PME 3100 • Mecânica I • Módulo 2.4

Cinemática do ponto: triedro de Frenet
Movimento curvilíneo geral de um ponto

Prof. Dr. Renato Maia Matarazzo Orsino

Referencial e trajetória

- Toda descrição de movimento deve ser feita com respeito a um referencial.
- **Referencial**: conjunto formado por no mínimo três pontos não-colineares que preservam constantes as distâncias relativas.
- **Posição**: tomando um sistema de coordenadas Oxyz fixo a um referencial S, o vetor posição de um ponto P é:

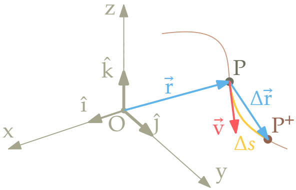
$$\vec{\mathrm{r}}(t) = (\mathrm{P} - \mathrm{O}) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{\mathrm{k}}$$
$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{P} = (x(t), y(t), z(t))$$

- **Trajetória**: curva contínua descrita pela imagem de $\vec{\mathrm{r}}(t)$.
- A geometria da trajetória de um ponto depende do referencial adotado.

Coordenada de comprimento de arco

A coordenada de comprimento de arco s para a trajetória de um ponto é definida como uma variável cujo infinitesimal seja dado por:

$$\mathrm{d}s = |\mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}| = \sqrt{\mathrm{d}\vec{\mathrm{r}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{r}}} = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}$$



A variação finita Δs entre dois pontos P e P' descreve a distância percorrida pelo ponto enquanto se movia ao longo deste trecho da trajetória. Note que:

$$\Delta s \geq |\Delta \vec{\mathrm{r}}|$$

sendo a condição de igualdade válida apenas em trechos em que a trajetória em si é retilínea (se houver).

Velocidade e aceleração

- Seja um referencial S munido de um sistema de coordenadas Oxyz, de base $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$.
- A **derivada de um vetor $\vec{r}$ em S** é o vetor cujas componentes na base $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$ são respectivamente as derivadas das componentes do próprio $\vec{r}$ nesta base, ou seja:

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

- **Velocidade de um ponto P com respeito ao referencial S**:

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathrm{P} - \mathrm{O})}$$

- **Aceleração de um ponto P com respeito ao referencial S**:

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(\mathrm{P} - \mathrm{O})}$$

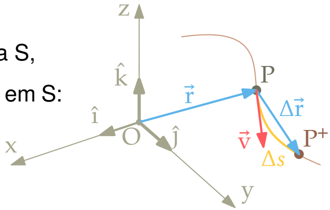
Velocidade escalar e versor tangente

Aplicando a regra da cadeia:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt}\frac{d\vec{r}}{ds}$$

de onde se identificam as expressões da **velocidade escalar** do ponto P com respeito a S, $v = \dfrac{ds}{dt}$, e do **versor tangente** à trajetória de P em S:

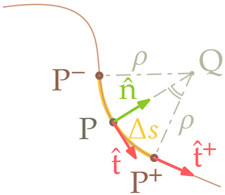
$$\boxed{\hat{t} = \frac{d\vec{r}}{ds}}$$



Note que $\hat{t}$ é um versor uma vez que $|\hat{t}| = |d\vec{r}|/ds = 1$, pela definição de s. Podemos então escrever o vetor velocidade de um ponto a partir da velocidade escalar v e do versor tangente correspondente:

$$\boxed{\vec{v} = v\hat{t}}$$

Plano osculador



Tome três posições P, P^{+} e P^{-} sobre a trajetória do ponto, tais que:

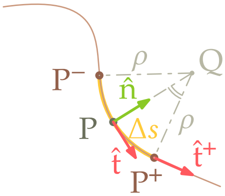
$$(\mathrm{P} - \mathrm{O}) = \vec{\mathrm{r}}(s)$$
$$(\mathrm{P}^{+} - \mathrm{O}) = \vec{\mathrm{r}}(s + \Delta s)$$
$$(\mathrm{P}^{-} - \mathrm{O}) = \vec{\mathrm{r}}(s - \Delta s)$$

Considere que, para algum $\varepsilon > 0$, os pontos P, P^{+} e P^{-} permanecem não-colineares sempre que $0 < \Delta s < \varepsilon$.

Plano osculador

O plano osculador associado à posição P de um ponto corresponde ao plano definido por P, P^{+} e P^{-} no limite $\Delta s \to 0$.

Centro de curvatura, raio de curvatura e versor normal



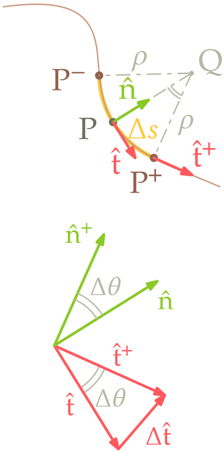
Sendo P, P^+ e P^- não-colineares, demonstra-se que existe um único arco de circunferência que contém estes três pontos:

- A posição ocupada pelo centro Q deste arco de circunferência no limite $\Delta s \to 0$ é denominada **centro de curvatura local** da trajetória.
- O raio ρ deste arco de circunferência no limite $\Delta s \to 0$ é denominado **raio de curvatura local** da trajetória.
- $\kappa = \dfrac{1}{\rho}$ é a **curvatura local**.

Versor normal $\hat{n}$

O vetor unitário que aponta de P para Q quando se toma o limite $\Delta s \to 0$ é denominado **versor normal local** da trajetória.

Derivada do versor tangente

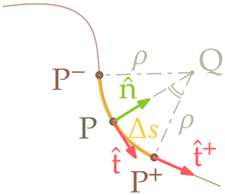


À medida que $\Delta s \to 0$:

- O arco de circunferência passando por P, P^{+} e P^{-} aproxima localmente a trajetória.
- Os versores $\hat{\mathrm{t}}$, tangente à trajetória em P, e $\hat{\mathrm{t}}^{+}$, em P^{+}, se tornam também tangentes a este arco de circunferência.
- O ângulo $\mathrm{P}\hat{\mathrm{Q}}\mathrm{P}^{+} \to 0$, se aproximando do ângulo formado entre $\hat{\mathrm{t}}$ e $\hat{\mathrm{t}}^{+}$.
- $\Delta\hat{\mathrm{t}} = \hat{\mathrm{t}}^{+} - \hat{\mathrm{t}}$ vai se tornando ortogonal à $\hat{\mathrm{t}}$ e, consequentemente, paralelo a $\hat{\mathrm{n}}$; além disso, o triângulo que define esta subtração de vetores, se torna semelhante ao triângulo PQP^{+}:

$$\frac{\Delta s}{\rho} \to \frac{|\Delta\hat{\mathrm{t}}|}{|\hat{\mathrm{t}}|} = \frac{|\Delta\hat{\mathrm{t}}|}{|\hat{\mathrm{t}}^{+}|} = |\Delta\hat{\mathrm{t}}|$$

Derivada do versor tangente



Dessa forma:

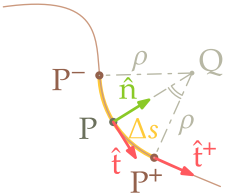
$$\left|\frac{\mathrm{d}\hat{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}s}\right| = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{|\Delta \hat{\mathrm{t}}|}{\Delta s} = \frac{1}{\rho}$$

Em outras palavras, $\dfrac{\mathrm{d}\hat{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}s}$ é um vetor de magnitude $\dfrac{1}{\rho}$ e direção definida pelo versor normal $\hat{\mathrm{n}}$, ou seja:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\hat{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\rho}\hat{\mathrm{n}} = \kappa\hat{\mathrm{n}}}$$

Atenção: em trechos em que a trajetória for localmente retilínea, ou seja, em que P, P^+ e P^- se tornam colineares à medida que $\Delta s \to 0$, nota-se que $\rho \to \infty$, $\dfrac{\mathrm{d}\hat{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}s} = \vec{0}$ e não é possível definir $\hat{\mathrm{n}}$.

Vetor aceleração: componentes intrínsecas



$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\hat{t}) = \frac{dv}{dt}\hat{t} + v\frac{d\hat{t}}{dt}$$

Aplicando a regra da cadeia:

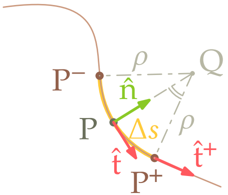
$$\frac{d\hat{t}}{dt} = \frac{ds}{dt}\frac{d\hat{t}}{ds} = \frac{v}{\rho}\hat{n}$$

Finalmente, identificando a aceleração escalar $a = \dfrac{dv}{dt}$, chega-se à expressão:

$$\boxed{\vec{a} = a\hat{t} + \frac{v^2}{\rho}\hat{n}}$$

Note: em trechos em que a trajetória for localmente retilínea: $\vec{a} = a\hat{t}$, ou seja, $\vec{a}$ e $\vec{v}$ são paralelos.

Derivadas do vetor posição: componentes intrínsecas



Considere o caso geral em que a trajetória de um ponto seja descrita em termos de um parâmetro q genérico, ou seja:

$$(\mathrm{P} - \mathrm{O}) = \vec{r}(q)$$

Adotando a notação abreviada $\mathbf{f}' = \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{f}}{\mathrm{d}q}$, temos:

$$\vec{r}' = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}q} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}q}\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s} = s'\hat{t}$$

$$\vec{r}'' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}(s'\hat{t}) = s''\hat{t} + \frac{(s')^2}{\rho}\hat{n}$$

Note: em trechos em que a trajetória for localmente retilínea: $\vec{r}'' = s''\hat{t}$, ou seja, $\vec{r}'$ e $\vec{r}''$ são paralelos.

Versor binormal

O **versor binormal local** da trajetória de um ponto é, por definição, o versor que é mutualmente ortogonal a $\hat{\mathrm{t}}$ e $\hat{\mathrm{n}}$ dado a partir da expressão:

$$\boxed{\hat{\mathrm{b}} = \hat{\mathrm{t}} \wedge \hat{\mathrm{n}}}$$

A partir desta definição, observa-se que:

$$\vec{\mathrm{r}}' \wedge \vec{\mathrm{r}}'' = s'\hat{\mathrm{t}} \wedge \left[s''\hat{\mathrm{t}} + \frac{(s')^2}{\rho}\hat{\mathrm{n}} \right] = \frac{(s')^3}{\rho}\hat{\mathrm{b}}$$

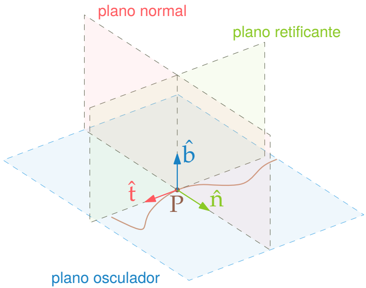
$$\vec{\mathrm{v}} \wedge \vec{\mathrm{a}} = v\hat{\mathrm{t}} \wedge \left[a\hat{\mathrm{t}} + \frac{v^2}{\rho}\hat{\mathrm{n}} \right] = \frac{v^3}{\rho}\hat{\mathrm{b}}$$

ou seja, $\hat{\mathrm{b}}$ é o vetor unitário que fornece a direção e sentido de $\vec{\mathrm{r}}' \wedge \vec{\mathrm{r}}''$ ou de $\vec{\mathrm{v}} \wedge \vec{\mathrm{a}}$. Dessa forma:

$$\boxed{\hat{\mathrm{b}} = \frac{\vec{\mathrm{r}}' \wedge \vec{\mathrm{r}}''}{|\vec{\mathrm{r}}' \wedge \vec{\mathrm{r}}''|} = \frac{\vec{\mathrm{v}} \wedge \vec{\mathrm{a}}}{|\vec{\mathrm{v}} \wedge \vec{\mathrm{a}}|}}$$

Triedro de Frenet

Jean Frédéric Frenet (1816 – 1900)

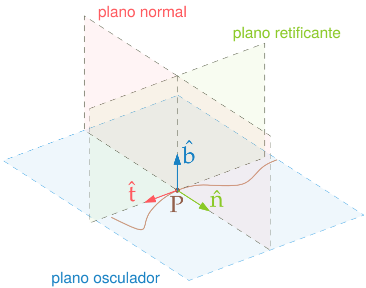


O **triedro de Frenet** associado à posição P de um ponto sobre sua trajetória é definido a partir da base ortornormal positiva $(\hat{t}, \hat{n}, \hat{b})$ constituída pelos versores tangente, normal e binormal locais.

Três planos mutualmente ortogonais, que se interceptam em P caracterizam o triedro de Frenet associado a esta posição:

- **Plano osculador:** definido pelos eixos $P\hat{t}$ e $P\hat{n}$, ortogonal a $\hat{b}$.
- **Plano normal:** definido pelos eixos $P\hat{n}$ e $P\hat{b}$, ortogonal a $\hat{t}$.
- **Plano retificante:** definido pelos eixos $P\hat{b}$ e $P\hat{t}$, ortogonal a $\hat{n}$.

Procedimento para obtenção do triedro de Frenet



A partir de uma expressão do vetor posição $(P - O) = \vec{r}(q)$ descrita em termos de uma coordenada q genérica:

$$\hat{t} = \frac{\vec{r}'}{|\vec{r}'|}$$

$$\hat{b} = \frac{\vec{r}' \wedge \vec{r}''}{|\vec{r}' \wedge \vec{r}''|}$$

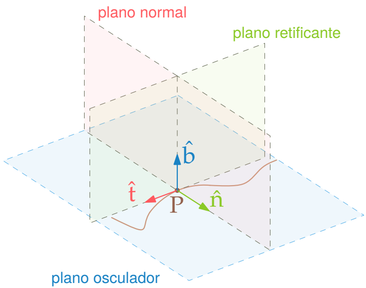
A partir dos vetores velocidade $\vec{v}$ e aceleração $\vec{a}$:

$$\hat{t} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

$$\hat{b} = \frac{\vec{v} \wedge \vec{a}}{|\vec{v} \wedge \vec{a}|}$$

Finalmente: $\hat{n} = \hat{b} \wedge \hat{t}$.

Triedro de Frenet, componentes intrínsecas e raio de curvatura



Tomando como ponto de partida os valores dos vetores velocidade $\vec{v}$ e aceleração $\vec{a}$ em P, temos:

$$v = |\vec{v}| \tag{1}$$

$$\hat{t} = \frac{\vec{v}}{v} \tag{2}$$

$$a = \dot{v} = \vec{a} \cdot \hat{t} \tag{3}$$

$$\rho = \frac{v^2}{|\vec{a} - a\hat{t}|} \tag{4}$$

$$\hat{n} = \frac{\vec{a} - a\hat{t}}{|\vec{a} - a\hat{t}|} \tag{5}$$

$$\hat{b} = \hat{t} \wedge \hat{n} \tag{6}$$

1 Velocidade e aceleração: descrição vetorial
2 Triedro de Frenet
3 *Fórmulas de Frenet-Serret

Fórmulas de Frenet-Serret

Objetivo: obter as expressões de $\hat{t}'$, $\hat{n}'$ e $\hat{b}'$, com $(\cdot)' = \dfrac{d(\cdot)}{ds}$, em termos de suas componentes intrínsecas, expressas na própria base $(\hat{t}, \hat{n}, \hat{b})$.
A primeira relação, que fornece $\hat{t}'$ já é conhecida:

$$\hat{t}' = \frac{1}{\rho}\,\hat{n} = \kappa\,\hat{n}$$

Note que $\hat{t}'$ é, portanto, ortogonal a $\hat{t}$. De forma mais geral, **qualquer versor $\hat{u}$ é ortogonal à sua derivada**:

$$\hat{u} \cdot \hat{u} = 1 \quad \Rightarrow \quad \hat{u}' \cdot \hat{u} + \hat{u} \cdot \hat{u}' = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{u}' \cdot \hat{u} = 0$$

Assim, $\hat{t}'$, $\hat{n}'$ e $\hat{b}'$ devem ser ortogonais a $\hat{t}$, $\hat{n}$ e $\hat{b}$, respectivamente.
Além disso, considerando que $\hat{t}$ é ortogonal tanto a $\hat{n}$ quanto a $\hat{b}$:

$$\hat{t} \cdot \hat{n} = 0 \;\Rightarrow\; \hat{t}' \cdot \hat{n} + \hat{t} \cdot \hat{n}' = 0 \;\Rightarrow\; \kappa\hat{n} \cdot \hat{n} + \hat{t} \cdot \hat{n}' = 0 \;\Rightarrow\; \hat{n}' \cdot \hat{t} = -\kappa$$

$$\hat{t} \cdot \hat{b} = 0 \;\Rightarrow\; \hat{t}' \cdot \hat{b} + \hat{t} \cdot \hat{b}' = 0 \;\Rightarrow\; \kappa\hat{n} \cdot \hat{b} + \hat{t} \cdot \hat{b}' = 0 \;\Rightarrow\; \hat{b}' \cdot \hat{t} = 0$$

Fórmulas de Frenet-Serret

Sendo $\hat{\mathrm{b}}'$ mutualmente ortogonal a $\hat{\mathrm{t}}$ e $\hat{\mathrm{b}}$, conclui-se que este vetor deve ser paralelo a $\hat{\mathrm{n}}$. De fato, existe uma constante τ, denominada **torção** local da trajetória de P tal que:

$$\hat{\mathrm{b}}' = -\tau\,\hat{\mathrm{n}}$$

Também:

$$\hat{\mathrm{b}} \cdot \hat{\mathrm{n}} = 0 \;\Rightarrow\; \hat{\mathrm{b}}' \cdot \hat{\mathrm{n}} + \hat{\mathrm{b}} \cdot \hat{\mathrm{n}}' = 0 \;\Rightarrow\; -\tau\hat{\mathrm{n}} \cdot \hat{\mathrm{n}} + \hat{\mathrm{b}} \cdot \hat{\mathrm{n}}' = 0 \;\Rightarrow\; \hat{\mathrm{n}}' \cdot \hat{\mathrm{b}} = \tau$$

Assim, as **fórmulas de Frenet-Serret** podem ser escritas como se segue:

$$\begin{cases} \hat{\mathrm{t}}' = \kappa\,\hat{\mathrm{n}} \\ \hat{\mathrm{n}}' = -\kappa\,\hat{\mathrm{t}} + \tau\,\hat{\mathrm{b}} \\ \hat{\mathrm{b}}' = -\tau\,\hat{\mathrm{n}} \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{bmatrix} \hat{\mathrm{t}}' \\ \hat{\mathrm{n}}' \\ \hat{\mathrm{b}}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathrm{t}} \\ \hat{\mathrm{n}} \\ \hat{\mathrm{b}} \end{bmatrix}$$

De forma compacta, é possível definir um único vetor $\vec{\xi}$ tal que:

$$\vec{\xi} = \tau\,\hat{\mathrm{t}} + \kappa\,\hat{\mathrm{b}} \quad\Rightarrow\quad \hat{\mathrm{t}}' = \vec{\xi} \wedge \hat{\mathrm{t}}, \quad \hat{\mathrm{n}}' = \vec{\xi} \wedge \hat{\mathrm{n}}, \quad \hat{\mathrm{b}}' = \vec{\xi} \wedge \hat{\mathrm{b}}$$

Perguntas?

reorsino@usp.br