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned}
m(-\omega^2\bar{x} - \alpha\bar{y}) &= X_A + X_B \\
m(\alpha\bar{x} - \omega^2\bar{y}) &= Y_A + Y_B \\
0 &= Z_B - mg \\
-J_{xz}\alpha + J_{yz}\omega^2 &= -mg\bar{y} - dY_A \\
-J_{yz}\alpha - J_{xz}\omega^2 &= mg\bar{x} + dX_A \\
J_z\alpha &= T
\end{aligned}$$

Rotação em torno de eixo fixo



Resolvendo as equações obtidas para os esforços reativos e para o torque ativo T:

$$X_A = -\frac{gm\bar{x} + \omega^2 J_{xz} + \alpha J_{yz}}{d}$$

$$X_B = \frac{m\bar{x}\left(g - d\omega^2\right) - \alpha dm\bar{y} + \omega^2 J_{xz} + \alpha J_{yz}}{d}$$

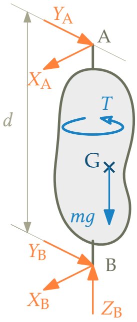
$$Y_A = -\frac{gm\bar{y} - \alpha J_{xz} + \omega^2 J_{yz}}{d}$$

$$Y_B = \frac{m\bar{y}\left(g - d\omega^2\right) + \alpha dm\bar{x} - \alpha J_{xz} + \omega^2 J_{yz}}{d}$$

$$Z_B = mg$$

$$T = \alpha J_z$$

Balanceamento estático



Se o centro de massa está sobre o eixo de rotação $\mathrm{B}z$, então $\mathrm{G} = (0, 0, \bar{z})$, ou seja $\bar{x} = \bar{y} = 0$:

$$X_\mathrm{A} = -\frac{\omega^2 J_\mathrm{xz} + \alpha J_\mathrm{yz}}{d}$$

$$X_\mathrm{B} = \frac{\omega^2 J_\mathrm{xz} + \alpha J_\mathrm{yz}}{d}$$

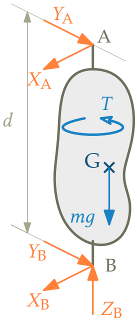
$$Y_\mathrm{A} = \frac{\alpha J_\mathrm{xz} - \omega^2 J_\mathrm{yz}}{d}$$

$$Y_\mathrm{B} = \frac{-\alpha J_\mathrm{xz} + \omega^2 J_\mathrm{yz}}{d}$$

$$Z_\mathrm{B} = mg$$

$$T = \alpha J_\mathrm{z}$$

Balanceamento dinâmico



Se, adicionalmente, $J_{xz} = 0$ e $J_{yz} = 0$:

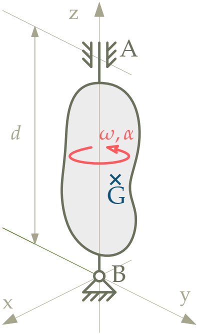
$$X_A = X_B = Y_A = Y_B = 0$$
$$Z_B = mg$$
$$T = \alpha J_z$$

Balanceamento dinâmico

Balancear um corpo rígido é tornar seu eixo de rotação um um **eixo central de inércia***.

***Eixo central de inércia:** eixo principal de inércia (ortogonal a um plano de simetria inercial) que passa pelo centro de massa G do corpo.

Balanceamento utilizando 2 pontos materiais



Dado um corpo rígido em que pelo menos uma quantidade dentre $\bar{x}$, $\bar{y}$, J_{xz} ou J_{yz} for não nula, pode-se modificar as propriedades inerciais do corpo pela inclusão de 2 pontos materiais nos pontos:

- Um ponto de massa m_1 em $\mathrm{P}_1 = (r_1 \cos\theta_1, r_1 \sin\theta_1, z_1)$
- Um ponto de massa m_2 em $\mathrm{P}_2 = (r_2 \cos\theta_2, r_2 \sin\theta_2, z_2)$

Após a inclusão das massas passamos a ter:

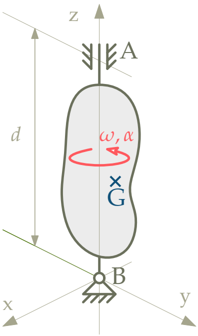
$$\bar{x}' = \frac{m\bar{x} + m_1 r_1 \cos\theta_1 + m_2 r_2 \cos\theta_2}{m + m_1 + m_2}$$

$$\bar{y}' = \frac{m\bar{y} + m_1 r_1 \sin\theta_1 + m_2 r_2 \sin\theta_2}{m + m_1 + m_2}$$

$$J'_{\mathrm{xz}} = J_{\mathrm{xz}} + m_1 z_1 r_1 \cos\theta_1 + m_2 z_2 r_2 \cos\theta_2$$

$$J'_{\mathrm{yz}} = J_{\mathrm{yz}} + m_1 z_1 r_1 \sin\theta_1 + m_2 z_2 r_2 \sin\theta_2$$

Balanceamento utilizando 2 pontos materiais



Para que tenhamos $\bar{x}' = 0$, $\bar{y}' = 0$, $J'_{xz} = 0$ e $J'_{yz} = 0$ é necessário que:

$$m_1 r_1 \cos\theta_1 = \frac{m z_2 \bar{x} - J_{xz}}{z_1 - z_2}$$

$$m_1 r_1 \sin\theta_1 = \frac{m z_2 \bar{y} - J_{yz}}{z_1 - z_2}$$

$$m_2 r_2 \cos\theta_2 = \frac{J_{xz} - m z_1 \bar{x}}{z_1 - z_2}$$

$$m_2 r_2 \sin\theta_2 = \frac{J_{yz} - m z_1 \bar{y}}{z_1 - z_2}$$

Uma vez que $z_1 \neq z_2$, conclui-se que, para balancear um corpo rígido, é necessário posicionar os pontos materiais em **duas seções transversais distintas**.

Perguntas?

reorsino@usp.br