PME 3100 • Mecânica I • Módulo 1.4

Momento mínimo e eixo central
Redução de sistemas de forças (4 classes)
Forças hidrostáticas

Prof. Dr. Renato Maia Matarazzo Orsino

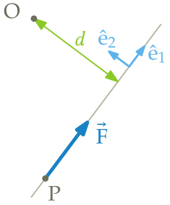
Momento de uma força com respeito a um polo ou a um eixo

Momento de **uma força** $(\vec{F}, P)$ com respeito a um **polo** O:

- **Vetor** que mede o **binário** produzido quando se **transporta a força** para uma **linha de ação paralela passante por** O (ver figura):

$$\vec{M}_O = (P - O) \wedge \vec{F}$$

- É **nulo** o momento de uma força com respeito a um **polo que pertence à sua linha de ação**.

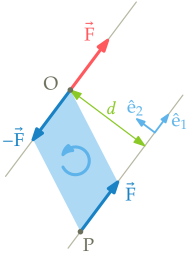


Momento de **uma força** $(\vec{F}, P)$ com respeito a um **eixo** Ou:

- **Escalar** igual à componente do vetor $\vec{M}_O$ sobre o eixo Ou (independe do polo escolhido sobre este eixo):

$$M_{Ou} = \vec{M}_O \cdot \hat{u}$$

- É **nulo** o momento de uma força com respeito a um **eixo coplanar** (paralelo ou concorrente) à sua **linha de ação**.



Equivalência entre sistemas de forças

- Um sistema de **forças concorrentes em um ponto** P **equivale a uma única força** $(\vec{\mathrm{R}}, \mathrm{P})$ aplicada em P.
- Um sistema de **forças paralelas de resultante não-nula equivale a uma única força** $(\vec{\mathrm{R}}, \mathrm{C})$ aplicada no **centro de forças paralelas** (média ponderada, pelas respectivas componentes de força, das posições dos pontos de aplicação de força).
- Um **binário**, sistema de **forças paralelas de resultante nula, não é equivalente a uma única força**.
- Um vetor **momento** é uma **representação matemática completa de um binário** e de **toda a classe de binários** a ele **equivalentes**.
- Dois sistemas de forças modeladas como **vetores deslizantes** são **equivalentes** se, e somente se, suas resultantes de força $\vec{\mathrm{R}}$ e de momentos $\vec{\mathrm{M}}_\mathrm{O}$ são idênticas, qualquer seja o polo O escolhido:

$$\vec{\mathrm{R}} = \sum_{k=1}^{n} \vec{\mathrm{F}}_k \quad \text{e} \quad \vec{\mathrm{M}}_\mathrm{O} = \sum_{k=1}^{n} (\mathrm{P}_i - \mathrm{O}) \wedge \vec{\mathrm{F}}_i$$

Mudança de polo e invariante escalar do sistema de forças

- Seja um sistema de forças modeladas como vetores deslizantes **não equivalente a um binário**, ou seja, com $\vec{R} \neq \vec{0}$.
- Neste caso, a **resultante de momentos do sistema dependerá da particular escolha de polo**, conforme descrito pela equação:

$$\vec{M}_B = \vec{M}_A + (A - B) \wedge \vec{R}$$

- O produto escalar entre os vetores resultantes de força e de momento **independe do polo escolhido**. De fato:

$$I = \vec{M}_B \cdot \vec{R} = \vec{M}_A \cdot \vec{R} + (A - B) \wedge \vec{R} \cdot \vec{R} = \vec{M}_A \cdot \vec{R}$$

  Dessa forma, o valor de $I = \vec{M}_O \cdot \vec{R}$ (o mesmo para qualquer polo O escolhido) representa o **invariante escalar** do sistema de forças.
- Em outras palavras, a transformação matemática de **mudança de polo** tem como característica **preservar o valor de $I = \vec{M}_O \cdot \vec{R}$**.

Decomposição de um vetor em componentes ortogonais

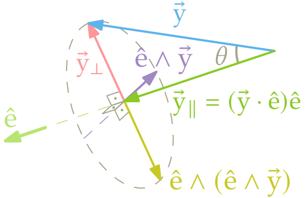
Teorema

Dados dois vetores não-nulos $\vec{x}$ e $\vec{y}$, sempre será possível realizar a decomposição $\vec{y} = \vec{y}_{\parallel} + \vec{y}_{\perp}$, com a parcela $\vec{y}_{\parallel}$ sendo paralela a $\vec{x}$ e a parcela $\vec{y}_{\perp}$ sendo ortogonal a $\vec{x}$. Em particular:

$$\vec{y}_{\parallel} = \frac{\vec{y} \cdot \vec{x}}{|\vec{x}|^2}\vec{x} \qquad \vec{y}_{\perp} = -\frac{\vec{x} \wedge (\vec{x} \wedge \vec{y})}{|\vec{x}|^2}$$

A figura ao lado ilustra o resultado do teorema considerando um versor $\hat{e}$ e um vetor $\vec{y}$. Para o caso de dois vetores não-nulos genéricos $\vec{x}$ e $\vec{y}$, basta tomar:

$$\hat{e} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$$



Momento mínimo

- A componente do vetor $\vec{M}_O$ sobre a direção de $\vec{R}$ independe do polo escolhido:

$$\vec{M}_{O\parallel} = \frac{\vec{M}_O \cdot \vec{R}}{|\vec{R}|^2}\,\vec{R} = \frac{I}{|\vec{R}|^2}\,\vec{R}$$

  Portanto, a transformação de **mudança de polo afeta** exclusivamente a **componente do momento resultante** que é **ortogonal a $\vec{R}$**.

- Notando que $\vec{M}_{O\parallel}$ e $\vec{M}_{O\perp}$ são **componentes ortogonais** de $\vec{M}_O$:

$$|\vec{M}_O| = \sqrt{|\vec{M}_{O\parallel}|^2 + |\vec{M}_{O\perp}|^2} = \sqrt{\frac{I^2}{|\vec{R}|^2} + |\vec{M}_{O\perp}|^2} \geq \frac{|I|}{|\vec{R}|}$$

- Pode-se buscar um polo E para o qual o momento resultante seja **mínimo** (em módulo):

$$\vec{M}_E = \vec{M}_{E\parallel} = \frac{I}{|\vec{R}|^2}\,\vec{R} \quad \Rightarrow \quad \vec{M}_{E\perp} = \vec{0}$$

Eixo central

- O mesmo momento mínimo será medido se o polo E' escolhido estiver em uma reta passante por E e que tenha a direção de $\vec{\mathrm{R}}$ uma vez que, neste caso, $(\mathrm{E} - \mathrm{E}') \parallel \vec{\mathrm{R}}$ e:

$$\vec{\mathrm{M}}_{\mathrm{E}'} = \vec{\mathrm{M}}_{\mathrm{E}} + (\mathrm{E} - \mathrm{E}') \wedge \vec{\mathrm{R}} = \vec{\mathrm{M}}_{\mathrm{E}}$$

- Tal reta é denominada **eixo central** do sistema de forças e representa o **lugar geométrico dos polos** com respeito aos quais o **momento resultante** deste sistema é **mínimo**.
- Aplicando a expressão da mudança de polo entre O e E, o primeiro sendo o polo com relação ao qual medimos $\vec{\mathrm{M}}_{\mathrm{O}}$ e o segundo um ponto do eixo central:

$$\vec{\mathrm{M}}_{\mathrm{O}} = \vec{\mathrm{M}}_{\mathrm{E}} + (\mathrm{E} - \mathrm{O}) \wedge \vec{\mathrm{R}} = \frac{I}{|\vec{\mathrm{R}}|^2}\vec{\mathrm{R}} - \vec{\mathrm{R}} \wedge (\mathrm{E} - \mathrm{O})$$

$$\Rightarrow \vec{\mathrm{R}} \wedge \vec{\mathrm{M}}_{\mathrm{O}} = \frac{I}{|\vec{\mathrm{R}}|^2}\vec{\mathrm{R}} \wedge \vec{\mathrm{R}} - \vec{\mathrm{R}} \wedge \left(\vec{\mathrm{R}} \wedge (\mathrm{E} - \mathrm{O})\right) = -\vec{\mathrm{R}} \wedge \left(\vec{\mathrm{R}} \wedge (\mathrm{E} - \mathrm{O})\right)$$

Eixo central

- Pode-se decompor $(\mathrm{E}-\mathrm{O}) = (\mathrm{E}-\mathrm{O})_{\parallel} + (\mathrm{E}-\mathrm{O})_{\perp}$, em que a primeira parcela é paralela a $\vec{\mathrm{R}}$ e a segunda é ortogonal a $\vec{\mathrm{R}}$:

$$(\mathrm{E}-\mathrm{O}) = \lambda\vec{\mathrm{R}} - \frac{\vec{\mathrm{R}} \wedge \left(\vec{\mathrm{R}} \wedge (\mathrm{E}-\mathrm{O})\right)}{|\vec{\mathrm{R}}|^2}$$

$$(\mathrm{E}-\mathrm{O}) = \lambda\vec{\mathrm{R}} + \frac{\vec{\mathrm{R}} \wedge \vec{\mathrm{M}}_{\mathrm{O}}}{|\vec{\mathrm{R}}|^2} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\mathrm{E} = \mathrm{O} + \frac{\vec{\mathrm{R}} \wedge \vec{\mathrm{M}}_{\mathrm{O}}}{|\vec{\mathrm{R}}|^2} + \lambda\vec{\mathrm{R}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}}$$

- Se λ puder assumir **qualquer valor real**, esta equação descreverá uma **reta** que tem a direção de $\vec{\mathrm{R}}$; em outras, palavras, esta é a **equação do eixo central do sistema de forças**.
- Em particular, se $I = 0$, o eixo central é o lugar geométrico dos polos com respeito aos quais o momento é nulo.

Redução de sistemas de forças

Classe I: $\vec{R} = \vec{0}$ e $\vec{M}_O = \vec{0}$

O sistema é **equivalente a zero** (equivale à aplicação de nenhum esforço).

Classe II: $\vec{R} = \vec{0}$ e $\vec{M}_O \neq \vec{0}$

O sistema é **equivalente a um binário**.

Classe III: $\vec{R} \neq \vec{0}$ e $I = 0$

O sistema é **equivalente a uma única força**, cuja linha de ação é o eixo central do sistema.

Classe IV: $\vec{R} \neq \vec{0}$ e $I \neq 0$

O sistema é **equivalente a duas forças** ou **a uma força e um binário**, sendo este último mínimo se o polo escolhido estiver sobre o eixo central.

Sistemas redutíveis a uma única força: $\vec{\mathrm{R}} \neq \vec{0}$ e $I = 0$

Dois casos notáveis discutidos anteriormente são sistemas de Classe III que podem ser reinterpretados à luz do conceito de eixo central:

- Em um **sistema de forças concorrentes** em P, o eixo central é a reta que tem a direção de $\vec{\mathrm{R}}$ e passa pelo ponto P.
- Em um **sistema de forças paralelas de** $\vec{\mathrm{R}} \neq \vec{0}$, o eixo central é a reta que tem a direção de $\vec{\mathrm{R}}$ e passa pelo **centro de forças paralelas** C.

Outro caso típico da Classe III são **sistemas de forças coplanares de resultantes não-nulas**. Considerando uma base ortonormal $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{\mathrm{k}})$, com $\hat{\mathrm{k}}$ normal ao plano em questão, e um polo O sobre este plano:

$$\vec{\mathrm{R}} = \sum_{k=1}^{n} \vec{\mathrm{F}}_k = \left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)\hat{\imath} + \left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right)\hat{\jmath}$$

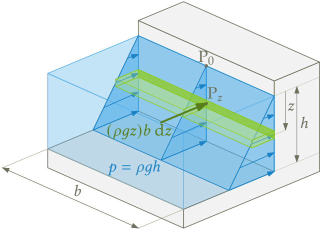
$$\vec{\mathrm{M}}_{\mathrm{O}} = \sum_{k=1}^{n}(x_k\hat{\imath} + y_k\hat{\jmath}) \wedge (X_k\hat{\imath} + Y_k\hat{\jmath}) = \left[\sum_{k=1}^{n}(x_k Y_k - y_k X_k)\right]\hat{\mathrm{k}}$$

Notando que os vetores $\vec{\mathrm{R}}$ e $\vec{\mathrm{M}}_{\mathrm{O}}$ são ortogonais entre si: $I = \vec{\mathrm{R}} \cdot \vec{\mathrm{M}}_{\mathrm{O}} = 0$.

Sistemas de forças distribuídas paralelas

Um **sistema de forças distribuídas paralelas** $\mathcal{F}$ de **resultante não-nula** é equivalente a uma única força de vetor igual à resultante e aplicada no respectivo **centro de forças paralelas**:

$$\mathcal{F} \sim \{(R\hat{\mathrm{u}}, \mathrm{C})\} \quad \Leftrightarrow \quad R = \int_{\mathcal{F}} \mathrm{d}F \neq \vec{0} \quad \text{e} \quad (\mathrm{C} - \mathrm{O}) = \frac{1}{R} \int_{\mathcal{F}} (\mathrm{P} - \mathrm{O})\, \mathrm{d}F$$



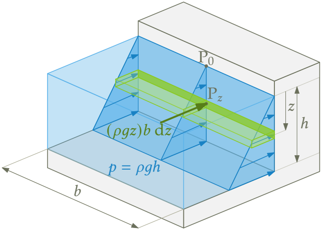
Campo de pressões hidrostáticas sobre uma superfície

Definindo a coordenada z, descendente, com origem na superfície livre, o campo de pressões é descrito pela **lei de Stevin**:

$$p = \rho g z$$

Força resultante $(\mathrm{d}F\hat{\imath}, \mathrm{P}_z)$ sobre uma superfície retangular $b \times \mathrm{d}z$, localizada no entorno da profundidade profundidade z, com $\mathrm{d}F = (\rho g z) b\, \mathrm{d}z$ e $(\mathrm{P}_z - \mathrm{P}_0) = z\hat{\mathrm{k}}$.

Para o campo completo:



$$R = \int_0^h (\rho g z) b\, \mathrm{d}z = \rho g b \left.\frac{z^2}{2}\right|_0^h = \frac{1}{2}\rho g h^2 b$$

$$R(\mathrm{C} - \mathrm{P}_0) = \int_0^h (z\hat{\mathrm{k}})(\rho g z) b\, \mathrm{d}z = \rho g b \left.\frac{z^3}{3}\right|_0^h \hat{\mathrm{k}} = \frac{1}{3}\rho g h^3 b\hat{\mathrm{k}} \Rightarrow (\mathrm{C} - \mathrm{P}_0) = \frac{2}{3}h\hat{\mathrm{k}}$$

Perguntas?

reorsino@usp.br