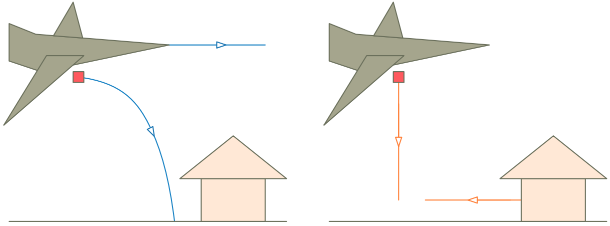
PME 3100 • Mecânica I • Módulo 2.1

Referencial, posição, velocidade, aceleração
Cinemática do ponto: movimento retilíneo e circular
Campo de velocidades de um corpo rígido
Centro instantâneo de rotações (CIR)

Prof. Dr. Renato Maia Matarazzo Orsino

Motivação

- Antes de se utilizar qualquer grandeza física associada à descrição de um dado movimento, é fundamental identificar **com respeito a que** sua medição foi feita.
- Considere, por exemplo, um avião lançando uma caixa de mantimentos próximo ao galpão de uma missão humanitária, como esboçado na figura abaixo. A **trajetória** do pacote difere quando medida por um observador no galpão e por outro no avião.

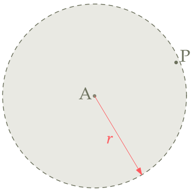


(a) Referencial no galpão (b) Referencial do avião

Identificar a posição e descrever o movimento de um ponto P no espaço

Consideremos um único ponto A de monitoramento, a partir do qual medimos a distância r até P.

- Se a distância r varia, claramente P está em movimento com respeito a A.
- Seria possível, por outro lado, P se movimentar sem ser detectado por A?
- O lugar geométrico dos pontos do espaço cuja distância até A é igual a r é uma superfície esférica de centro A e raio r.

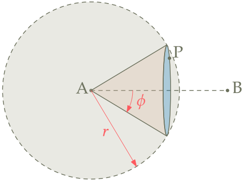


Qualquer movimento de P sobre esta superfície não seria detectado por A, uma vez que a medida r permaneceria constante.

Identificar a posição e descrever o movimento de um ponto P no espaço

E se, além de A, utilizarmos um segundo ponto de observação B?

- Em primeiro lugar, é necessário que a distância entre A e B permaneça constante, caso contrário a variação de distância relativa entre eles pode afetar a medição da posição de outros pontos.
- Podemos então, além da medida r (distância de P até A) utilizar o ângulo $\phi = \mathrm{P\hat{A}B}$ como uma segunda medida de posição, por exemplo.

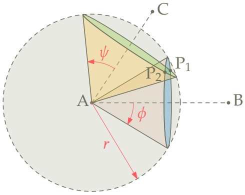


Ainda assim, é possível que P se mova sem ser detectado: basta permanecer na circunferência descrita pela intersecção entre a superfície esférica de centro A e raio r e pela superfície cônica de eixo AB, vértice A e ângulo abertura ϕ.

Identificar a posição e descrever o movimento de um ponto P no espaço

Um terceiro ponto de observação C resolveria este problema, então?

- Primeiramente, é necessário que as distâncias mútuas entre A, B e C permaneçam constantes, como anteriormente argumentado.
- Em segundo lugar, C não deve estar alinhado com A e B, caso contrário, o ângulo $\theta = \mathrm{P\hat{A}C}$ se torna idêntico ou suplementar a $\phi = \mathrm{P\hat{A}B}$, não representando uma medida independente.



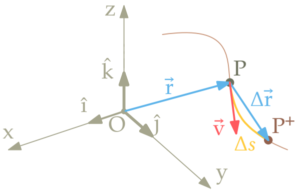
Eis um importante resultado: **3 medidas independentes são suficientes para a detecção de movimento de um ponto qualquer no espaço.**

Definição

Um **referencial** S é definido como um conjunto de pontos cujas distâncias relativas permanecem **constantes** e que contenha **no mínimo três pontos não-colineares**.

Trajetória de um ponto

Seja Oxyz um sistema de coordenadas fixo ao referencial S.
A posição de um ponto P genérico no espaço pode ser definida a partir de suas **coordenadas cartesianas** (x, y, z), componentes do vetor posição $\vec{\mathrm{r}} = (\mathrm{P} - \mathrm{O})$ na base $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{\mathrm{k}})$:



$$\vec{\mathrm{r}}(t) = (\mathrm{P} - \mathrm{O}) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{\mathrm{k}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{P} = (x(t), y(t), z(t))$$

Se as coordenadas (x, y, z) permanecem constantes no tempo, P é um ponto fixo ao referencial S. Caso contrário, descreve um movimento com respeito a este referencial. Neste caso, a curva descrita pela função $\vec{\mathrm{r}}(t)$, parametrizada em t, é denominada **trajetória de P em S**.

Velocidade e aceleração

- Seja um referencial S munido de um sistema de coordenadas Oxyz, de base $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$.
- A **derivada de um vetor $\vec{r}$ em S** é o vetor cujas componentes na base $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$ são respectivamente as derivadas das componentes do próprio $\vec{r}$ nesta base, ou seja:

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\hat{\imath} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\hat{\jmath} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\hat{k}$$

- **Velocidade de um ponto P com respeito ao referencial S**:

$$\boxed{\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{P} - \mathrm{O})}$$

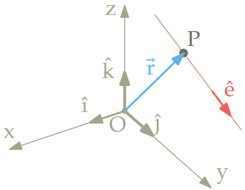
- **Aceleração de um ponto P com respeito ao referencial S**:

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(\mathrm{P} - \mathrm{O})}$$

1 Referencial, posição, velocidade e aceleração
2 Movimento retilíneo e circular
3 Movimento de corpo rígido
4 Equação característica
5 Movimento plano de corpo rígido
6 Centro instantâneo de rotação

Movimento retilíneo

Um ponto P descreve um movimento retilíneo em um dado referencial S se, e somente se, existe um versor $\hat{e}$ tal que sua trajetória possa ser descrita a partir da expressão:



$$\vec{r}(t) = (\mathrm{P} - \mathrm{O}) = (\mathrm{P}_0 - \mathrm{O}) + s\hat{e}$$
$$\Leftrightarrow \quad \mathrm{P} = (x_0 + e_x s, y_0 + e_y s, z_0 + e_z s)$$

com P_0 sendo uma posição ocupada por P (ou seja, um ponto em sua trajetória).

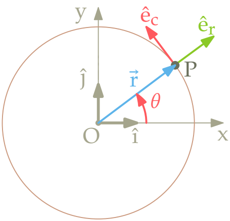
Em um movimento retilíneo, tanto a **velocidade** quanto a **aceleração** são **vetores paralelos ao versor diretor** $\hat{e}$ da trajetória:

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\hat{e} \qquad \vec{a} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\hat{e}$$

Movimento circular

Para a descrição do movimento circular de uma partícula, adotemos, por simplicidade um sistema de coordenadas Oxyz tal que a circunferência tenha centro O e esteja contida no plano Oxy:

$$\vec{r}(t) = (\mathrm{P} - \mathrm{O}) = r(\cos\theta\hat{\imath} + \sin\theta\hat{\jmath}) = r\hat{e}_r$$



A base $(\hat{e}_r, \hat{e}_c, \hat{k})$ do sistema de coordenadas cilíndrico simplifica a descrição das expressões vetoriais:

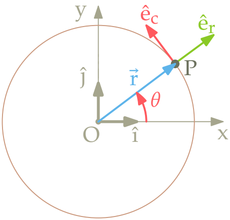
$$\hat{e}_r = \cos\theta\hat{\imath} + \sin\theta\hat{\jmath}$$
$$\hat{e}_c = -\sin\theta\hat{\imath} + \cos\theta\hat{\jmath}$$

Movimento circular

Notando que:

$$\frac{d\hat{e}_r}{dt} = \dot{\theta}(-\sin\theta\hat{\imath} + \cos\theta\hat{\jmath}) = \dot{\theta}\hat{e}_c = \dot{\theta}\hat{k} \wedge \hat{e}_r$$

$$\frac{d\hat{e}_c}{dt} = \dot{\theta}(-\cos\theta\hat{\imath} - \sin\theta\hat{\jmath}) = -\dot{\theta}\hat{e}_r = \dot{\theta}\hat{k} \wedge \hat{e}_c$$



temos:

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(r\hat{e}_r) = r\dot{\theta}\hat{e}_c$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(r\dot{\theta}\hat{e}_c) = r\ddot{\theta}\hat{e}_c - r\dot{\theta}^2\hat{e}_r$$

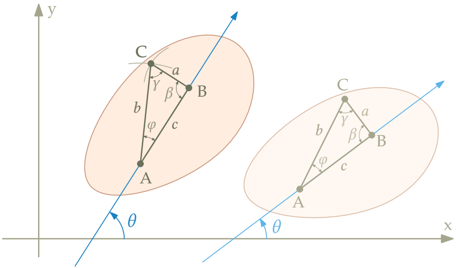
Definindo a velocidade angular $\omega = \dot{\theta}$ e a aceleração angular $\alpha = \ddot{\theta}$, temos:

$$\vec{v} = r\omega\hat{e}_c \qquad \Rightarrow \qquad |\vec{v}| = r|\omega|$$

$$\vec{a} = r\alpha\hat{e}_c - r\omega^2\hat{e}_r \qquad \Rightarrow \qquad |\vec{a}| = r\sqrt{\omega^4 + \alpha^2}$$

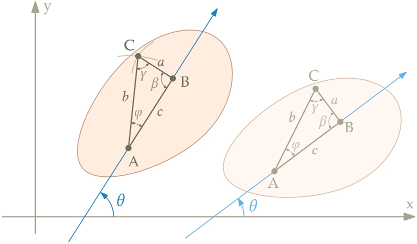
1 Referencial, posição, velocidade e aceleração
2 Movimento retilíneo e circular
3 Movimento de corpo rígido
4 Equação característica
5 Movimento plano de corpo rígido
6 Centro instantâneo de rotação

Definição



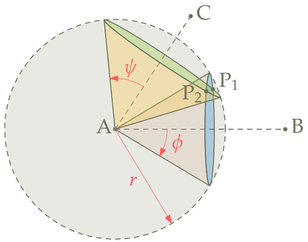
- Diz-se que um sistema descreve um **movimento de corpo rígido** se **qualquer** par de pontos neste sistema **preservar constante sua distância relativa**.
- Quando se toma um trio arbitrário de pontos em um **corpo rígido**, como corolário da conservação das distâncias relativas entre pontos tomados par a par, decorre a **preservação de ângulos** entre qualquer par de linhas solidárias a este corpo.

Descrição de um movimento plano de corpo rígido



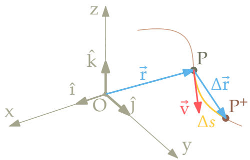
- Se um corpo rígido pode ser modelado como uma figura plana em movimento em seu próprio plano, tem-se um **movimento plano de corpo rígido**.
- Para descrever a configuração de um corpo rígido em movimento plano basta descrever a posição de 1 de seus pontos (ex. A) e o ângulo θ que uma direção qualquer solidária a este corpo forma com uma direção fixa ao referencial adotado. Equivalentemente, pode-se monitorar 2 pontos do corpo.

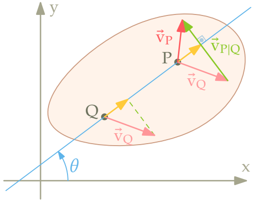
Descrição de um movimento geral de corpo rígido



- No caso de um movimento de corpo rígido tridimensional, a descrição das posições de **3 pontos não-colineares** quaisquer deste corpo é suficiente para a localização de qualquer outro ponto a ele solidário.
- Equivalentemente, pode-se descrever um movimento geral de corpo rígido a partir da posição 1 de seus pontos e das orientações de duas direções distintas a ele solidárias. Tal descrição envolve no máximo 6 parâmetros independentes.

Velocidade relativa





Seja $Oxyz$ um sistema de coordenadas munido de uma base ortonormal positiva $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$ e fixo ao referencial S.

Dados dois pontos P e Q arbitrários, **a velocidade de P relativa a Q em S** é definida pela expressão:

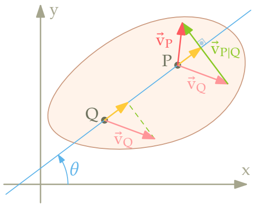
$$\vec{v}_{P|Q} = \frac{d}{dt}(P - Q)$$

$$= \frac{d}{dt}\left[(P - O) - (Q - O)\right] = \vec{v}_P - \vec{v}_Q$$

Assim, se conhecermos a velocidade do ponto Q e a velocidade de P relativa a Q, podemos obter a velocidade de P diretamente por meio da expressão:

$$\boxed{\vec{v}_P = \vec{v}_Q + \vec{v}_{P|Q}}$$

Equação característica do movimento de corpo rígido



Sejam P e Q dois pontos de um mesmo corpo rígido. Neste caso, a distância d entre esses pontos deve permanecer constante:

$$(\mathrm{P}-\mathrm{Q})\cdot(\mathrm{P}-\mathrm{Q}) = |\mathrm{P}-\mathrm{Q}|^2 = d^2$$

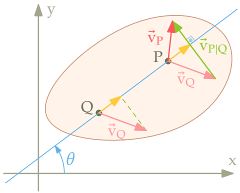
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[(\mathrm{P}-\mathrm{Q})\cdot(\mathrm{P}-\mathrm{Q})\right] = 0$$

$$\vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{P}|\mathrm{Q}}\cdot(\mathrm{P}-\mathrm{Q}) + (\mathrm{P}-\mathrm{Q})\cdot\vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{P}|\mathrm{Q}} = 0$$

$$\boxed{\vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{P}|\mathrm{Q}}\cdot(\mathrm{P}-\mathrm{Q}) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{P}}\cdot(\mathrm{P}-\mathrm{Q}) = \vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{Q}}\cdot(\mathrm{P}-\mathrm{Q})}$$

Em um movimento de corpo rígido os vetores de posição relativa e velocidade relativa correspondentes devem ser ortogonais entre si.

Movimento plano de corpo rígido



- Corpo rígido modelado como uma figura plana em movimento sobre seu próprio plano.
- Seja θ o ângulo entre uma linha solidária ao corpo rígido e uma linha fixa ao referencial S de interesse.

$$(\mathrm{P}-\mathrm{Q}) = l(\cos\theta\hat{\imath} + \sin\theta\hat{\jmath})$$

$$\vec{v}_{\mathrm{P}|\mathrm{Q}} = l\dot{\theta}(-\sin\theta\hat{\imath} + \cos\theta\hat{\jmath})$$

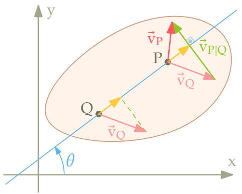
Note que:

$$\hat{k} \wedge (\cos\theta\hat{\imath} + \sin\theta\hat{\jmath}) = (-\sin\theta\hat{\imath} + \cos\theta\hat{\jmath})$$

Assim:

$$\boxed{\vec{v}_{\mathrm{P}|\mathrm{Q}} = (\dot{\theta}\hat{k}) \wedge (\mathrm{P}-\mathrm{Q})}$$

Movimento plano de corpo rígido



- A magnitude da velocidade angular deste corpo é $|\dot{\theta}|$.
- Define-se o **vetor velocidade angular** ou **vetor rotação** do corpo rígido:

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{k}$$

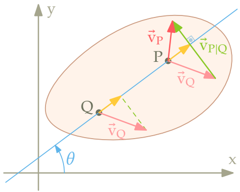
Note que $(P - Q)$ é paralelo ao plano de movimento enquanto $\vec{\omega} \parallel \hat{k}$ é ortogonal a este plano. Assim:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_Q + \vec{v}_{P|Q} \quad \text{com} \quad \boxed{\vec{v}_{P|Q} = \vec{\omega} \wedge (P - Q)}$$

- No movimento plano, $\vec{v}_{P|Q}$, $\vec{\omega}$ e $(P - Q)$ constituem um trio de vetores ortogonais entre si.

1 Referencial, posição, velocidade e aceleração
2 Movimento retilíneo e circular
3 Movimento de corpo rígido
4 Equação característica
5 Movimento plano de corpo rígido
6 Centro instantâneo de rotação

Centro instantâneo de rotação (CIR)



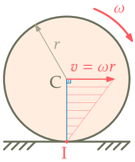
- Reta ortogonal a $\vec{v}_P$ passando por P: lugar geométrico de pontos solidários ao corpo cujas velocidades são paralelas a $\vec{v}_P$. De fato:

$$\vec{v}_P \parallel \vec{v}_Q \Leftrightarrow \vec{v}_P \parallel \vec{v}_{P|Q} \Leftrightarrow \vec{v}_P \perp (P - Q)$$

- Se o corpo **não estiver em translação**, existe um ponto I sobre esta reta cuja velocidade instantânea é nula ($\vec{v}_I = \vec{0}$). Este ponto é denominado **centro instantâneo de rotação (CIR)**.
- Neste caso, a magnitude da velocidade de um ponto P é diretamente proporcional à sua distância ao CIR.

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{P|I} = \vec{\omega} \wedge (P - I)$$

$$\Rightarrow |\vec{v}_P| = |\vec{\omega}||P - I| \Rightarrow \boxed{v_P = \omega r}$$



Disco rolando sem escorregar.

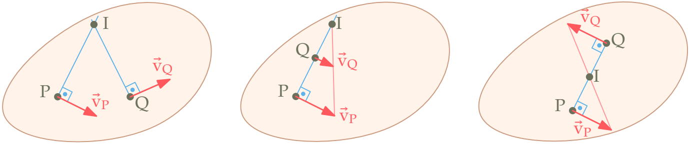
Determinação do centro instantâneo de rotação (CIR)

Caso I – velocidades de Q e P não paralelas (figura à esquerda):

- o CIR é a interseção das retas, passantes por Q e P, com direções ortogonais às respectivas velocidades.
- para a construção geométrica é necessário conhecer as posições de Q e P e **apenas as direções** de $\vec{v}_{\mathrm{Q}}$ e $\vec{v}_{\mathrm{P}}$.

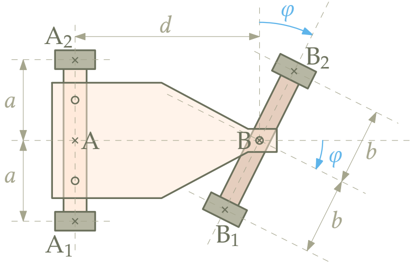
Caso II – velocidades de Q e P paralelas (figuras ao centro e à direita):

- CIR sobre a reta QP, obtido por interpolação linear.
- para a construção geométrica é necessário conhecer as posições de Q e P e os **vetores (magnitude, direção e sentido)** $\vec{v}_{\mathrm{Q}}$ e $\vec{v}_{\mathrm{P}}$.

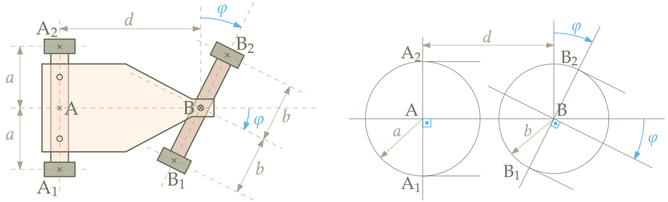


Determinação do centro instantâneo de rotação (CIR)

Considere um carrinho de rolimã em que rolamentos radiais de esferas desempenham o papel de rodas, rolando sem escorregar sobre uma superfície plana. Para uma manobra em que o ângulo φ entre os eixos dianteiro e traseiro permanece constante, pede-se a construção geométrica para a determinação do CIR.



Determinação do centro instantâneo de rotação (CIR)



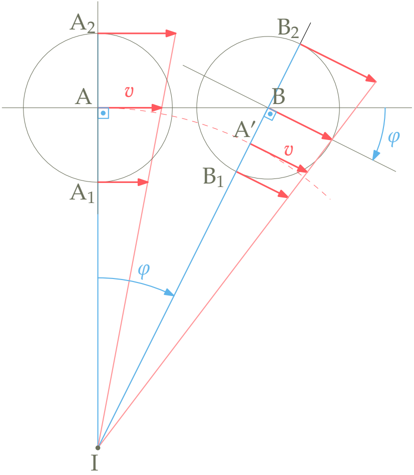
(1) Construir um desenho em escala representando os pontos relevantes do corpo (centros das rodas e pontos médios dos eixos dianteiro e traseiro).

(2) Da condição de rolamento sem escorregamento das rodas, seus centros terão velocidades ortogonais às direções dos seus respectivos eixos.

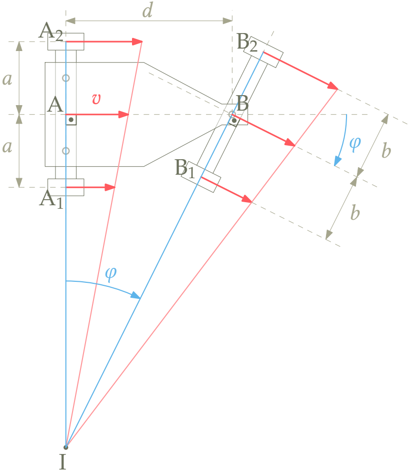
(3) O CIR do carrinho de rolimã está na intersecção das retas suporte de seus eixos dianteiro e traseiro.

(4) Definir uma escala tomando como referência a magnitude da velocidade de dos pontos do corpo (por ex. A) e construir o diagrama baseado na proporção $v = \omega r$.

Determinação do centro instantâneo de rotação (CIR)



Determinação do centro instantâneo de rotação (CIR)



Perguntas?

reorsino@usp.br