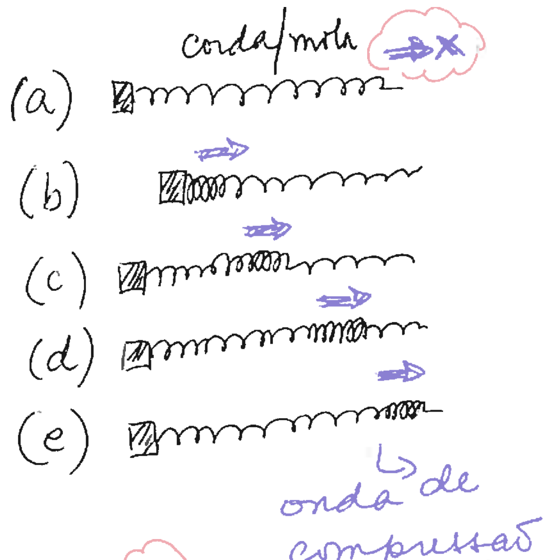
# ONDAS

**Onda**: qquer sinal que se transmite de um ponto a outro de um meio com velocidade definida. A transmissão ocorre entre os dois pontos, sem transporte direto de matéria.

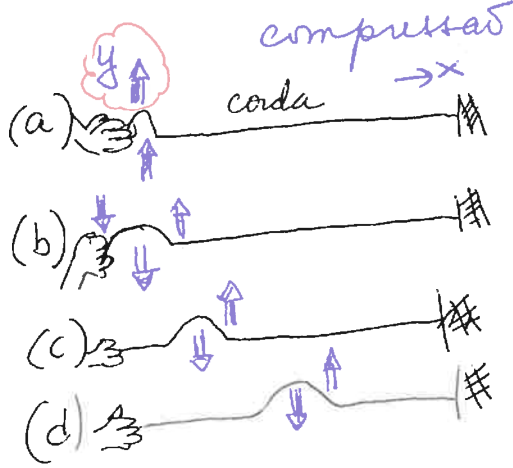
Para cima e para baixo, para frente e para trás, permanecendo em média na mesma posição.

Forma de onda (ou crista) que se propaga.




**onda longitudinal**

A perturbação transmitida pela onda ocorre ao longo da direção de propagação da onda. (Ondas sonoras)




**onda transversal**

A perturbação é um deslocamento na direção y, perpendicular à direção de propagação da onda.

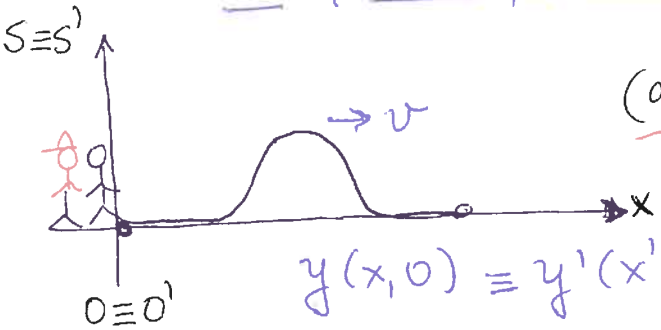
## Ondas em 1 dimensão

(a) Ondas progressivas

O perfil da onda num dado instante t é a forma da onda nesse instante e pode ser dada por uma função.

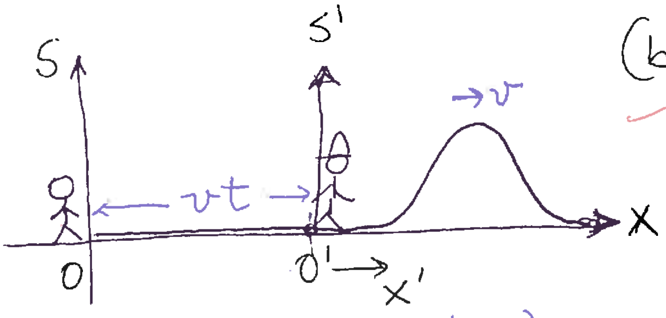
# Função do perfil $y(x,t)$

(a) $t=0$




$y(x,0) \equiv y'(x',0)$

(b) $t>0$




$y(x,t)$ $\quad$ $y'(x',t)$

A onda progressiva se desloca para a direita com velocidade $v$, sem mudar a forma.

Oxy e O'x'y' são referenciais inerciais

No referencial O'x'y' o perfil da onda não muda no tempo.

$$y'(x',t) = y'(x',0) = f(x')$$

* A relação entre os dois referenciais:

$$x' = x - vt$$

* No referencial original: $\underbrace{y(x,t) = f(x-vt)}$

descreve uma onda caminhante que se propaga para a direita com velocidade $v$.

* Por exemplo: $\cos(kx') = \cos[k(x-vt)] \neq \cos(kx)\cdot\cos(kvt)$

$y$ é uma função das variáveis $x$ e $t$ através de $x' = x - vt$

* Outra consequência:

$$y(x,t) = y(x+\Delta x, t+\Delta t) \text{ para } \Delta x = v\Delta t$$

* O perfil da onda no instante $(t+\Delta t)$ é o perfil no instante $t$ deslocado de uma distância $\Delta x = v\Delta t$ para a direita.

* Onda que se propaga para a esquerda


$$y(x,t) = g(x+vt) = g(x'')$$

$$x'' = x + vt$$

$$v \to (-v)$$

* Corda: Há a reflexão na extremidade ⟹ ondas nos 2 sentidos.

$$y(x,t) = f(x-vt) + g(x+vt)$$

(b) Ondas harmônicas

* A perturbação num dado ponto $x$ corresponde ao MHS. O perfil é uma função senoidal.

$$f(x') = A\cos(kx' + \delta)$$

$$\therefore \quad y(x,t) = A\cos[k(x-vt) + \delta]$$

$$y(x,t) = A\cos(kx - \underbrace{kvt}_{\omega} + \delta)$$

$$\omega = 2\pi f$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$f = \frac{1}{T}$$

$\omega \equiv$ frequência angular de oscilação

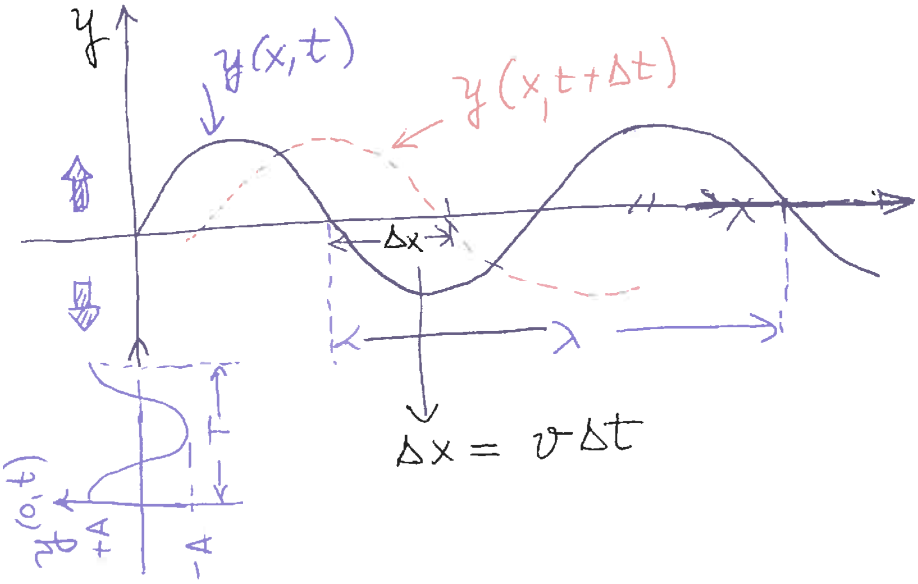
$f \equiv$ frequência

$T \equiv$ período

$$\boxed{\omega = k v} \quad (1)$$

$$y(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \delta)$$

pode ser $\varphi$ (fase)




Período espacial

$$\boxed{\lambda = v T} \quad (2)$$

* Vamos encontrar uma relação entre $\lambda$ e $k$:

(1) $v = \dfrac{\omega}{k}$

(2) $\lambda = vT = \dfrac{\omega}{k} T = \dfrac{1}{k} \cdot \left(\dfrac{2\pi}{T}\right) \cdot T$

$$\therefore \boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k}}$$

$\lambda \equiv$ comprimento de onda

$k \equiv$ número de onda (angular) (vetor de onda)

$$y(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \delta)$$

* O argumento do cosseno $\varphi(x,t)$

$$\varphi(x,t) = kx - \omega t + \delta \equiv \text{fase da onda}$$

$\delta$ (ou $\varphi$) $\equiv$ constante de fase (independe de $x$ e $t$)

$A \equiv$ amplitude da onda

* Unidades $[\varphi(x,t)] \equiv rad$

$[\lambda] = m$

$[k] = rad/m \; (m^{-1})$

$[\omega] = rad/s \; (s^{-1})$

* Deslocamento de um ponto no tempo com fase constante:

$$\varphi(x,t) = \varphi_0 \equiv \text{constante}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = k\frac{dx}{dt} - \omega = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = v$$

$$\boxed{\omega = kv}$$

ou

$$v = \frac{2\pi f}{2\pi/\lambda} = \lambda f = \frac{\lambda}{T}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = vT}$$

* Um ponto onde a fase é constante $\Rightarrow$ máximo por exemplo, crista da onda

$\Rightarrow$ desloca-se com velocidade $v$ da onda.

$v \equiv$ velocidade de fase

* Outra forma de representar uma onda harmônica (monocromática)

$$y(x,t) = \mathrm{Re}\left[ A\, e^{i(kx - \omega t + \varphi)} \right]$$

$\delta$

(c) Equação de onda

$$y(x,t) = f(x') \quad ; \quad x' = x - vt$$

equação de movimento $\Rightarrow$ aceleração $a$ de um ponto $x$

* A velocidade $v$ e a aceleração $a$ $\Rightarrow$ são derivadas no tempo (parciais)

$$\text{Velocidade} = \frac{\partial}{\partial t} y(x,t)$$

$$\text{aceleração} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x,t)$$

* $\underset{\sim}{y}$ depende de $\underline{t}$ através de $x' = x - vt$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{df}{dx'}\frac{\partial x'}{\partial t} = \frac{df}{dx'}(-v) \\ &\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -v\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{df}{dx'}\right) = -v\frac{d}{dx'}\left(\frac{df}{dx'}\right)\underbrace{\left(\frac{\partial x'}{\partial t}\right)}_{-v} \\ &\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2\frac{d^2 f}{dx'^2} \longleftarrow A \end{aligned}\right.$$

$f$ é função de $x'$
$x'$ é função de $t$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{df}{dx'}\underbrace{\frac{\partial x'}{\partial x}}_{1} = \frac{df}{dx'} \\ &\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{dx'^2}\underbrace{\frac{\partial x'}{\partial x}}_{1} = \frac{d^2 f}{dx'^2} \end{aligned}\right.$$

Portanto:

A $\quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

$$\boxed{\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0}$$

equação de ondas unidimensional
(derivadas parciais)
(linear de 2ª ordem)

* Onda se propaga para a esquerda

* Sendo $y(x,t) = g(x'')$ ; $x' = x + vt$

mesma equação acima : $v \to -v$
$x' \to x''$

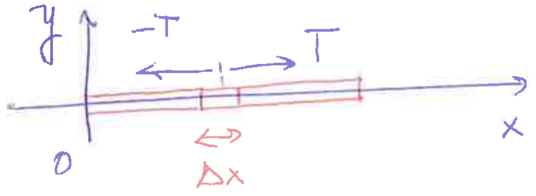
---

Equação das Cordas Vibrantes

# Equação das Cordas Vibrantes

## * Equação de Movimento

Vibrações transversais numa corda distendida
(instrumentos de corda → violão)

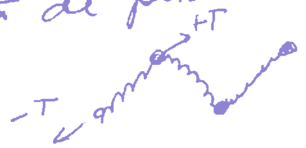



corda em equilíbrio horizontal
tensão $T$ de equilíbrio
$\mu \equiv$ densidade de massa linear (uniforme / homogênea) $\Big\}$ $\Delta m = \mu \Delta x$, $M = \mu L$

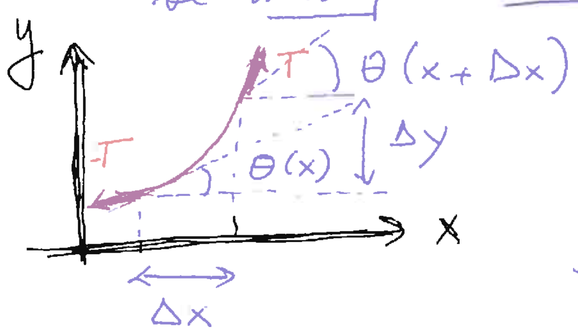
* Deslocamento transversal genérico seria no plano $yz$, mas vamos analisar um caso particular ⇒ deslocamento no plano $Oxy$

* Deslocamento de um ponto $x \Rightarrow y(x,t)$

* Pequenos deslocamentos da posição de equilíbrio (conjunto de pontos ligados por molas) ≡ pequenas oscilações




(a) Despreza-se a variação do comprimento da corda
(b) A magnitude da tensão $T$ permanece igual, só se modifica a direção da tensão.




$$T \operatorname{sen}\theta \simeq T \operatorname{tg}\theta = T \underbrace{\frac{\partial y}{\partial x}}_{\text{parcial porque depende de } x \text{ e } t}$$

* Força vertical resultante sobre o elemento $\Delta x$ da corda:

$$T\frac{\partial y}{\partial x}(x+\Delta x,t) - T\frac{\partial y}{\partial x}(x,t) = T\cdot\Delta x \underbrace{\left[\frac{\frac{\partial y}{\partial x}(x+\Delta x,t)-\frac{\partial y}{\partial x}(x,t)}{\Delta x}\right]}$$

para $\Delta x$ infinitesimal $\Leftarrow \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

* Portanto, como $\{F = ma\}$:

$$T\cdot\Delta x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \Delta m\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \Rightarrow \text{2ª lei de Newton}$$

massa

aceleração

$$T\cdot\cancel{\Delta x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \mu\cancel{\Delta x}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

Vimos: Equação de ondas unidimensional:

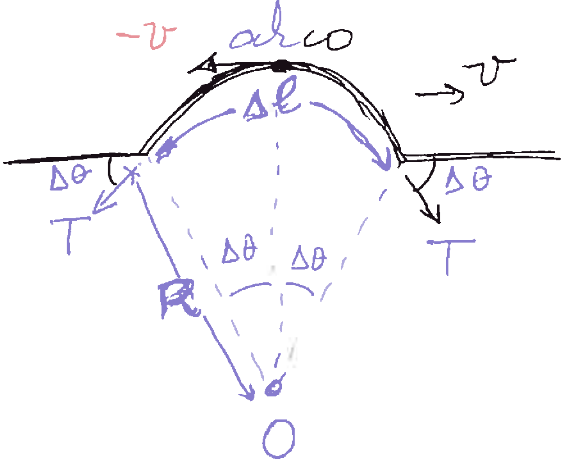
$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

* Portanto, $\dfrac{\mu}{T} = \dfrac{1}{v^2} \Rightarrow v = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}} \equiv$ velocidade de propagação

* Equação desenvolvida por Euler e D'Alembert ~1752

* A velocidade da onda é maior para tensão maior e inércia menor $\left\{\begin{array}{l}\mu = 10\,g/m\\ T = 100\,N\end{array}\right. \Rightarrow v = 100\,m/s$

* Outra forma de obter a velocidade da onda:




Pequeno pulso $\Rightarrow$ $2\Delta\theta \ll 1$
movendo para a direita com $v$
No referencial do pulso, cada ponto se move para a esquerda com $-v$.

* Força resultante sobre o elemento $\underbrace{\Delta\ell}_{\text{arco}} = 2R\Delta\theta = \underbrace{R}_{\text{raio}}(\underbrace{2\Delta\theta}_{\text{ângulo}})$

$$\underbrace{T\,\text{sen}(\Delta\theta) + T\,\text{sen}(\Delta\theta)} \approx 2T\Delta\theta = \cancel{2}T\left(\frac{\Delta\ell}{\cancel{2}R}\right)$$

* Força resultante no referencial da corda $\Rightarrow$ $F_R = \dfrac{T\Delta\ell}{\cancel{R}} = F_{\text{centrípeta}} = \dfrac{\Delta m v^2}{\cancel{R}}$

Só o elemento $\Delta\ell$ descreve um MCU

* Assim $\Rightarrow$ $T\cancel{\Delta\ell} = \Delta m v^2 = \mu \cancel{\Delta\ell} v^2 \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}}$

* Para obter a solução geral é necessário fornecer as condições iniciais $y(x,0)$ e $\dfrac{\partial y}{\partial t}(x,0)$ em $t=0$

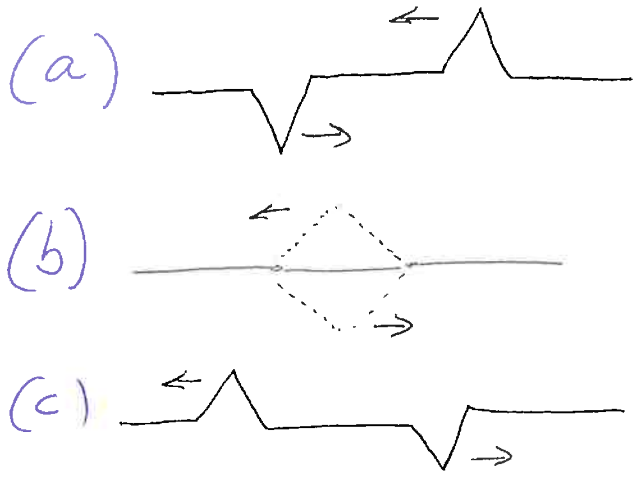
$$y(x,t) = \underbrace{f(x-vt) + g(x+vt)}$$

Superposição de ondas progressivas propagando-se nos 2 sentidos.

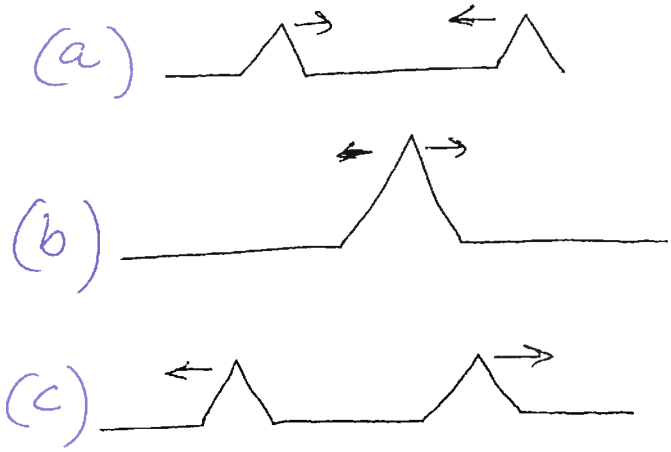
## * Princípio da Superposição

$y_1(x,t)$ e $y_2(x,t)$ são soluções $\Rightarrow$ $\underline{y(x,t) = a\,y_1(x,t) + b\,y_2(x,t)}$

Qualquer combinação linear de soluções é solução também



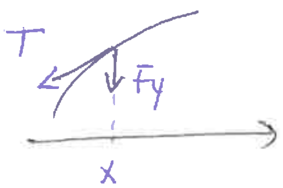

interferência destrutiva




interferência construtiva

## * Intensidade de uma onda.

Onda progressiva transporta energia




$$F_y = -T\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \Rightarrow \text{provoca deslocamento}$$

$$\underbrace{\text{Potência instantânea}}_{\substack{\text{energia transmitida}\\ \text{através de } x \text{ por unidade}\\ \text{de tempo.}}} = \frac{\text{Trabalho realizado}}{\text{unidade de tempo}}$$

$$P(x,t) = F_y\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = -T\frac{\partial y}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)$$

* Para uma onda harmônica

$$y(x,t) = A\cos\underbrace{(kx - \omega t + \delta)}_{\varphi(x,t)}$$

$$y(x,t) = A\cos\varphi(x,t)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -kA\,\text{sen}\,\varphi(x,t)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = +\omega A\,\text{sen}\,\varphi(x,t)$$

$$P(x,t) = \underbrace{\omega k T A^2 \text{sen}^2\varphi(x,t)}_{\text{Oscila com o tempo e com } x}$$

* média sobre um período $\Longrightarrow$ Intensidade $I$ da onda

$$I = \overline{P} = \omega k T A^2 \underbrace{\overline{\text{sen}^2(kx - \omega t + \delta)}}_{1/2}$$

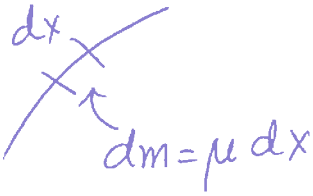
$$T = \mu v^2$$
$$v = \frac{\omega}{k} \quad \Rightarrow \quad T = \mu\frac{\omega^2}{k^2} \quad \Rightarrow$$

$$I = \frac{1}{2}\omega \cancel{k}\mu\frac{\omega^2}{k^{\cancel{2}}}A^2 = \frac{1}{2}\mu A^2\underbrace{\left(\frac{\omega}{k}\right)}_{v}\omega^2$$

$$\underbrace{I = \overline{P} = \frac{1}{2}\mu v \omega^2 A^2}$$

intensidade da onda é proporcional ao quadrado da amplitude, à velocidade e ao quadrado da frequência angular

* Fluxo médio de energia através de um ponto qualquer da corda:




$$dT = \frac{1}{2}\,\underbrace{dm}_{\mu dx}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}\,\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)dx$$

$$\underbrace{\frac{dT}{dx} = \frac{1}{2}\,\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2}_{\text{densidade linear de energia cinética}}$$

* Valor médio

$$\overline{\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2} = \omega^2 A^2 \underbrace{\overline{\operatorname{sen}^2(kx-\omega t+\delta)}}_{1/2}$$

$$\overline{\frac{dT}{dx}} = \frac{1}{2}\,\mu\left(\frac{\omega^2 A^2}{2}\right) = \frac{1}{4}\,\mu\omega^2 A^2$$

* O elemento dx executa um MHS na direção y ⇒

energia potencial média = energia cinética média

$$\frac{d\overline{U}}{dx} = \frac{1}{4}\,\mu\omega^2 A^2 \Rightarrow \text{energia potencial média}$$

* Densidade média de energia total da onda

$$\frac{d\overline{E}}{dx} = \frac{d\overline{T}}{dx} + \frac{d\overline{U}}{dx} = \frac{1}{2}\,\mu\omega^2 A^2$$

* Valor médio da energia da onda contida no elemento $\Delta x$

$$\Delta \bar{E} = \frac{d\bar{E}}{dx}\,\Delta x = \frac{d\bar{E}}{dx}\,(v\Delta t)$$

* Potência média transportada num intervalo de tempo $\Delta t$:

$$\bar{P} = \frac{\Delta \bar{E}}{\Delta t} = \left(\frac{d\bar{E}}{dx}\right)\frac{(v\,\cancel{\Delta t})}{\cancel{\Delta t}} = v\underbrace{\left(\frac{d\bar{E}}{dx}\right)}_{\frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2}$$

* Como $\bar{P} = I$

$$\text{Intensidade} \equiv \begin{pmatrix}\text{velocidade}\\ \text{da}\\ \text{onda}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{densidade média}\\ \text{de}\\ \text{energia}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{I = \frac{v\mu\omega^2 A^2}{2}}$$

# Interferência de Ondas

* Duas ondas progressivas harmônicas de mesma frequência

## (a) Ondas no mesmo sentido

propagação p/ direita


$$y_1(x,t) = A_1 \cos(kx - \omega t + \delta_1)$$

$$y_2(x,t) = A_2 \cos(kx - \omega t + \delta_2)$$

$$\cos(kx - \omega t + \delta_1) = \cos(\omega t \underbrace{- kx - \delta_1}_{\varphi_1}) = \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$\cos(kx - \omega t + \delta_2) = \cos(\omega t \underbrace{- kx - \delta_2}_{\varphi_2}) = \underbrace{\cos(\omega t + \varphi_2)}_{\text{Superposição de 2 MHS}}$$

$$y(x,t) = y_1 + y_2 = A \cos(kx - \omega t + \delta)$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos \delta_{12}$$

$$\delta_{12} = \underbrace{\delta_2 - \delta_1}_{\text{diferença de fase entre as duas ondas}}$$

$$I \propto A^2 \Rightarrow \underbrace{I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1}\sqrt{I_2} \cos \delta_{12}}$$

I é diferente da soma das intensidades das componentes, mas depende da diferença de fase entre elas.

Prova: fasores ou usar notação complexa (parte real)

$$A_1 e^{i(\omega t + \varphi_1)} \quad e \quad A_2 e^{i(\omega t + \varphi_2)}$$

* Interferência

1) Máxima (interferência construtiva)

$$\delta_{12} = 2m\pi \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \Rightarrow$$

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \Rightarrow I = \left(\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2}\right)^2$$

2) Mínima (interferência destrutiva)

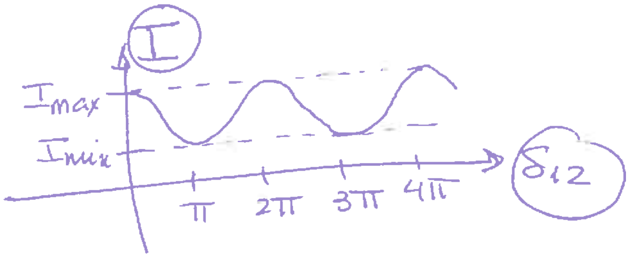
$$\delta_{12} = (2m+1)\pi \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \Rightarrow$$

$$I = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} \Rightarrow I = \left(\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2}\right)^2$$

Para $I_1 = I_2 \Rightarrow I_{máx} = 4I_1 = 4I_2$

$I_{min} = 0$

Para q que $I_1$ e $I_2$




(b) Ondas com sentidos opostos ; ondas estacionárias

$$y_1(x,t) = A\cos(kx - wt)$$
$$y_2(x,t) = A\cos(kx + wt)$$

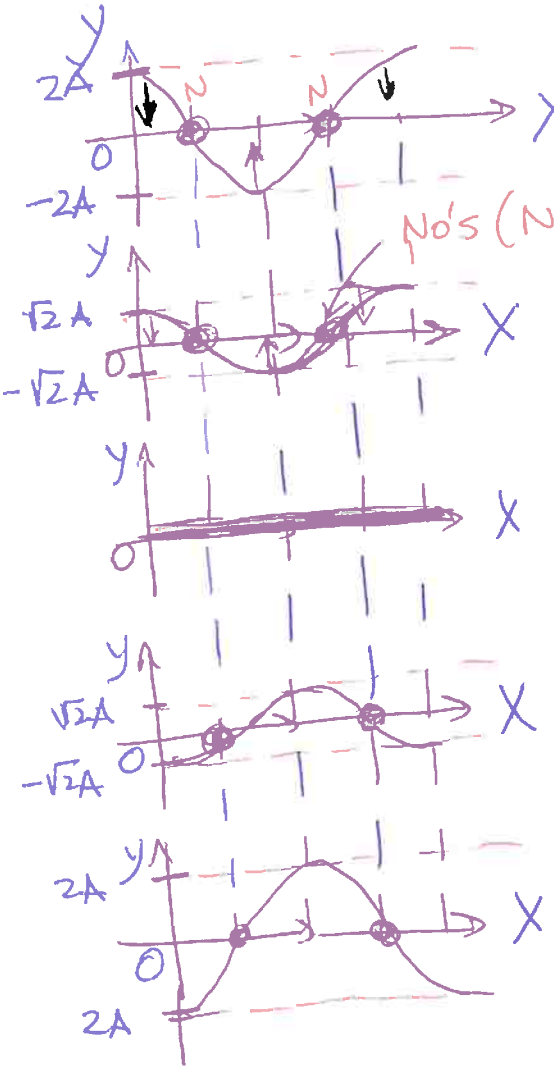
$$\begin{cases} \varphi = 0 \\ A_1 = A_2 = A \end{cases}$$

$$y = y_1 + y_2 = A\left[\underbrace{\cos(kx - wt)}_{\cos kx \cos wt + \cancel{\operatorname{sen} kx \operatorname{sen} wt}} + \underbrace{\cos(kx + wt)}_{\cos kx \cos wt - \cancel{\operatorname{sen} kx \operatorname{sen}(wt)}}\right]$$

$$y = 2A\cos(kx)\cos(wt)$$ ⟵ não há propagação da onda

$\tau = \frac{2\pi}{\omega}$

período




$\boxed{t = 0}$

$\boxed{t = \frac{\tau}{8}}$

$\boxed{t = \frac{\tau}{4}}$

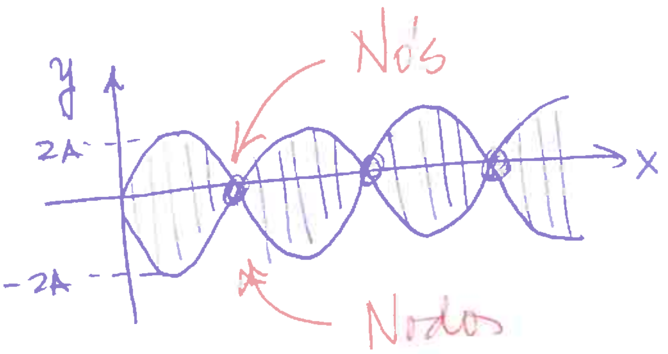
$\boxed{t = \frac{3\tau}{4}}$

$\boxed{t = \frac{\tau}{2}}$

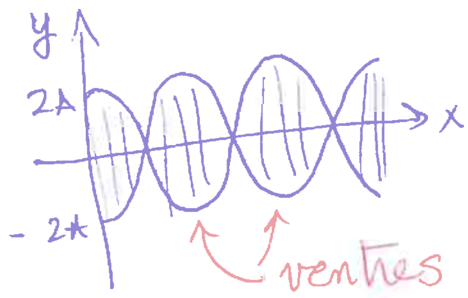
$y = 2A\cos(kx)\cos(\omega t)$

Onda não se propaga $\Rightarrow$ onda estacionária

A forma da corda permanece semelhante, com o deslocamento mudando apenas de amplitude e de sinal




ou




Fotografia de tempo de exposição longo

* As ondas componentes têm fluxo de energia iguais e contrários $\Rightarrow$ fluxo médio de energia $= 0$

## (c) Batimentos; velocidade de grupo

$\omega_1$ e $\omega_2$ próximos $\Rightarrow$ $\omega_1$ um pouco $\neq$ de $\omega_2$

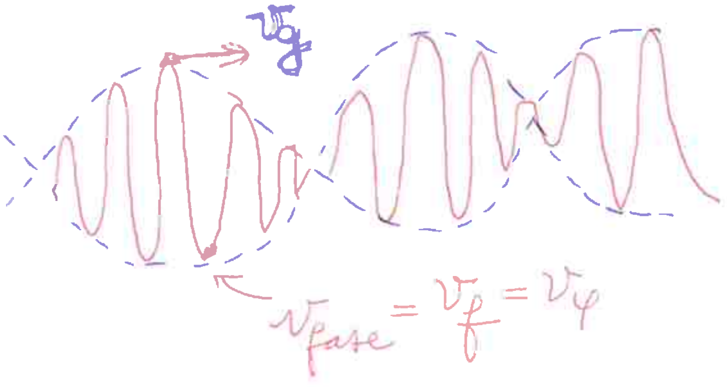
$$\left.\begin{aligned} y_1(x,t) &= A\cos(k_1 x - \omega_1 t) \\ y_2(x,t) &= A\cos(k_2 x - \omega_2 t) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 \ll \tfrac{1}{2}(\omega_1+\omega_2) \\ &\Delta\omega \ll \bar{\omega} \Rightarrow \Delta k \ll \bar{k} \end{aligned}$$

$$y = y_1 + y_2 = a(x,t)\underbrace{\cos(\bar{k}x - \bar{\omega}t)}_{\text{frequência alta}}$$

onde

$$a(x,t) = \underbrace{2A\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right)}_{\text{frequência baixa}}$$

Onda de frequência $\bar{\omega}$ elevada modulada por uma frequência baixa $\Rightarrow$ amplitude é modulada




$v_\varphi = \dfrac{\bar{\omega}}{\bar{k}}$ (velocidade de fase)

$v_g = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta k} \cong \dfrac{d\omega}{dk}$ (velocidade de grupo)

$\Delta k$ pequeno

* Ondas numa corda vibrante homogênea

$$\frac{\omega}{k} = v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = cte \Rightarrow v_g = v_\varphi = v$$

* Quando a velocidade de fase varia com o comprimento de onda $\left( \lambda = \frac{2\pi}{k} \right)$

$$\omega = k\, v_\varphi(k)$$

$$\underbrace{v_g = \frac{d\omega}{dk} = v_\varphi(k) + k \frac{d v_\varphi(k)}{dk} \neq v_\varphi}_{\text{velocidade de grupo} \neq \text{velocidade de fase}}$$

Dispersão

Luz em um meio material
$v_\varphi(\text{vermelho}) \neq v_\varphi(\text{violeta})$

* As ondas individuais dentro da envoltória deslocam-se e podem até "desaparecer".

$v_g$ é a velocidade de propagação de energia

# Reflexão de ondas


$g(x+vt) \Rightarrow$ função que descreve o pulso incidente

$y(x,t) = g(x+vt) \Rightarrow$ perfil da onda antes de atingir a extremidade $\underline{0}$.

Condição de Extremidade Fixa $\Rightarrow x=0$

$y(0,t)=0$ para qualquer instante $t$.

* Solução geral:

$$y(x,t) = \underbrace{f(x-vt)}_{\substack{f=0, \text{ antes que a extremidade} \\ \text{seja atingida}}} + g(x+vt)$$

$y(0,t) = f(-vt) + g(vt) = 0 \Rightarrow f(-vt) = -g(vt)$ para qualquer $t$

$\therefore \quad f(x') = -g(-x')$

Como $x' = x - vt$

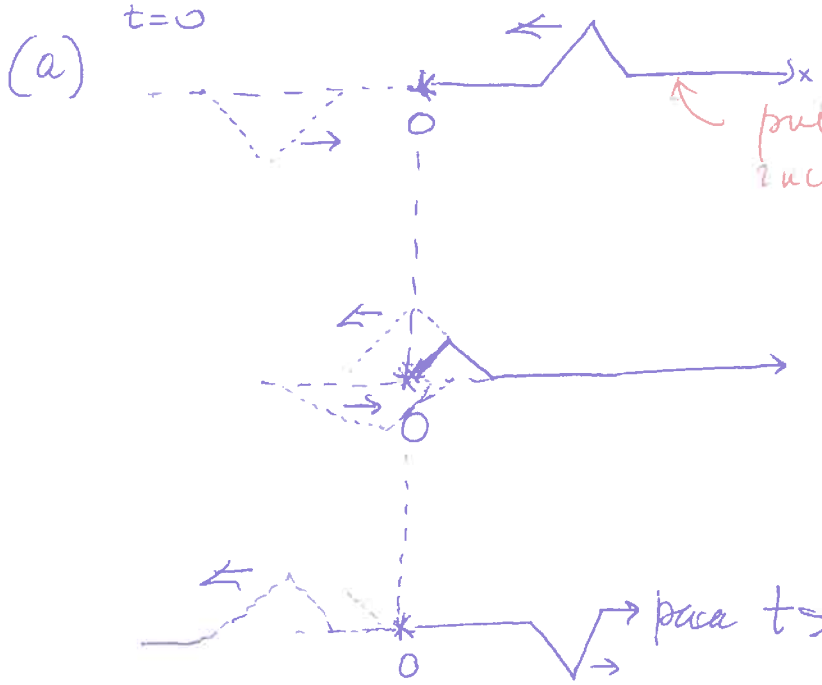
$f(x-vt) = -g(vt-x)$

Solução do problema:

$$y(x,t) = \underbrace{-g(vt-x)}_{} + g(x+vt)$$

só aparece depois que o pulso incidente atinge a extremidade fixa

* Representação gráfica




Prolongamento fictício $(x<0)$

$$f(x') = -g(-x')$$

Corda ilimitada
incidente p/ a esquerda
refletido p/ a direita

$x>0$

para $t>0$, propaga-se apenas o pulso refletido.

* Vemos que o pulso volta invertido após a reflexão.

## Extremidade livre


Se a extremidade é livre não pode haver força transversal sobre a corda na extremidade, só a tensão horizontal

$$F_y(0,t) = -T\frac{\partial y}{\partial x}(0,t) = 0$$

* Solução geral: $y(x,t) = f(x-vt) + \underbrace{g(x+vt)}_{\text{antes de refletir p/ } t \text{ qqu}}$

$$\frac{\partial y}{\partial x}(0,t) = \underbrace{\underbrace{f'(-vt)}_{\text{derivada de } f} + \underbrace{g'(vt)}_{\text{derivada de } g}}_{\text{em relação ao argumento}} = 0$$

$$\therefore \quad f'(-vt) + g'(vt) = 0 \quad (A)$$

$$f'(-vt) = -g'(vt)$$

Função incógnita:

$$f(x') = g(-x') \quad \text{para satisfazer } (A)$$

Substituindo $x'$ por $x - vt$

$$f(x-vt) = g(-x+vt)$$

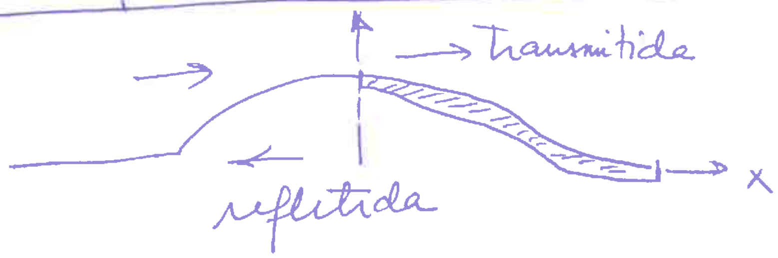
Portanto, na equação geral:

$$y(x,t) = \underbrace{g(vt-x)}_{} + g(vt+x)$$

sinal deste termo invertido quando comparado com a extremidade presa.

* O pulso é refletido sem mudança de fase.

Junção entre 2 cordas




$\mu_1 \neq \mu_2$

* A velocidade de propagação nas duas cordas é diferente.

* Modos normais de vibração

- Corda vibrante de comprimento $\ell$, presa em ambas as extremidades.

Condições de contorno: $y(0,t) = y(\ell,t) = 0$

* Vimos no caso de interferência de ondas, que se elas são refletidas nas extremidades (2 ondas de mesma amplitude e fase) viajando em sentidos opostos, há a formação de uma onda estacionária.

$y_1(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$ e $y_2(x,t) = A\cos(kx + \omega t)$

$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$

$y(x,t) = 2A\cos(kx)\cos(\omega t)$

Mais genericamente $\Rightarrow$ $y(x,t) = \underbrace{A(x)\cos(\omega t + \varphi)}_{\text{Onda estacionária}}$

conjunto de N osciladores acoplados $m = \frac{\mu \ell}{N}$
$N \to \infty$ (corda)

* Equação da Onda

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \left[-\omega^2\cos(\omega t + \varphi)\right] A(x) \quad e \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \left[\frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2}\right]\cos(\omega t + \varphi$$

$$\therefore -\frac{w^2}{v^2} A(x) \underbrace{\cos(wt+\varphi)}_{\neq 0} - \frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2} \underbrace{\cos(wt+\phi)}_{\neq 0} = 0$$

$$\frac{w^2}{v^2} A(x) + \frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2} = 0 \quad \text{com} \quad v = \frac{\lambda}{T} = \frac{2\pi/k}{2\pi/w} = \frac{w}{k}$$

$$\Rightarrow k = \frac{w}{v} \quad \Rightarrow \quad k^2 A(x) + \frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2} = 0$$

Solução geral: $A(x) = a\cos(kx) + b\,\text{sen}(kx)$

Condições de Contorno. $A(0) = A(\ell) = 0$

determina-se a e b

$$A(0) = a\cos(k.0) + b\,\text{sen}(k.0) = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$A(x) = b\,\text{sen}\,kx$$

$$A(\ell) = b\,\text{sen}(k\ell) = 0 \qquad b \neq 0$$

$$k\ell = n\pi \quad (n = 1, 2, 3, ...) \Rightarrow k_n = \frac{n\pi}{\ell}$$

$$\Rightarrow w_n = k_n v = \frac{n\pi}{\ell} v \quad \text{e} \quad \lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2\ell}{n}$$

Modos normais de vibração

$$y_n(x,t) = b_n\,\text{sen}(k_n x)\cos(w_n t + \delta_n)$$

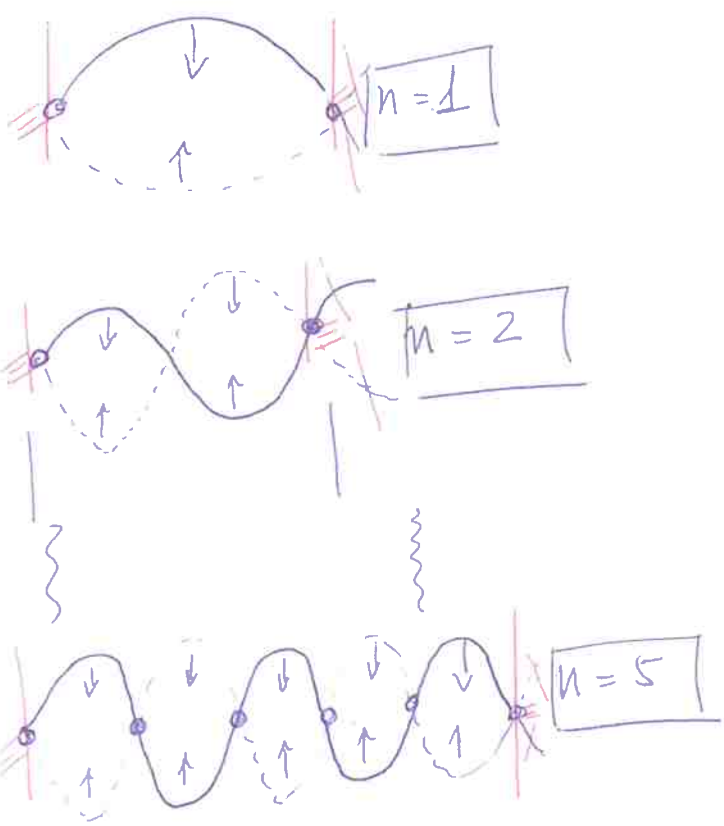
$$y_n(x,t) = b_n\,\text{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\cos\left(\frac{n\pi v t}{\ell} + \delta_n\right) \quad n = 1, 2, 3 \ldots$$

# Frequência do modo n

$$f_n = \nu_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{n\pi v}{\ell}\right) = \underbrace{\frac{n}{2\ell}}_{\frac{1}{\lambda_n}} v \qquad [v = \lambda f]$$

$$\therefore \; f_n = \frac{n}{2\ell}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

$n = 1 \Rightarrow$ frequência fundamental




O movimento geral de uma corda vibrante, presa nos extremos, é uma superposição de modos normais.

Série infinita ⇒ Série de Fourier

n-ésimo harmônico

⇓

Experiência de cordas vibrantes

* Densidade linear dos fios de nylon

| Fio | $\mu$ (mg/m) |
|---|---|
| 0,4 | 150 |
| 0,8 | 564 |

$$f_n = \frac{n}{2\ell}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$