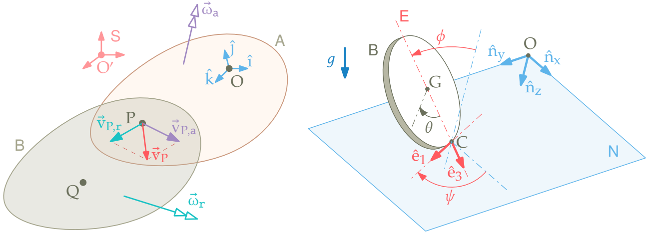
PME 3100 • Mecânica I • Módulo 2.3

Composição de movimentos

Prof. Dr. Renato Maia Matarazzo Orsino

Motivação

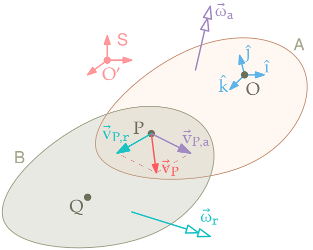


- Quando a descrição do movimento de um ponto P ou de um corpo B em um dado referencial de interesse S é complexa, é usual a utilização de um referencial auxiliar A, móvel com respeito a S, e com respeito ao qual a descrição do movimento analisado se torna mais simples.
- O objetivo da **composição de movimentos** é obter a descrição de um movimento com respeito a um referencial S (principal), sendo previamente conhecida sua descrição com respeito a outro referencial A (auxiliar).

1 Composição de velocidades e acelerações
2 Composição de rotações

1 Composição de velocidades e acelerações
2 Composição de rotações

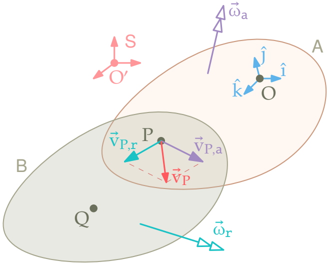
Definições



- S: referencial principal, com respeito ao qual se deseja descrever o movimento de um ponto P.
- A: referencial auxiliar, com respeito ao qual a descrição do movimento de P é conhecida.
- $\vec{\omega}_a$: velocidade angular de arrastamento – mede a rotação de A com respeito a S.
- O: ponto solidário ao referencial auxiliar A.
- $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$: base de vetores solidária ao referencial auxiliar A.
- Derivadas temporais dos versores $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$ com respeito ao referencial principal S:

$$\frac{d\hat{\imath}}{dt} = \vec{\omega}_a \wedge \hat{\imath} \qquad \frac{d\hat{\jmath}}{dt} = \vec{\omega}_a \wedge \hat{\jmath} \qquad \frac{d\hat{k}}{dt} = \vec{\omega}_a \wedge \hat{k}$$

Composição de velocidades



$$\vec{v}_P = \underbrace{\vec{v}_O + x\frac{d\hat{\imath}}{dt} + y\frac{d\hat{\jmath}}{dt} + z\frac{d\hat{k}}{dt}}_{\vec{v}_{P,a}} + \underbrace{\dot{x}\hat{\imath} + \dot{y}\hat{\jmath} + \dot{z}\hat{k}}_{\vec{v}_{P,r}}$$

$$\vec{v}_P = \underbrace{\vec{v}_O + \vec{\omega}_a \wedge (x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k})}_{\vec{v}_{P,a}} + \vec{v}_{P,r}$$

$$\vec{v}_P = \underbrace{\vec{v}_O + \vec{\omega}_a \wedge (P - O)}_{\vec{v}_{P,a}} + \vec{v}_{P,r}$$

- $\vec{v}_{P,r}$: **velocidade relativa** de P, medida com respeito ao referencial auxiliar A.
- $\vec{v}_{P,a}$: **velocidade de arrastamento** de P – velocidade, medida com respeito ao referencial principal S, que o ponto P teria caso fosse solidário ao corpo A.

Composição de acelerações

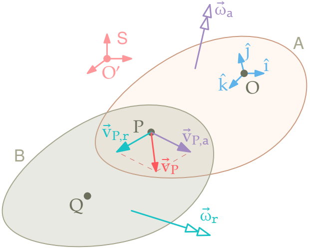
$$\vec{a}_P = \underbrace{\vec{a}_O + x\frac{d^2\hat{\imath}}{dt^2} + y\frac{d^2\hat{\jmath}}{dt^2} + z\frac{d^2\hat{k}}{dt^2}}_{\vec{a}_{P,a}} + \underbrace{2\left(\dot{x}\frac{d\hat{\imath}}{dt} + \dot{y}\frac{d\hat{\jmath}}{dt} + \dot{z}\frac{d\hat{k}}{dt}\right)}_{\vec{a}_{P,c}} + \underbrace{\ddot{x}\hat{\imath} + \ddot{y}\hat{\jmath} + \ddot{z}\hat{k}}_{\vec{a}_{P,r}}$$

$$\vec{a}_P = \underbrace{\vec{a}_O + \vec{\alpha}_a \wedge (P - O) + \vec{\omega}_a \wedge [\vec{\omega}_a \wedge (P - O)]}_{\vec{a}_{P,a}} + \underbrace{2\vec{\omega}_a \wedge \vec{v}_{P,r}}_{\vec{a}_{P,c}} + \vec{a}_{P,r}$$

- $\vec{a}_{P,r}$: **aceleração relativa** de P, medida com respeito ao referencial auxiliar A.
- $\vec{a}_{P,a}$: **aceleração de arrastamento** de P – aceleração, medida com respeito ao referencial principal S, que o ponto P teria caso fosse solidário ao corpo A.
- $\vec{a}_{P,c}$: **aceleração complementar ou de Coriolis** de P – termo associado ao efeito da rotação do referencial auxiliar A com respeito ao referencial principal S.

1 Composição de velocidades e acelerações
2 Composição de rotações

Definições



- S: referencial principal, com respeito ao qual se deseja descrever o movimento do corpo B.
- A: referencial auxiliar, com respeito ao qual a descrição do movimento de B é conhecida.
- $\vec{\omega}_a$: velocidade angular de arrastamento – mede a rotação de A com respeito a S.
- $\vec{\omega}_r$: velocidade angular relativa – mede a rotação de B com respeito a A.
- P e Q: par de pontos solidários a B.
- $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$: base de vetores solidária ao referencial auxiliar A, cujas derivadas com respeito ao referencial principal S são:

$$\frac{d\hat{\imath}}{dt} = \vec{\omega}_a \wedge \hat{\imath} \qquad \frac{d\hat{\jmath}}{dt} = \vec{\omega}_a \wedge \hat{\jmath} \qquad \frac{d\hat{k}}{dt} = \vec{\omega}_a \wedge \hat{k}$$

Composição de velocidades angulares

A partir das equações de campo de velocidade para B:

$$\begin{cases} \vec{v}_P - \vec{v}_Q = \vec{\omega} \wedge (P - Q) \\ \vec{v}_{P,r} - \vec{v}_{Q,r} = \vec{\omega}_r \wedge (P - Q) \end{cases}$$

Além disso, da lei de composição de velocidades:

$$\begin{cases} \vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega}_a \wedge (P - O) + \vec{v}_{P,r} \\ \vec{v}_Q = \vec{v}_O + \vec{\omega}_a \wedge (Q - O) + \vec{v}_{Q,r} \end{cases}$$

De onde decorre que:

$$\vec{\omega} \wedge (P - Q) = \vec{\omega}_a \wedge (P - Q) + \vec{\omega}_r \wedge (P - Q)$$

Sendo a escolha dos pontos P e Q arbitrária:

$$\boxed{\vec{\omega} = \vec{\omega}_a + \vec{\omega}_r}$$

Composição de acelerações angulares

$$\dot{\vec{\omega}}_a = \dot{\omega}_{a,x}\hat{\imath} + \dot{\omega}_{a,y}\hat{\jmath} + \dot{\omega}_{a,z}\hat{k} + \omega_{a,x}\frac{d\hat{\imath}}{dt} + \omega_{a,y}\frac{d\hat{\jmath}}{dt} + \omega_{a,z}\frac{d\hat{k}}{dt}$$

$$\dot{\vec{\omega}}_a = \underbrace{\dot{\omega}_{a,x}\hat{\imath} + \dot{\omega}_{a,y}\hat{\jmath} + \dot{\omega}_{a,z}\hat{k}}_{\vec{\alpha}_a} + \vec{\omega}_a \wedge (\omega_{a,x}\hat{\imath} + \omega_{a,y}\hat{\jmath} + \omega_{a,z}\hat{k})$$

$$\dot{\vec{\omega}}_a = \vec{\alpha}_a$$

$$\dot{\vec{\omega}}_r = \dot{\omega}_{r,x}\hat{\imath} + \dot{\omega}_{r,y}\hat{\jmath} + \dot{\omega}_{r,z}\hat{k} + \omega_{r,x}\frac{d\hat{\imath}}{dt} + \omega_{r,y}\frac{d\hat{\jmath}}{dt} + \omega_{r,z}\frac{d\hat{k}}{dt}$$

$$\dot{\vec{\omega}}_r = \underbrace{\dot{\omega}_{r,x}\hat{\imath} + \dot{\omega}_{r,y}\hat{\jmath} + \dot{\omega}_{r,z}\hat{k}}_{\vec{\alpha}_r} + \vec{\omega}_a \wedge (\omega_{r,x}\hat{\imath} + \omega_{r,y}\hat{\jmath} + \omega_{r,z}\hat{k})$$

$$\dot{\vec{\omega}}_r = \vec{\alpha}_r + \vec{\omega}_a \wedge \vec{\omega}_r$$

$$\boxed{\vec{\alpha} = \vec{\alpha}_a + \vec{\alpha}_r + \vec{\omega}_a \wedge \vec{\omega}_r}$$

Perguntas?

reorsino@usp.br