Física II

Lucy V. C. Assali

IFUSP 1º Semestre/2019

Oscilações

$2^{\underline{a}}$ Parte

Movimento Harmônico Amortecido (MHA)

O MHS descreve sistemas ideais, que oscilam indefinidamente sob a ação de forças lineares restauradoras. Na maioria dos sistemas reais, forças dissipativas amortecem o movimento, fazendo com que a energia mecânica do sistema diminua com o tempo. Estes movimentos são ditos amortecidos. A resistência que um fluido (como o ar) oferece ao movimento de um objeto, é proporcional à sua velocidade:

$$\boxed{F_d = -\rho \dot{x} = -\rho v} \Rightarrow \text{força dissipativa que atua em sentido oposto à velocidade}$$

$$\rho \Rightarrow \text{constante de amortecimento} \left(\frac{\text{kg}}{\text{s}}\right)$$

Movimento Harmônico Amortecido (MHA)

A equação de movimento para o sistema massa-mola, com amortecimento, é:

$$m\ddot{x} = -kx - \rho\dot{x} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

$$\Longrightarrow \gamma = \frac{\rho}{m}\left(\frac{1}{\mathrm{s}}\right) \quad \text{e} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Como encontrar a solução desta equação de movimento?

Tentativa $\Rightarrow$ $\boxed{x(t) = \mathrm{e}^{rt}}$

Justificativa $\Rightarrow$ as derivadas de qualquer ordem são proporcionais a e^{rt}

$$\Longrightarrow \boxed{\dot{x}(t) = r\,\mathrm{e}^{rt}} \quad \text{e} \quad \boxed{\ddot{x}(t) = r^2\,\mathrm{e}^{rt}}$$

Lucy V.C. Assali

Movimento Harmônico Amortecido (MHA)

$$r^2\,e^{rt} + \gamma\,r\,e^{rt} + \omega_0^2\,e^{rt} = 0 \implies e^{rt}\underbrace{\left(r^2 + \gamma\,r + \omega_0^2\right)}_{\text{eq. característica}} = 0$$

$$\boxed{r^2 + \gamma\,r + \omega_0^2 = 0} \implies \text{valores de } r \text{ que tormam verdadeira a solução tentativa}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{r = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}}$$

depende da relação entre ω_0 e γ, levando a três diferentes soluções

1. $\gamma/2 < \omega_0 \longrightarrow$ **Amortecimento Subcrítico**
2. $\gamma/2 = \omega_0 \longrightarrow$ **Amortecimento Crítico**
3. $\gamma/2 > \omega_0 \longrightarrow$ **Amortecimento Supercrítico**

Lucy V. C. Assali

MHA: Amortecimento Subcrítico

$$\boxed{\gamma/2 < \omega_0} \longrightarrow r = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{-\left[\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2\right]} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{i^2\left[\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2\right]}$$

$$\text{Soluções: } r_\pm = -\frac{\gamma}{2} \pm i\,\omega \qquad \text{com} \qquad \underbrace{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}}_{\substack{\text{freq. de oscilação} \\ (\neq \text{ freq. própria } \omega_0)}}$$

$$\text{Solução Geral: } x(t) = a\,\mathrm{e}^{\left(-\frac{\gamma}{2}+i\,\omega\right)t} + b\,\mathrm{e}^{\left(-\frac{\gamma}{2}-i\,\omega\right)t} = \mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(a\,\mathrm{e}^{i\,\omega t} + b\,\mathrm{e}^{-i\,\omega t}\right)$$

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}t}\left\{a\left[\cos(\omega t) + i\,\mathrm{sen}\,(\omega t)\right] + b\left[\cos(\omega t) - i\,\mathrm{sen}\,(\omega t)\right]\right\}$$

$$= \mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}t}\left[\underbrace{(a+b)}_{C}\cos(\omega t) + \underbrace{i(a-b)}_{B}\,\mathrm{sen}\,(\omega t)\right]$$

$$\boxed{x(t) = A\,\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega t + \varphi)}$$

A e φ determinados pelas condições iniciais

Lembrete: Fórmula de Euler $\Longrightarrow \mathrm{e}^{\pm ix} = \cos x \pm i\,\mathrm{sen}\,x$

Lucy V. C. Assali

MHA: Amortecimento Subcrítico

$$x(t) = \underbrace{A\,\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}t}}_{A(t)}\cos(\omega t + \varphi)$$

sendo $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - (\frac{\gamma}{2})^2}$

Se $\frac{\gamma}{2} \ll \omega_0$ o amortecimento é fraco e a amplitude varia lentamente com t $\rightarrow$ podemos chamar de período o intervalo $T = \frac{2\pi}{\omega}$

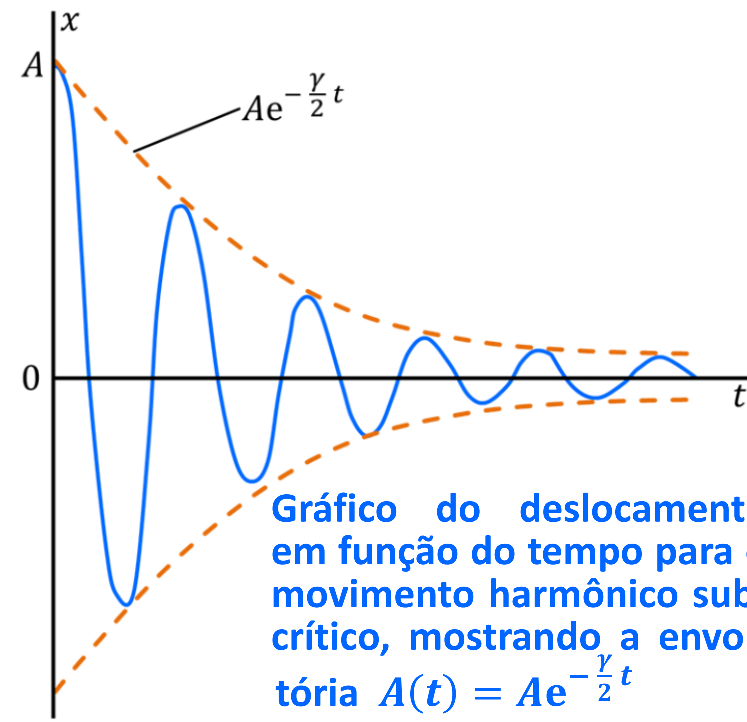

Gráfico do deslocamento em função do tempo para o movimento harmônico subcrítico, mostrando a envoltória $A(t) = A\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}t}$

Lucy V. C. Assali

Balanço de Energia do MHA Subcrítico

$$E(t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x})(\dot{x}) + \frac{1}{2}k(x)(x)$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}m\,(2\,\ddot{x}\,\dot{x}) + \frac{1}{2}k\,(2\,\dot{x}\,x) = m\dot{x}\,\ddot{x} + kx\,\dot{x} = \dot{x}\,\underbrace{(m\ddot{x} + kx)}$$

$= -\rho\dot{x}$ (MHA)

$= 0$ (MHS)

Energia se conserva

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = -\rho\dot{x}^2 = -\gamma m\dot{x}^2 \leq 0}$$

$\Rightarrow$ taxa instantânea de variação (dissipação) da energia mecânica do MHA é proporcional ao quadrado da velocidade instantânea, é nula nos instantes que $v = 0$ e acompanha as oscilações de v^2 durante cada período

Lucy V.C. Assali

Balanço de Energia do MHA Subcrítico

$$\boxed{E(t) = \tfrac{1}{2}\, m\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}\, kx^2 = \tfrac{1}{2}\, m\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}\,(\omega_0^2 m)x^2}$$

$$x(t) = A\,\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\boxed{\Rightarrow x^2(t) = A^2\,\mathrm{e}^{-\gamma t}\cos^2(\omega t + \varphi)}$$

$$\dot{x}(t) = -A\,\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}t}\left[\tfrac{\gamma}{2}\cos(\omega t + \varphi) + \omega\,\mathrm{sen}\,(\omega t + \varphi)\right]$$

$$\boxed{\begin{aligned}\Rightarrow \dot{x}^2(t) = A^2\,\mathrm{e}^{-\gamma t}\Big[\left(\tfrac{\gamma}{2}\right)^2\cos^2(\omega t + \varphi) + \omega^2\,\mathrm{sen}^2\,(\omega t + \varphi) +\\ + 2\left(\tfrac{\gamma\omega}{2}\right)\cos(\omega t + \varphi)\mathrm{sen}\,(\omega t + \varphi)\Big]\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}E(t) = \tfrac{1}{2}\, mA^2\,\mathrm{e}^{-\gamma t}\Big\{\Big[\left(\tfrac{\gamma}{2}\right)^2 + \omega_0^2\Big]\cos^2(\omega t + \varphi) +\\ + \omega^2\,\mathrm{sen}^2\,(\omega t + \varphi) + \tfrac{\gamma\omega}{2}\,\mathrm{sen}\,[2(\omega t + \varphi)]\Big\}\end{aligned}}$$

$\Rightarrow$ vamos analisar a energia média em um ciclo ($T = 2\pi$) e quando $\gamma \ll \omega_0$

Sabemos que, neste caso:

a função $\mathrm{e}^{-\gamma t} \approx$ constante $\Rightarrow$ sua média é $\mathrm{e}^{-\gamma t}$

média do quadrado das funções cosseno e seno valem $1/2$

média das funções cosseno e seno são nulas

Lucy V. C. Assali

Balanço de Energia do MHA Subcrítico

Energia média em um ciclo ($T = 2\pi$) e quando $\gamma \ll \omega_0$ $\Longrightarrow$ $\overline{E}(t) = \frac{1}{2}\, mA^2\, e^{-\gamma t}\omega_0^2 = \overline{E}_0\, e^{-\gamma t}$

com $\overline{E}_0 = \frac{1}{2}\, mA^2\omega_0^2 = \frac{1}{2}kA^2$

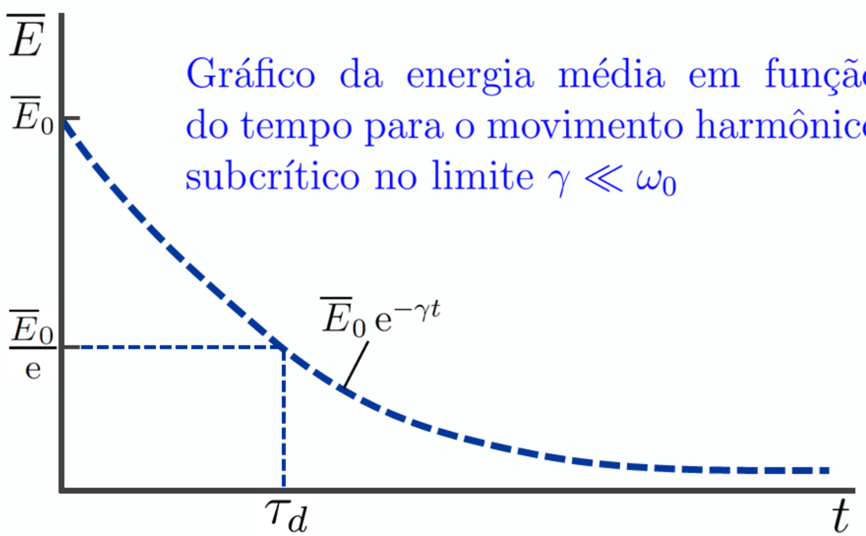

Gráfico da energia média em função do tempo para o movimento harmônico subcrítico no limite $\gamma \ll \omega_0$

$$\frac{d\overline{E}}{dt} = -\gamma\, \overline{E}$$

$\gamma \rightarrow$ taxa de decréscimo relativo da energia média por unidade de tempo

Tempo de decaimento da energia (τ_d)

Tempo necessário para que a energia média caia para o valor $1/e$ de seu valor inicial ($\sim 36\%$ do valor inicial):

$$\frac{\overline{E}(t)}{\overline{E}_0} = e^{-\gamma\tau_d} = \frac{1}{e} = e^{-1} \Rightarrow \tau_d = \frac{1}{\gamma}$$

Lucy V. C. Assali

MHA: Amortecimento Supercrítico

$$\boxed{\gamma/2 > \omega_0} \longrightarrow r = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}$$

Soluções: $r_{\pm} = -\frac{\gamma}{2} \pm \beta \qquad$ com $\qquad \beta = \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2} < \frac{\gamma}{2}$

Solução Geral: $x(t) = a\,\mathrm{e}^{\left(-\frac{\gamma}{2}+\beta\right)t} + b\,\mathrm{e}^{\left(-\frac{\gamma}{2}-\beta\right)t} = \underbrace{\boxed{\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(a\,\mathrm{e}^{\beta t} + b\,\mathrm{e}^{-\beta t}\right)}}$

movimento não é mais oscilatório $\Rightarrow$ o que prevalece é o amortecimento

Decai para zero mais rapidamente do que o outro termo e para tempos grandes é esse o termo que prevalece

Lucy V. C. Assali

MHA: Amortecimento Crítico

$$\boxed{\gamma/2 = \omega_0} \longrightarrow r = -\frac{\gamma}{2}$$

Solução: $r_\pm = -\dfrac{\gamma}{2} \Longrightarrow \boxed{x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}}$

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}t}\underbrace{(a + bt)}$$

Para que este resultado seja compatível com o caso supercrítico no limite de $\beta \longrightarrow 0$

Obs.: Este resultado também é solução da equação $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 = 0$ quando $\frac{\gamma}{2} = \omega_0$ (com $A(t) = a + bt$)

Lucy V.C. Assali

Oscilador Harmônico Amortecimento

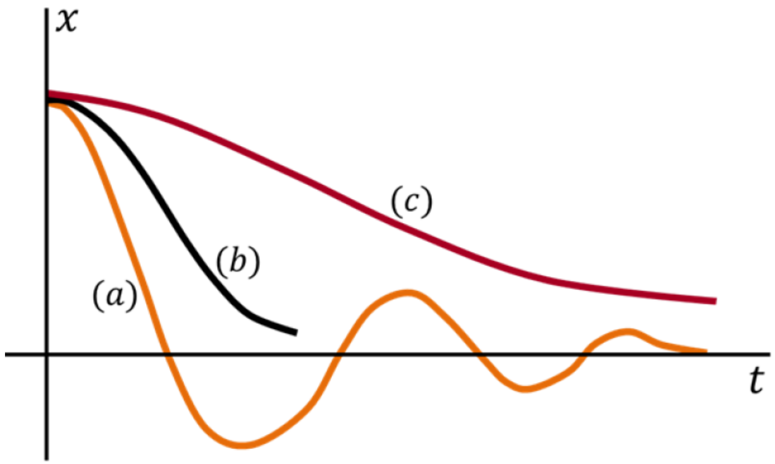

Gráfico do deslocamento em função do tempo para o movimento de um oscilador amortecido nos limites: *(a)* subcrítico; *(b)* crítico e *(c)* supercrítico.

As soluções tendem a zero para $t \longrightarrow \infty$, tornando-se desprezíveis para tempos maiores que τ_d (tempo de decaimento para o limite subcrítico)

Movimento Harmônico Amortecido e Forçado (MHF)

Equação de movimento de um sistema massa-mola que descreve um movimento harmônico amortecido e forçado (MHF):

$$\underbrace{m}_{\text{massa do corpo}}\,\ddot{x}(t)+\underbrace{\rho}_{\text{coeficiente de amortecimento}}\,\dot{x}(t)+\underbrace{k}_{\text{constante elástica da mola}}\,x(t)=\underbrace{F_0\,\cos(\omega t)}_{\text{Força externa oscilatória}}$$

A força externa $F_0\cos(\omega t)$, de frequência ω e amplitude F_0, supre energia continuamente ao sistema de modo que as oscilações devem persistir e, para $t \gg \tau_d$, somente as oscilações forçadas irão sobreviver (regime estacionário)

Lucy V. C. Assali

Movimento Harmônico Amortecido e Forçado (MHF)

Dividindo a equação de movimento pela massa m obtemos:

$$\boxed{\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)}$$

$\Longrightarrow$ $\gamma = \rho/m$ e $\omega_0^2 = k/m$ (frequência natural)

Solução geral $\Longrightarrow$ $\boxed{x(t) = x_p(t) + x_h(t)}$

$x_p \Rightarrow$ **solução particular da equação inomogênea**

$x_h \Rightarrow$ **solução da equação homogênea** $\underbrace{\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$

$x_h \longrightarrow 0$ para

$t \longrightarrow \infty$ $(t \gg \tau_d)$

Como encontrar x_p ?

O desenvolvimento de como descrever um MHF e encontrar x_p encontra-se no capítulo 4 do texto Coletânea de Exercícios

Lucy V.C. Assali

Movimento Harmônico Amortecido e Forçado (MHF)

$$\begin{cases} \text{equação} \Longrightarrow \boxed{\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \dfrac{F_0}{m}\cos(\omega t)} \\[2ex] \text{solução} \Longrightarrow \boxed{x(t) = A\,\cos(\omega\,t + \varphi)} \end{cases}$$

amplitude da força externa

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}} \qquad \varphi = -\text{tg}^{-1}\left[\frac{\gamma\,\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)}\right]$$

frequência própria

frequência da força externa

Lucy V. C. Assali

Movimento Harmônico Amortecido e Forçado (MHF)

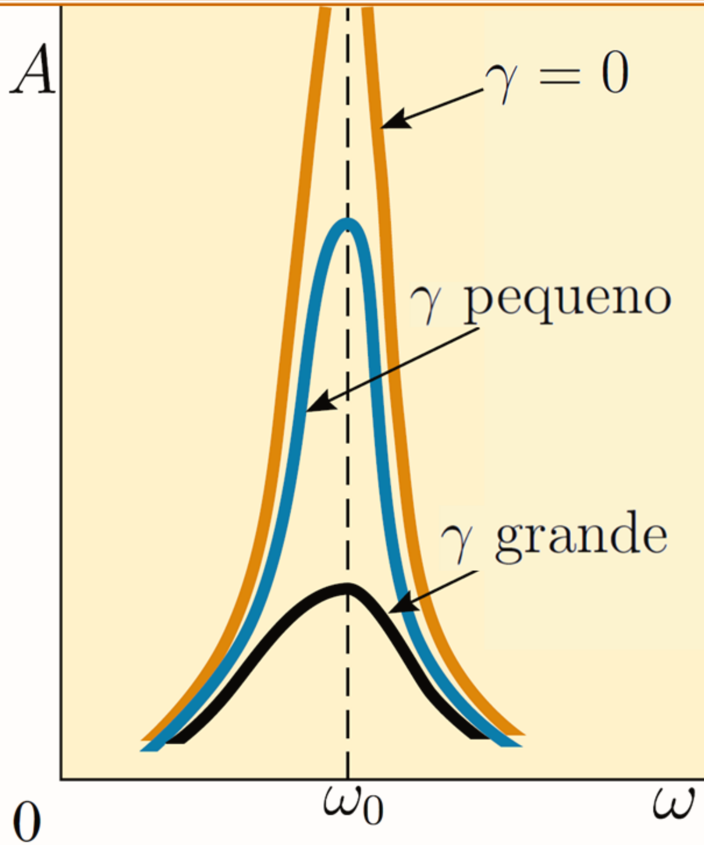

Gráfico da amplitude em função da frequência para um oscilador amortecido quando uma força externa periódica está presente. Quando a frequência da força externa (ω) é igual à frequência própria ou natural (ω_0), ocorre ressonância. A forma da curva de ressonância depende da magnitude do coeficiente de amortecimento γ

Lucy V. C. Assali