PME 3100 • Mecânica I • Módulo 3.1

Leis de Newton
Dinâmica de pontos e sistemas materiais
Introdução aos teoremas da dinâmica
Teorema da Resultante

Prof. Dr. Renato Maia Matarazzo Orsino

Leis de Newton

Enunciados originalmente introduzidos por Isaac Newton em seu tratado *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* ("Princípios Matemáticos da Filosofia Natural" ou, simplesmente, *Principia*) em latim:

Leis de Newton (enunciados originais)

Lex I: *Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.*

Lex II: *Mutationem motis proportionalem esse vi motrici impressae, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.*

Lex III: *Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem: sine corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi.*

Primeira Lei de Newton e o conceito de referencial inercial

Primeira Lei

Todo **corpo** continua em seu estado de **repouso** ou de **movimento uniforme em uma linha reta**, a menos que seja compelido a mudar aquele estado por **forças** aplicadas sobre ele.

- Em uma interpretação ingênua, a Primeira Lei poderia soar como um caso particular da Segunda Lei, em que ausência de "forças motoras impressas" corresponderia a uma não "mudança de movimento".
- Observe, no entanto, que já sabemos que a geometria da trajetória descrita por um ponto depende do referencial escolhido.
- A Primeira Lei distingue uma classe especial de referenciais, formada pelos denominados **referenciais inerciais**, para os quais um corpo, na ausência de forças aplicadas sobre ele, permanece em repouso ou descreve um movimento retilíneo e uniforme.
- **Princípio da Relatividade de Galileu**: as leis de movimento de Newton são as mesmas em **todos os referenciais inerciais**.

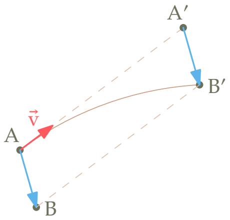
Segunda Lei de Newton e quantidade de movimento

Segunda Lei

A **mudança de movimento** é **proporcional à força motora** impressa, e é produzida na direção de linha reta na qual aquela força é aplicada.

Para uma partícula que descreve uma trajetória $\vec{r}(t)$ de classe C^2, pelo Teorema de Taylor, com $h = \Delta t$:

$$\underbrace{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}_{(B'-A)} = \underbrace{\vec{v}(t)h}_{(A'-A)} + \underbrace{\frac{1}{2}\vec{a}(t)h^2 + \vec{\varepsilon}(h)h^2}_{(B'-A')}$$



com $\lim_{h\to 0} \vec{\varepsilon}(h) = \vec{0}$. Neste caso, a razão entre a mudança de movimento $(B' - A') = (B - A)$ e h^2 é proporcional à aceleração $\vec{a}(t)$ da partícula no instante de tempo considerado.

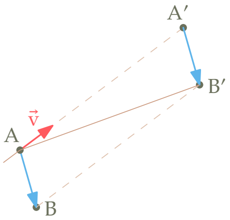
Segunda Lei de Newton e quantidade de movimento

Segunda Lei

A **mudança de movimento** é **proporcional à força motora** impressa, e é produzida na direção de linha reta na qual aquela força é aplicada.

Para uma partícula que descreve uma trajetória $\vec{r}(t)$ diferenciável por trechos, pelo Teorema de Taylor, com $h = \Delta t$:

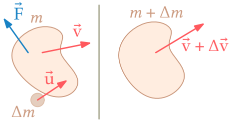
$$\underbrace{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}_{(B'-A)} = \underbrace{\vec{v}(t)h}_{(A'-A)} + \underbrace{\beta \Delta \vec{v} h + \vec{\varepsilon}(h) h^2}_{(B'-A')}$$



com $\lim_{h \to 0} \vec{\varepsilon}(h) = \vec{0}$, para algum $\beta \in [0, 1]$. Neste caso, a razão entre a mudança de movimento $(B' - A')$ e h é proporcional à variação da velocidade $\Delta \vec{v}$ da partícula.

Segunda Lei de Newton e quantidade de movimento

Considere o sistema formado por uma partícula de massa m finita, à qual adere uma porção material de massa infinitesimal Δm em um intervalo de tempo também infinitesimal de duração Δt:



- No instante de tempo t_0 a partícula tem velocidade $\vec{v}$ e a porção material que adere à mesma tem velocidade $\vec{u}$.
- No instante de tempo $t_0 + \Delta t$, tem-se uma única partícula material de massa $m + \Delta m$ com velocidade $\vec{v} + \Delta\vec{v}$.
- A força resultante sobre a partícula tem comportamento contínuo e valor $\vec{F}$ no instante inicial.
- Grandezas Δ são de ordem de grandeza infinitesimal.

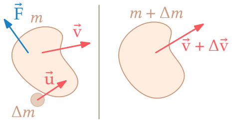
Igualando a variação de quantidade de movimento deste sistema ao impulso da resultante:

$$[(m + \Delta m)(\vec{v} + \Delta\vec{v}) - (m\,\vec{v} + \Delta m\,\vec{u})] = \vec{F}\,\Delta t + \vec{O}[\Delta^2]$$

$$m\,\Delta\vec{v} + \Delta m(\vec{v} - \vec{u}) + \vec{O}[\Delta^2] = \vec{F}\,\Delta t + \vec{O}[\Delta^2]$$

Segunda Lei de Newton e quantidade de movimento

Dividindo a expressão da última equação por Δt e tomando o limite $\Delta t \to 0$, obtém-se a denominada **Equação de Meshchersky** que corresponde à forma mais geral possível para a Segunda Lei de Newton, por incluir a possibilidade de variação de massa da partícula:



$$m\vec{a} + \frac{dm}{dt}(\vec{v} - \vec{u}) = \vec{F} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F} + \dot{m}\vec{u}$$

Atenção: **somente** no caso de **partículas de massa constante**, ou seja, com $\dfrac{dm}{dt} = 0$, a Segunda Lei de Newton se reduz à conhecida equação:

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

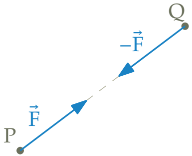
Esta equação nunca foi escrita por Newton! Segundo registros históricos, o primeiro cientista a interpretar a Segunda Lei como sendo equivalente a esta equação foi Euler.

Terceira Lei de Newton: o Princípio da Ação e Reação

Terceira Lei – Princípio da Ação e Reação

A toda **ação** há sempre uma **reação oposta e de igual intensidade**: as **ações mútuas de dois corpos um sobre o outro** são sempre iguais e dirigidas em sentidos opostos.

À luz da terminologia atual, a interação mútua entre dois corpos um sobre outro deve ser representada por forças opostas, de mesma intensidade e definidas sobre **a mesma linha de ação**.



Cabe notar que, duas forças opostas sobre linhas de ação paralelas (não-coincidentes) constituem um binário. Caso a interação mútua entre duas partículas isoladas correspondesse a um binário, seria possível transformar este sistema em um **moto-contínuo**, o que violaria outras leis da Física.

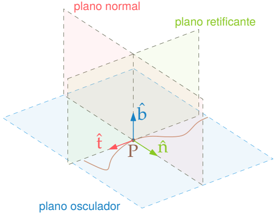
Leis de Newton e a dinâmica da partícula

Procedimento de modelagem

1. Desenhe o **diagrama de corpo livre (DCL)** com todas as forças atuantes sobre a partícula P (ativas e reativas).
2. Parametrize a descrição do movimento de P.
3. Escolha três direções distintas para a decomposição dos vetores de força e do vetor aceleração da partícula e monte as equações.

Para uma partícula P de massa m constante descrevendo uma trajetória curvilínea, pode-se usar as direções $(\hat{\mathrm{t}}, \hat{\mathrm{n}}, \hat{\mathrm{b}})$:

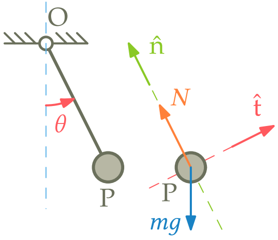
$$\vec{\mathrm{R}} = m\vec{\mathrm{a}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} R_{\mathrm{t}} = m\dot{v} \\ R_{\mathrm{n}} = m\dfrac{v^2}{\rho} \\ R_{\mathrm{b}} = 0 \end{cases}$$



Pêndulo simples

Um **pêndulo simples** é modelado como uma partícula P de massa m constante restrita a descrever uma trajetória circular de centro O e raio r, contida de um plano vertical:

- As direções tangente ($\hat{t}$) e normal ($\hat{n}$) locais podem ser identificadas.
- A força reativa devida ao vínculo imposto pela barra tem direção normal.
- A coordenada θ mede o ângulo que a direção OP forma com a vertical.

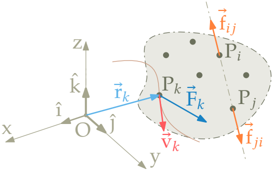


$$\vec{a} = r\ddot{\theta}\,\hat{t} + r\dot{\theta}^2\,\hat{n} \qquad \text{e} \qquad \vec{R} = N\hat{n} - mg(\sin\theta\hat{t} + \cos\theta\hat{n})$$

$$\begin{cases} mr\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \\ mr\dot{\theta}^2 = N - mg\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\theta} = -\dfrac{g}{r}\sin\theta \\ N = m(r\dot{\theta}^2 + g\cos\theta) \end{cases}$$

Sistema de pontos materiais $\mathcal{M} = \{P_k | k = 1, \ldots, n\}$

Notação

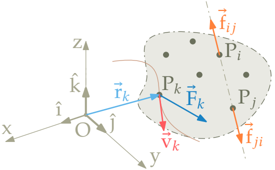


- $(O, \hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$: sistema de coordenadas fixo a um **referencial inercial**.
- m_k: massa da partícula P_k.
- $\vec{r}_k = (P_k - O)$: vetor posição da partícula material P_k.
- $\vec{v}_k = \dot{\vec{r}}_k$: vetor velocidade da partícula P_k.
- $\vec{a}_k = \dot{\vec{v}}_k$: vetor aceleração da partícula P_k.
- $\vec{F}_k$: resultante de forças externas ao sistema agindo sobre a partícula P_k.
- $\vec{f}_{ij}$: força interna aplicada pela sobre a partícula P_i pela partícula P_j.

$$\boxed{\vec{f}_{ij} = \lambda_{ij}(P_i - P_j) = -\lambda_{ji}(P_i - P_j) = -\vec{f}_{ji}}$$

Centro de massa

Sendo $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ a massa total de $\mathcal{M}$, define-se a posição de seu **centro de massa** G como:



$$\vec{r}_G = (G - O) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i$$

Desta definição decorrem as seguintes identidades:

$$\sum_i m_i \vec{r}_i = m\vec{r}_G \quad \Rightarrow \quad \sum_i m_i \vec{v}_i = m\vec{v}_G \quad \Rightarrow \quad \sum_i m_i \vec{a}_i = m\vec{a}_G$$

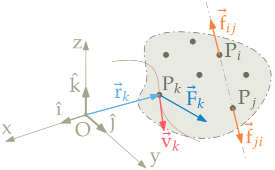
Adicionalmente, notando que $(P_i - G) = \vec{r}_i - \vec{r}_G$, decorre que:

$$\sum_i m_i (P_i - G) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \sum_i m_i \vec{v}_{P_i|G} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \sum_i m_i \vec{a}_{P_i|G} = \vec{0}$$

Teorema da Resultante (TR)

Segunda Lei de Newton para a partícula P_i:

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij}$$



Somando para todas as partículas do sistema:

$$\sum_i m_i \vec{a}_i = m \vec{a}_G$$

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{R}$$

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij} = \ldots + \vec{f}_{ij} + \vec{f}_{ji} + \ldots = \vec{0}$$

$$\boxed{m \vec{a}_G = \vec{R}}$$

com $\vec{R}$ denotando a resultante das forças externas, m sendo a massa total do sistema e $\vec{a}_G$, a aceleração do centro de massa G do sistema.

Quantidade de movimento angular

A **quantidade de movimento angular do sistema** ou **momento da quantidade de movimento** com respeito ao pólo A é definida como:

$$\vec{\mathrm{H}}_{\mathrm{A}} = \sum_i (\mathrm{P}_i - \mathrm{A}) \wedge m_i \vec{\mathrm{v}}_i$$

Note ainda que:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{H}}_{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \left[(\vec{\mathrm{v}}_i - \vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{A}}) \wedge m_i \vec{\mathrm{v}}_i + (\mathrm{P}_i - \mathrm{A}) \wedge m_i \vec{\mathrm{a}}_i \right]$$

Considerando que $\sum_i m_i \vec{\mathrm{v}}_i = m \vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{G}}$, temos:

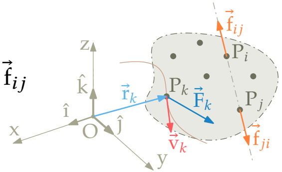
$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{H}}_{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}t} = -\vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{A}} \wedge \sum_i m_i \vec{\mathrm{v}}_i + \sum_i (\mathrm{P}_i - \mathrm{A}) \wedge m_i \vec{\mathrm{a}}_i$$

$$\Rightarrow \quad \sum_i (\mathrm{P}_i - \mathrm{A}) \wedge m_i \vec{\mathrm{a}}_i = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{H}}_{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}t} + \vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{A}} \wedge m \vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{G}}$$

Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA)

Para a partícula P_i, sabe-se que:

$$(\mathrm{P}_i - \mathrm{A}) \wedge m_i \vec{\mathrm{a}}_i = (\mathrm{P}_i - \mathrm{A}) \wedge \vec{\mathrm{F}}_i + \sum_{j \neq i} (\mathrm{P}_i - \mathrm{A}) \wedge \vec{\mathrm{f}}_{ij}$$



Somando para todas as partículas do sistema:

$$\sum_i (\mathrm{P}_i - \mathrm{A}) \wedge m_i \vec{\mathrm{a}}_i = \frac{d\vec{\mathrm{H}}_\mathrm{A}}{dt} + \vec{\mathrm{v}}_\mathrm{A} \wedge m\vec{\mathrm{v}}_\mathrm{G}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{\mathrm{H}}_\mathrm{A}}{dt} + \vec{\mathrm{v}}_\mathrm{A} \wedge m\vec{\mathrm{v}}_\mathrm{G} = \vec{\mathrm{M}}_\mathrm{A}}$$

$$\sum_i (\mathrm{P}_i - \mathrm{A}) \wedge \vec{\mathrm{F}}_i = \vec{\mathrm{M}}_\mathrm{A}$$

$$\sum_i (\mathrm{P}_i - \mathrm{A}) \wedge \sum_{j \neq i} \vec{\mathrm{f}}_{ij} = \ldots + (\mathrm{P}_i - \mathrm{A}) \wedge \vec{\mathrm{f}}_{ij} + (\mathrm{P}_j - \mathrm{A}) \wedge \vec{\mathrm{f}}_{ji} + \ldots$$

$$= \ldots + (\mathrm{P}_i - \mathrm{P}_j) \wedge \lambda_{ij} (\mathrm{P}_i - \mathrm{P}_j) + \ldots = \vec{0}$$

com $\vec{\mathrm{M}}_\mathrm{A}$ denotando a resultante de momentos de forças externas ao sistema (com respeito ao pólo A).

Sistemas de forças e sistemas de quantidade de movimento

	Forças externas	**Quantidades de movimento**
Definição	$\mathcal{F} = \{(\vec{F}_i, P_i), i = 1, \dots, n\}$	$\mathcal{Q} = \{(m_i\vec{v}_i, P_i), i = 1, \dots, n\}$
Resultante do sistema	$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$	$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i = m\vec{v}_G$
Momento do sistema	$\vec{M}_A = \sum_{i=1}^{n} (P_i - A) \wedge \vec{F}_i$	$\vec{H}_A = \sum_{i=1}^{n} (P_i - A) \wedge (m_i\vec{v}_i)$
Mudança de pólo	$\vec{M}_B = \vec{M}_A + (A - B) \wedge \vec{R}$	$\vec{H}_B = \vec{H}_A + (A - B) \wedge (m\vec{v}_G)$

Teorema da Resultante (TR)

Relaciona a resultante do sistema de forças com a derivada temporal da resultante do sistema de quantidades de movimento:

$$\vec{R} = m\vec{a}_G$$

Sistemas de forças e sistemas de quantidade de movimento

	Forças externas	Quantidades de movimento
Definição	$\mathcal{F} = \{(\vec{F}_i, P_i), i = 1, \ldots, n\}$	$\mathcal{Q} = \{(m_i\vec{v}_i, P_i), i = 1, \ldots, n\}$
Resultante do sistema	$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$	$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i = m\vec{v}_G$
Momento do sistema	$\vec{M}_A = \sum_{i=1}^{n} (P_i - A) \wedge \vec{F}_i$	$\vec{H}_A = \sum_{i=1}^{n} (P_i - A) \wedge (m_i\vec{v}_i)$
Mudança de pólo	$\vec{M}_B = \vec{M}_A + (A - B) \wedge \vec{R}$	$\vec{H}_B = \vec{H}_A + (A - B) \wedge (m\vec{v}_G)$

Teorema da Quantidade de Movimento Angular (TQMA)

Relaciona o momento do sistema de forças com a derivada temporal do momento do sistema de quantidades de movimento:

$$\vec{M}_A = \frac{d\vec{H}_A}{dt} + \vec{v}_A \wedge m\vec{v}_G$$

$$\vec{M}_G = \frac{d\vec{H}_G}{dt}$$

Potência, trabalho e energia potencial

O **trabalho** de uma força $\vec{F}$ aplicada em um ponto material P:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} P \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v} \, dt = \int_{\vec{r}(t_1)}^{\vec{r}(t_2)} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

pode ser interpretado como:

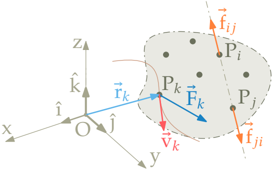
- a integral em um intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ da **potência** $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$;
- a integral de linha da força $\vec{F}$ sobre a trajetória da partícula P, entre as posições $\vec{r}(t_1)$ e $\vec{r}(t_2)$.

Uma força $\vec{F}$ é dita **conservativa** se existe uma função escalar V, tal que $\vec{F} = -\nabla V$. A função V é denominada **energia potencial** e, a partir dela, o **trabalho de uma força conservativa** $\vec{F}$ pode ser calculado como:

$$W = \int_{\vec{r}(t_1)}^{\vec{r}(t_2)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\left[V\left(\vec{r}(t_2)\right) - V\left(\vec{r}(t_1)\right)\right] = -\Delta V$$

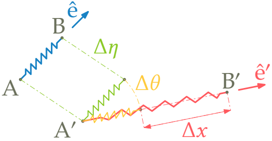
Energia potencial

Para o sistema de pontos $\mathcal{M} = \{P_k | k = 1, \ldots, n\}$, assumindo constante a aceleração da gravidade $\vec{g}$, a **energia potencial gravitacional** é dada por:



$$V_g = -\sum_i m_i \vec{r}_i \cdot \vec{g} = -m\vec{r}_G \cdot \vec{g} = mgh_G$$

Para uma mola elástica linear de constante k, a **energia potencial elástica** é dada por:

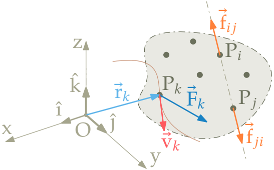


$$V_e = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$$

onde:

- l é o comprimento instantâneo da mola;
- l_0 é o comprimento natural da mola relaxada (na ausência de forças sobre a mesma).

Energia cinética



A energia cinética do sistema é definida como:

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i |\vec{v}_i|^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i$$

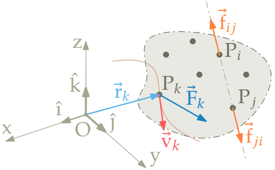
Sua derivada temporal é dada pela expressão:

$$\frac{dT}{dt} = \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i \vec{a}_i \cdot \vec{v}_i + \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{a}_i \right) = \sum_i m_i \vec{a}_i \cdot \vec{v}_i$$

Cabe notar ainda que, como $\vec{v}_i = \vec{v}_G + \vec{v}_{P_i|G}$, então:

$$\begin{aligned} T &= \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_G + \vec{v}_{P_i|G}) \cdot (\vec{v}_G + \vec{v}_{P_i|G}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i \right) \vec{v}_G \cdot \vec{v}_G + \vec{v}_G \cdot \left(\sum_i m_i \vec{v}_{P_i|G} \right) + \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_{P_i|G} \cdot \vec{v}_{P_i|G} \\ &= \frac{1}{2} m |\vec{v}_G|^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i |\vec{v}_{P_i|G}|^2 \end{aligned}$$

Teorema da Energia Cinética (TEC)



Para a partícula P_i, sabe-se que:

$$m_i \vec{a}_i \cdot \vec{v}_i = \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i + \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij} \cdot \vec{v}_i$$

Somando para todas as partículas do sistema:

$$\sum_i m_i \vec{a}_i \cdot \vec{v}_i = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$$

$$\sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = P^{\text{ext}}$$

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij} \cdot \vec{v}_i = \ldots + \vec{f}_{ij} \cdot \vec{v}_i + \vec{f}_{ji} \cdot \vec{v}_j + \ldots$$

$$= \ldots + \vec{f}_{ij} \cdot (\vec{v}_i - \vec{v}_j) + \ldots = P^{\text{int}}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = P^{\text{ext}} + P^{\text{int}}}$$

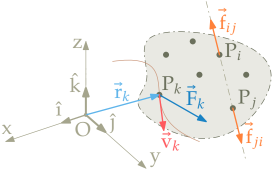
$$\boxed{\Delta T = W^{\text{ext}} + W^{\text{int}}}$$

Se P_i e P_j forem pontos de um mesmo corpo rígido, $\vec{v}_i = \vec{v}_j + \vec{\omega} \wedge (P_i - P_j)$ e, portanto:

$$\vec{f}_{ij} \cdot (\vec{v}_i - \vec{v}_j) = \lambda_{ij}(P_i - P_j) \cdot \vec{\omega} \wedge (P_i - P_j) = 0$$

Energia mecânica: sistemas conservativos e não-conservativos

De acordo com a classificação dos esforços, há duas formas de expressar o trabalho total exercido sobre um sistema mecânico como uma soma de duas parcelas:



$$W = \underbrace{W^{\text{ext}}}_{\text{externos}} + \underbrace{W^{\text{int}}}_{\text{internos}} = \underbrace{-\Delta V}_{\text{conservativos}} + \underbrace{\tilde{W}}_{\text{não-conservativos}}$$

Adotando a classificação que separa os esforços em conservativos ou não-conservativos, o Teorema da Energia Cinética pode ser reescrito como:

$$\Delta T = -\Delta V + \tilde{W} \quad \Rightarrow \quad \Delta T + \Delta V = \tilde{W} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta E = \tilde{W}}$$

onde a **energia mecânica** E do sistema é definida como:

$$E = T + V$$

Em **sistemas conservativos**, ou sejam, na ausência de esforços não-conservativos, tem-se a **conservação da energia mecânica**:

$$\boxed{\Delta E = 0}$$

Perguntas?

reorsino@usp.br