Física II
4302112

Lucy V. C. Assali

Escritório: Edifício Alessandro Volta, Bloco C, sala 210
Fone: 3091-7041 e-mail: lassali@if.usp.br

Oscilações

$1^{\underline{a}}$ Parte

Lucy V. C. Assali

Oscilações

Oscilação ⇒ tipo de movimento especial que ocorre quando uma força que atua em um corpo é proporcional ao deslocamento do corpo de sua posição de equilíbrio. Esta força está sempre direcionada para a posição de equilíbrio, causando repetidamente um deslocamento de vai-e-vem do corpo ao redor da posição de equilíbrio. Este movimento é chamado de <u>periódico ou harmônico ou vibração ou movimento de oscilação</u>.

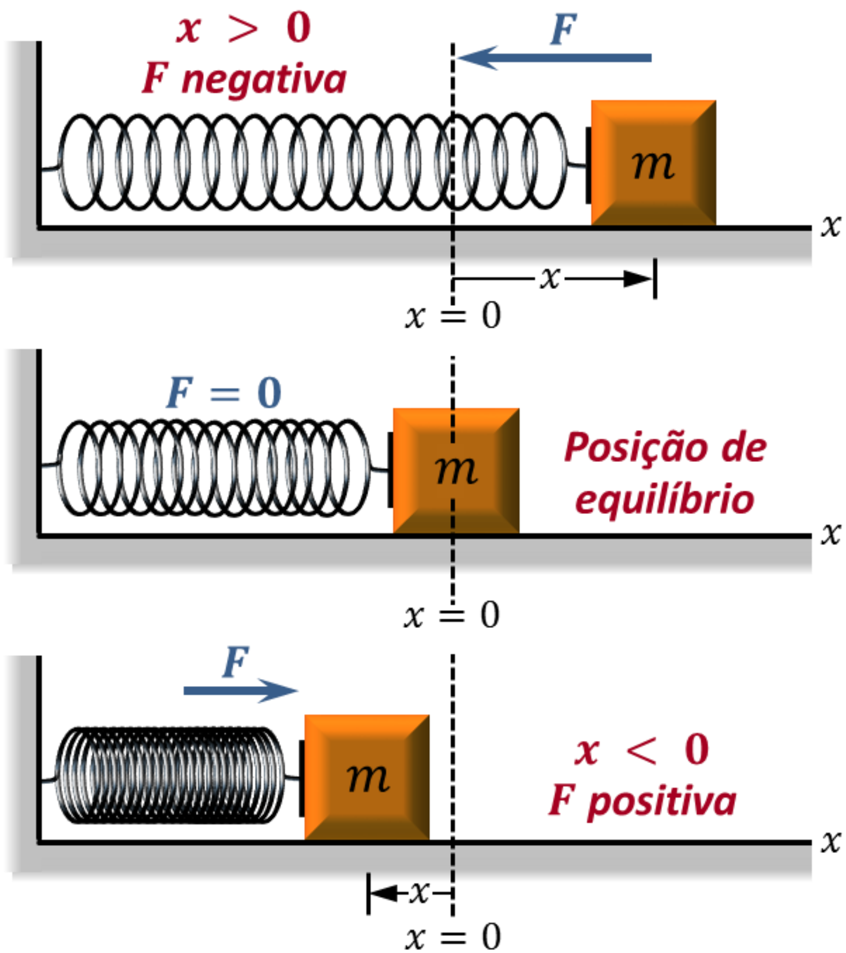
Exemplos ⇒ pêndulos, diapasões, cordas de instrumentos musicais, vibrações dos átomos em moléculas ou cristais, etc.

Sistemas Oscilantes mais simples ⇒ são chamados de <u>Oscilador Harmônico Simples Unidimensional</u> e têm apenas um grau de liberdade (θ ou x)

Lucy V. C. Assali

Movimento Harmônico Simples (MHS)

Sistema massa-mola sem atrito



$$\boxed{F = -kx}$$

Força restauradora

Lucy V. C. Assali

Movimento Harmônico Simples (MHS)

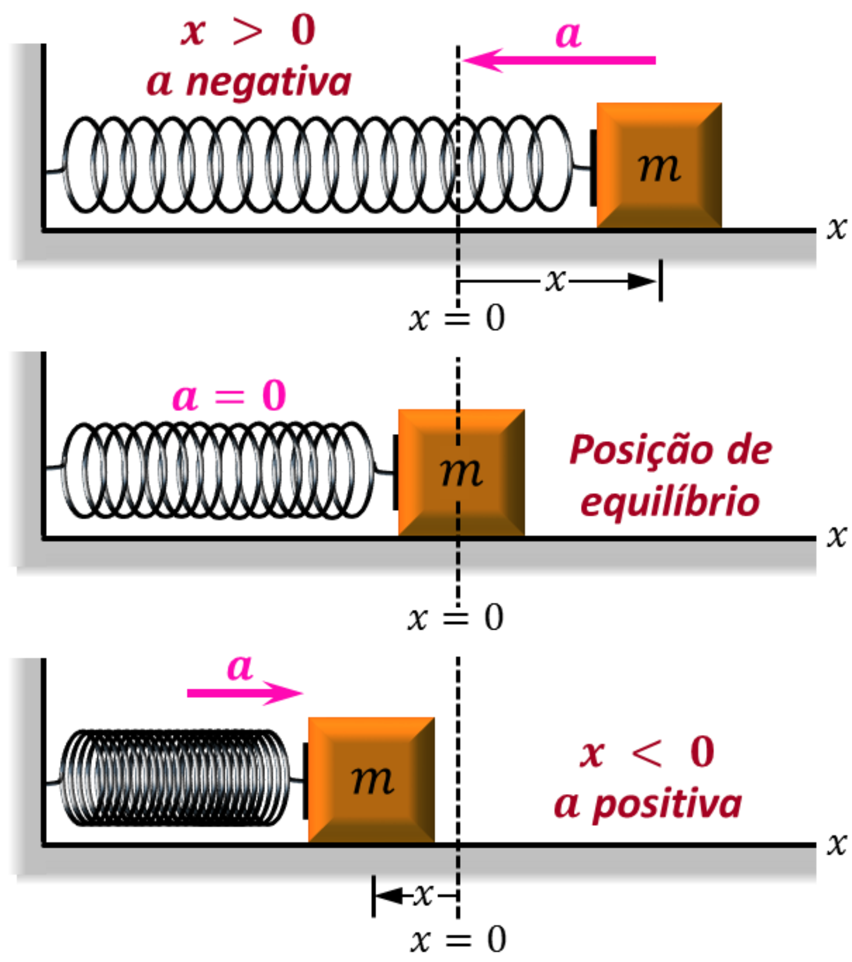
Sistema massa-mola sem atrito

$$F = -kx = ma$$

$$a = -\frac{k}{m}x$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x}$$

Equação que governa o MHS do corpo m



Lucy V. C. Assali

Movimento Harmônico Simples (MHS)

Sistema massa-mola sem atrito: equação de movimento

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x}$$ ⇒ **Equação diferencial homogênea linear de 2ª ordem**

- **homogênea** ⇒ *o termo independente de x é nulo*
- **linear** ⇒ *só aparecem termos lineares em x e nas derivadas de x (não aparecem termos como $x^2, x^3, (dx/dt)^2$, etc ...)*
- **ordem** ⇒ *maior índice da derivada (neste caso de 2ª ordem, pois aparece a segunda derivada de x)*

Lucy V. C. Assali

Eq. diferencial linear de 2ª ordem (curiosidade)

$$\boxed{A\,\frac{d^2x}{dt^2} + B\,\frac{dx}{dt} + C\,x = F} \text{ ou } \boxed{A\,\ddot{x} + B\,\dot{x} + C\,x = F}$$

- $A, B, C, F \Rightarrow$ coeficientes da equação, podem ser constantes ou dependentes de t.
- A, B, C, F são constantes $\Rightarrow$ equação diferencial de 2ª ordem a coeficientes constantes
- $F = 0 \Rightarrow$ equação homogênea

Propriedades das equações diferenciais lineares de 2ª ordem, homogêneas

$$\boxed{A\,\ddot{x} + B\,\dot{x} + C\,x = 0}$$

1. Se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são soluções da equação, então $x_1(t) + x_2(t)$ também é solução.

2. Se $x_1(t)$ é solução da equação, então $a\,x_1(t)$, com a uma constante arbitrária, também é solução.

3. Se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são soluções da equação, então $x(t) = a\,x_1(t) + b\,x_2(t)$, com a e b constantes arbitrárias, também é solução.

Lucy V. C. Assali

Movimento Harmônico Simples (MHS)

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}\,x = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2\,x = 0}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \implies \text{frequência própria do movimento oscilatório}$$

Eq. do MHS $\Rightarrow$ derivada segunda da função é igual a uma constante vezes a própria função $\Rightarrow$ as funções seno e cosseno têm esta propriedade $\therefore$

1ª tentativa $\Rightarrow$ $x_1(t) = \cos(\omega_0\, t)$

$$\Rightarrow \dot{x}_1 = -\omega_0 \text{sen}\,(\omega_0\, t) \text{ e } \ddot{x}_1 = -\omega_0^2 \cos(\omega_0\, t)$$

Substituindo na equação:

$$-\omega_0^2 \cos(\omega_0\, t) + \omega_0^2 \cos(\omega_0\, t) \equiv 0 \Rightarrow \boxed{x_1(t) = \cos(\omega_0\, t) \text{ é solução.}}$$

Movimento Harmônico Simples (MHS)

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}\,x = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2\,x = 0}$$

2ª tentativa $\Rightarrow \; x_2(t) = \text{sen}\,(\omega_0\,t)$

$$\Rightarrow \dot{x}_2 = \omega_0 \cos(\omega_0\,t) \text{ e } \ddot{x}_2 = -\omega_0^2 \text{sen}\,(\omega_0\,t)$$

Substituindo na equação:

$$-\omega_0^2 \text{sen}\,(\omega_0\,t) + \omega_0^2 \text{sen}\,(\omega_0\,t) \equiv 0 \Rightarrow \boxed{x_2(t) = \text{sen}\,(\omega_0\,t) \text{ é solução.}}$$

Solução mais geral possível

$$\boxed{x(t) = a\,\cos(\omega_0\,t) + b\,\text{sen}\,(\omega_0\,t)} \;(a \text{ e } b \text{ constantes arbitrárias}) \quad ①$$

$$\text{ou ainda} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x(t) = A\,\cos(\omega_0\,t + \varphi)} \; ②$$

Lucy V. C. Assali

Movimento Harmônico Simples (MHS)

Utilizando $\cos(B+C) = \cos B \cos C - \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C$ podemos re-escrever a equação ②: $x(t) = A\left[\cos(\omega_0\, t)\cos\varphi - \operatorname{sen}\,(\omega_0\, t)\operatorname{sen}\varphi\right]$

Comparando-a com a equação ① :

$$x(t) = a\,\cos(\omega_0\, t) + b\operatorname{sen}\,(\omega_0\, t)\;\;(a \text{ e } b \text{ constantes arbitrárias})$$

temos: $\begin{cases} a = A\,\cos\varphi \\ b = -A\operatorname{sen}\varphi \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A = \sqrt{a^2+b^2} \\ \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$

Exemplo:

Seja $\boxed{x(t) = 3\cos(2\pi t) + 4\operatorname{sen}\,(2\pi t)}$,
re-escreva na forma $x(t) = A\,\cos(2\pi t + \varphi)$.

Identificando $\begin{cases} a = A\,\cos\varphi = 3 \\ b = -A\operatorname{sen}\varphi = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} \rightarrow A = 5 \\ \cos\varphi = \dfrac{3}{5} = 0,6 \rightarrow \varphi \simeq 0,93 \end{cases}$

$$\boxed{x(t) = 5\,\cos(2\pi t + 0,93)}$$

Lucy V. C. Assali

Movimento Harmônico Simples (MHS)

Interpretação dos parâmetros que aparecem na solução da equação de movimento do MHS

$$\boxed{\begin{cases} \text{equação} \Longrightarrow & \ddot{x} + \omega_0^2\, x = 0 \\ \text{solução} \Longrightarrow & x(t) = A\, \cos(\omega_0\, t + \varphi) \end{cases}}$$

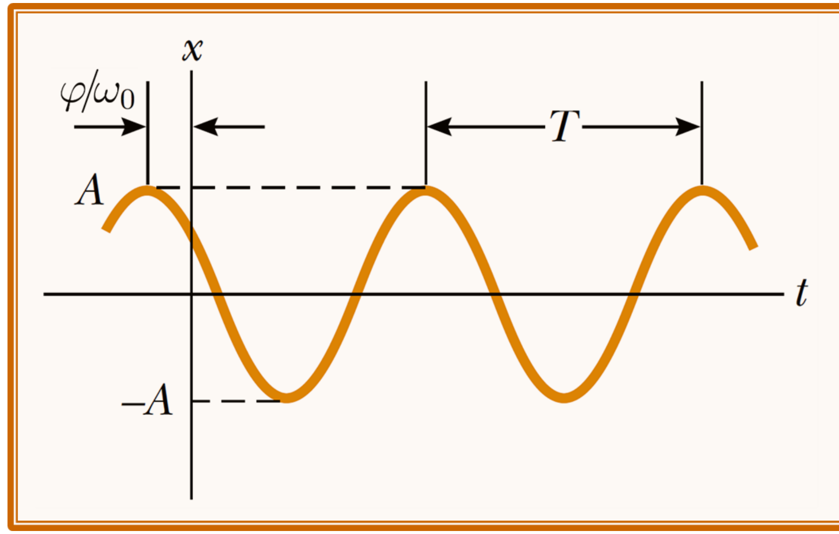
- $A \longrightarrow |x_{\text{máx}}(t)| \Longrightarrow$ amplitude de oscilação (m)
- $\omega_0 = \dfrac{2\,\pi}{T} = 2\,\pi\,\nu \Longrightarrow$ frequência angular de oscilação (rad/s)
- $\omega_0\, t + \varphi \Longrightarrow$ fase do movimento de oscilação
- $\varphi \Longrightarrow$ fase inicial do movimento de oscilação (valor da fase em $t = 0$ s)

$\Longrightarrow$ Se sistema massa-mola em MHS: $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

Lucy V. C. Assali

Movimento Harmônico Simples (MHS)

$$x(t) = A\,\cos(\omega_0\, t + \varphi)$$



Como determinar A e φ?

Através do ajuste da equação de movimento às condições iniciais:

$$\text{sejam dados} \quad \Rightarrow \begin{cases} x(0) = x_0 \\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

$$\text{então} \Rightarrow \begin{cases} x(0) = x_0 = A\,\cos\varphi \quad ① \\ v(t) = \dot{x} = -\omega_0 A\,\text{sen}\,(\omega_0\, t + \varphi) \rightarrow v(0) = v_0 = -\omega_0 A\,\text{sen}\,\varphi \quad ② \end{cases}$$

$$\left.\begin{cases} ① \Rightarrow A\,\cos\varphi = x_0 \Longrightarrow A^2\,\cos^2\varphi = x_0^2 \\ ② \Rightarrow A\,\text{sen}\,\varphi = -\dfrac{v_0}{\omega_0} \Longrightarrow A^2\,\text{sen}^2\,\varphi = \dfrac{v_0^2}{\omega_0^2} \end{cases}\right\} A^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2} \Rightarrow \boxed{A = \sqrt{\frac{v_0^2 + \omega_0^2 x_0^2}{\omega_0^2}}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\text{tg}\,\varphi = -\frac{v_0}{x_0\,\omega_0}}$$

$$\cos\varphi = \frac{x_0}{A} \Rightarrow \boxed{\cos\varphi = \sqrt{\frac{\omega_0^2 x_0^2}{\omega_0^2 x_0^2 + v_0^2}}}$$

Lucy V. C. Assali

Movimento Harmônico Simples (MHS)

$$x(t) = A\,\cos(\omega_0\,t + \varphi)$$

$$\Rightarrow |x_{\text{máx}}(t)| = A$$

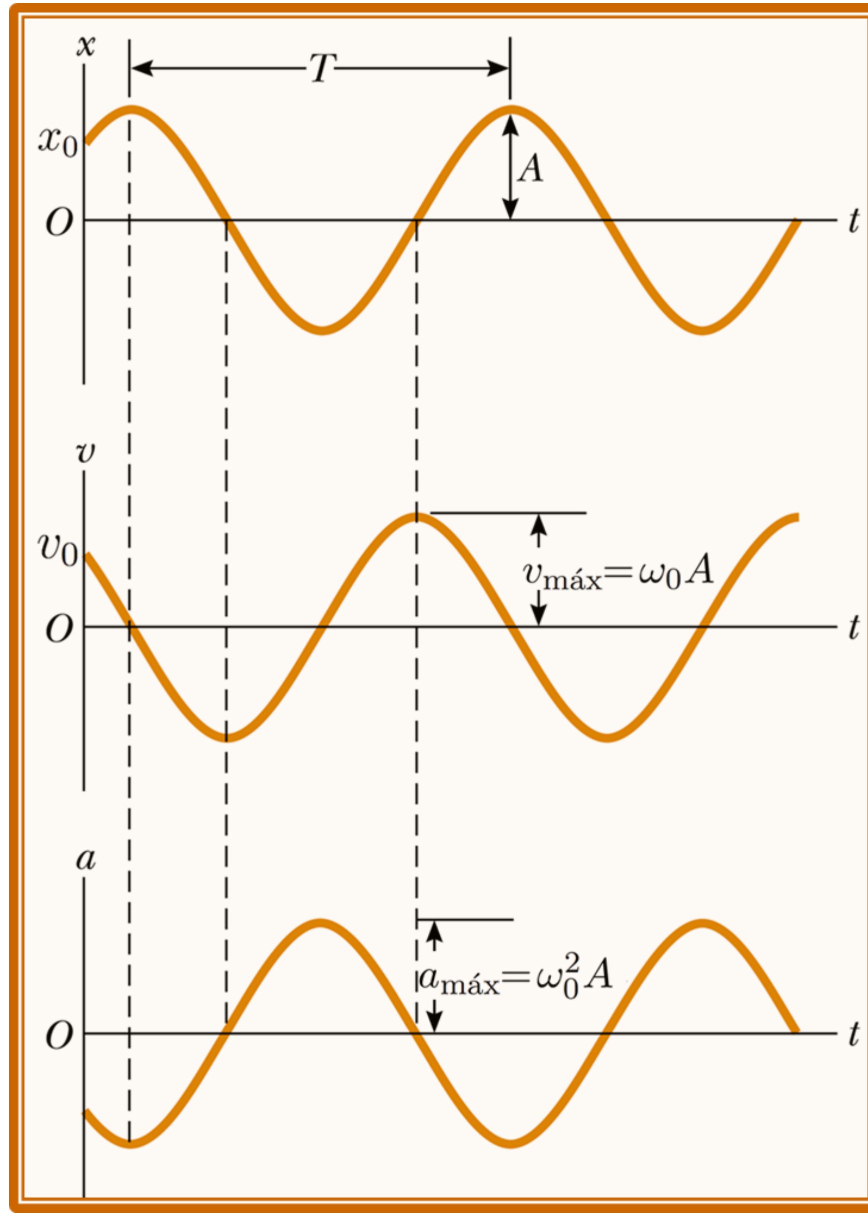
$$v(t) = \dot{x} = -\omega_0 A\,\text{sen}\,(\omega_0\,t + \varphi)$$

$$\Rightarrow |v_{\text{máx}}(t)| = \omega_0 A$$

$$a(t) = \ddot{x} = -\omega_0^2 A\,\cos(\omega_0\,t + \varphi)$$

$$= -\omega_0^2\,x(t)$$

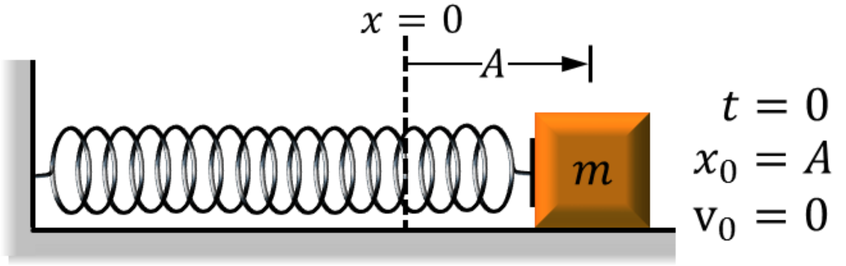
$$\Rightarrow |a_{\text{máx}}(t)| = \omega_0^2 A$$



Lucy V. C. Assali

MHS $\Rightarrow$ sistema massa-mola

1º Caso:



$$\ddot{x} + \omega_0^2\, x = 0 \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

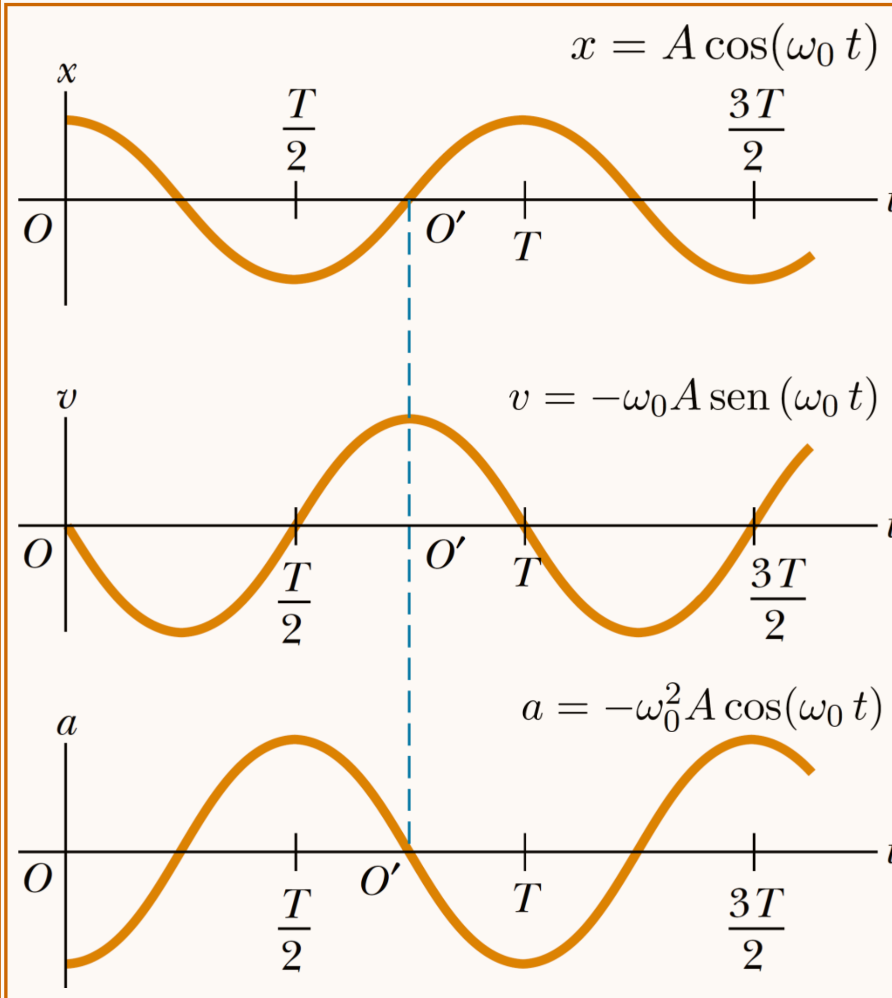
$$x(t) = A\,\cos(\omega_0\, t + \varphi)$$

$$x(0) = A = A\cos\varphi \rightarrow \varphi = 0$$

$$x(t) = A\cos(\omega_0\, t)$$

$$\Rightarrow \dot{x} = -\omega_0 A\,\mathrm{sen}\,(\omega_0\, t)$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = -\omega_0^2 A\cos(\omega_0\, t)$$

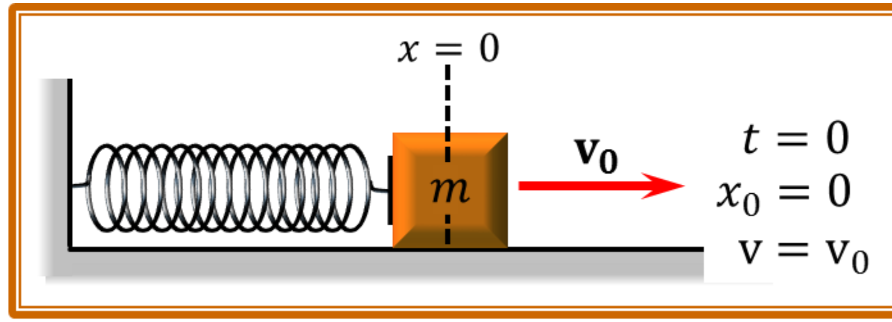


Lucy V.C. Assali

MHS $\Rightarrow$ sistema massa-mola

2º Caso:

$$\ddot{x} + \omega_0^2\, x = 0 \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



$$x(t) = A\,\cos(\omega_0\, t + \varphi)$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi = -\frac{v_0}{x_0\,\omega_0} = -\infty \Rightarrow \varphi = -\pi/2$$

$$x(0) = 0 = A\,\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = 0 \rightarrow \varphi = -\pi/2\ (x > 0)$$

$$\cos(\omega_0 t - \pi/2) = \cos(\omega_0 t)\cos(\pi/2) + \mathrm{sen}\,(\omega_0 t)\mathrm{sen}\,(\pi/2)$$

$$x(t) = A\,\mathrm{sen}\,(\omega_0 t)$$

$$v(t) = \dot{x} = \omega_0 A\cos(\omega_0\, t)$$

$$v(0) = v_0 = \omega_0 A \Longrightarrow v(t) = v_0\cos(\omega_0\, t)$$

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= \frac{v_0}{\omega_0}\mathrm{sen}\,(\omega_0 t) \\ v(t) &= v_0\cos(\omega_0\, t) \\ a(t) &= -v_0\,\omega_0\,\mathrm{sen}\,(\omega_0 t) \end{aligned}}$$

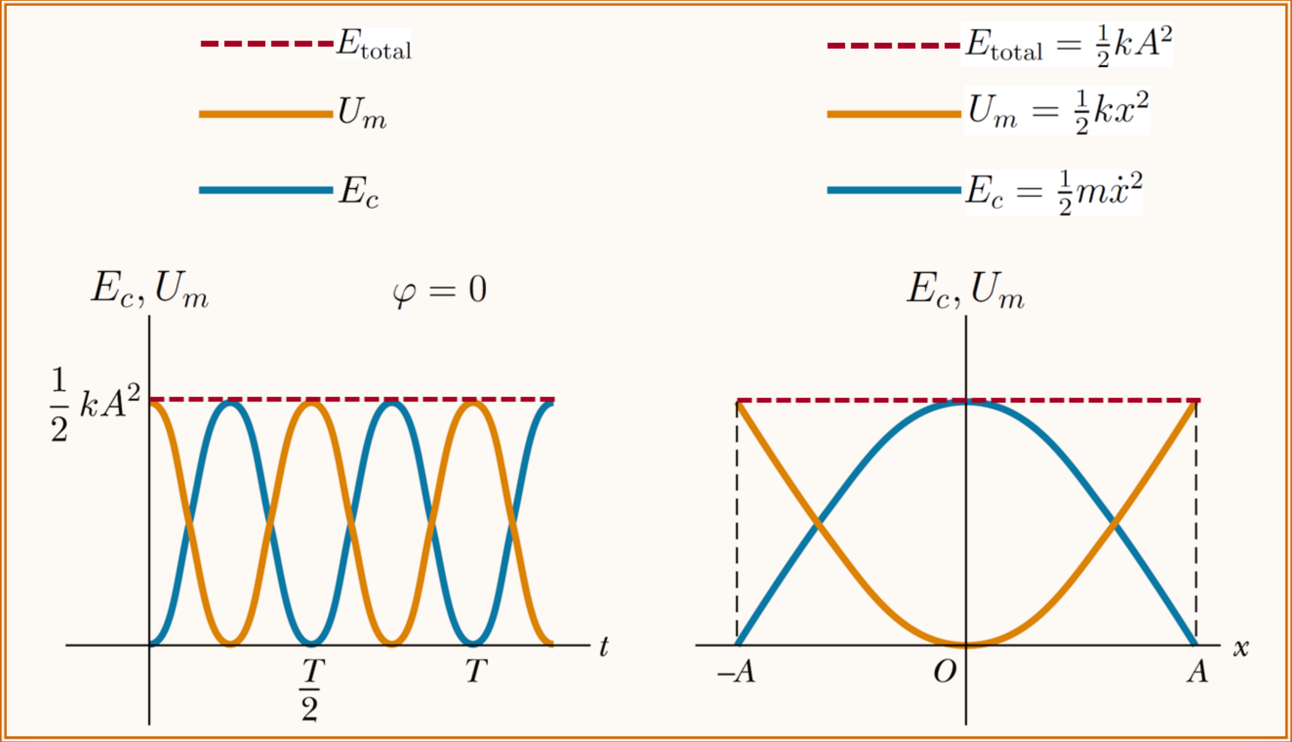
Lucy V. C. Assali

Energia mecânica do MHS (massa-mola)

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \text{sen}^2(\omega_0 t + \varphi)$$

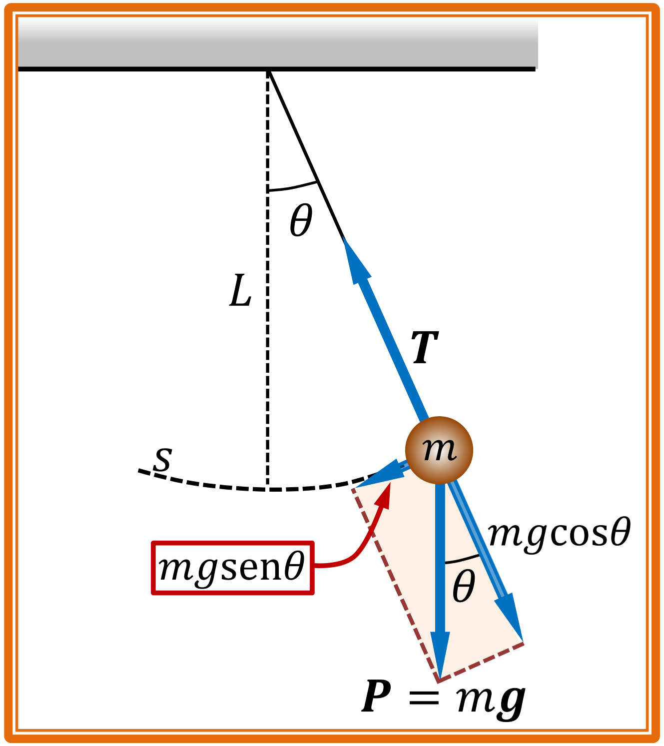
$$U_m = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(m\omega_0^2)A^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$E_{\text{total}} = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 = \frac{1}{2}kA^2 \Longrightarrow \text{ constante}$$



Lucy V.C. Assali

Pêndulo Simples



Força restauradora: $F = -mg\,\mathrm{sen}\theta$

Deslocamento da massa: s tal que $ds = L d\theta$

$$F = ma = m\frac{d^2 s}{dt^2} = m\,L\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\,\mathrm{sen}\theta$$

Equação de movimento:

$$m\,L\ddot{\theta} = -mg\,\mathrm{sen}\theta \Longrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\,\mathrm{sen}\theta = 0$$

$$\theta \text{ pequeno} \Longrightarrow \mathrm{sen}\theta = \theta$$

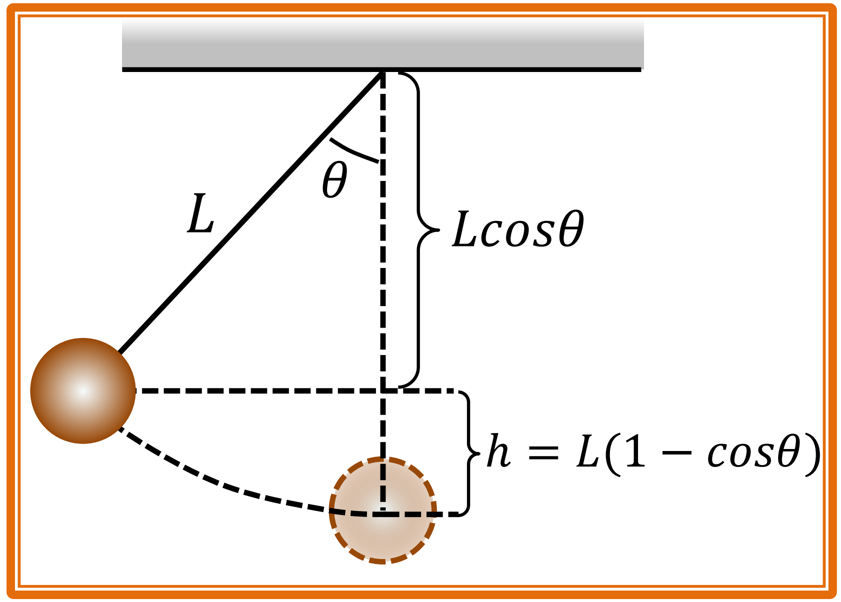
Equação de movimento: $\boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \text{ onde } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}}$ **MHS**

Solução: $\boxed{\theta(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)}$

Lucy V. C. Assali

Pêndulo Simples: energia mecânica

$$E_c = \frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}m\left(L\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2$$



$$U_g = mgh = mgL(1-\cos\theta)$$

$$\theta \ \text{pequeno} \implies \cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

$$\theta(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = -\omega_0 A \,\text{sen}\,(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

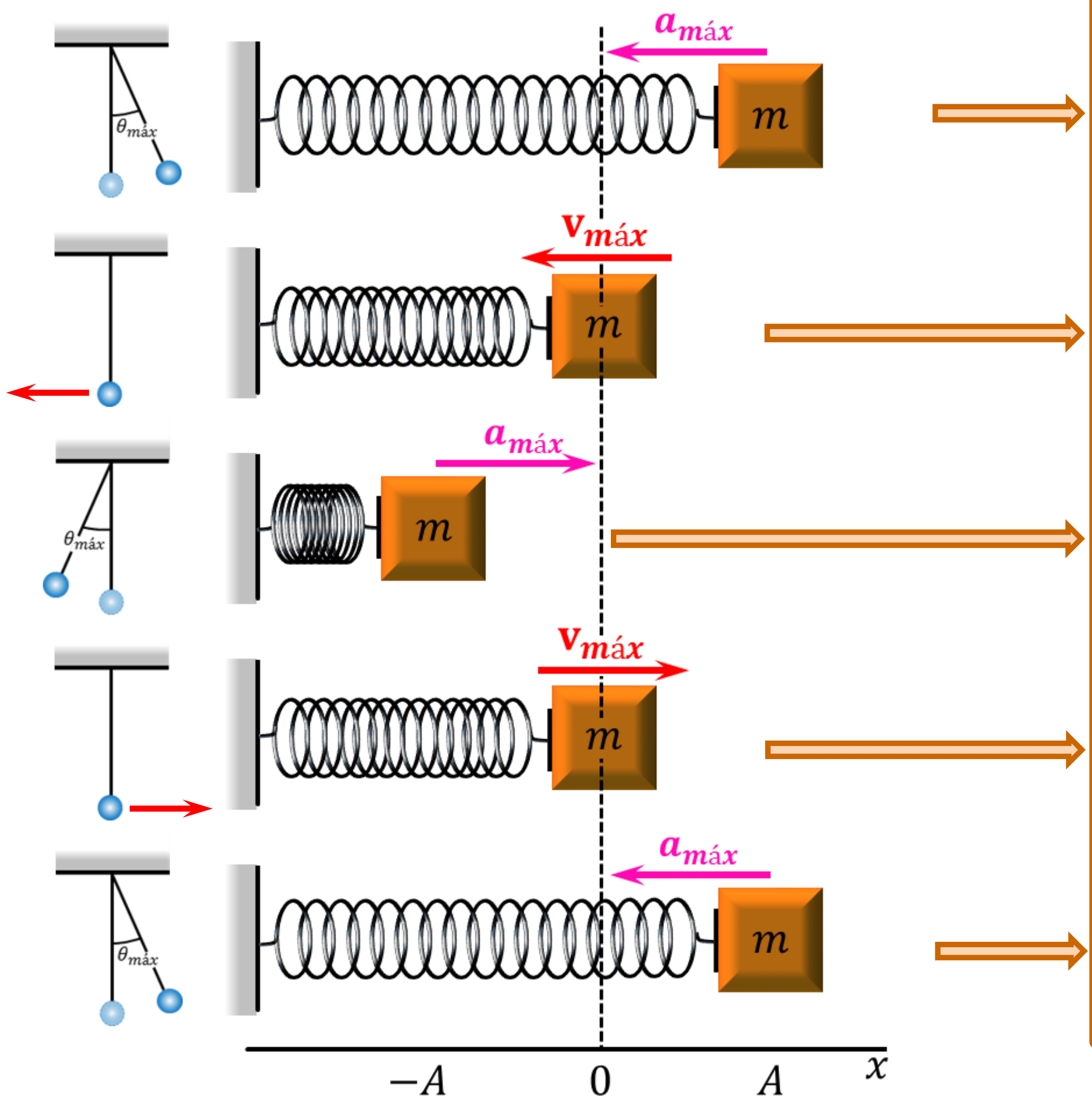
$$E_{\text{total}} = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mgL\,\theta^2$$

$$\Rightarrow E_{\text{total}} = \frac{1}{2}mL^2\underbrace{\omega_0^2}_{g/L}A^2\text{sen}^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}mgL\,A^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\Rightarrow \boxed{E_{\text{total}} = \frac{1}{2}mgL\,A^2 \implies \text{constante}}$$

Lucy V.C. Assali

MHS do sistema massa-mola e sua relação com o movimento de um pêndulo simples (θ pequeno)



t	x	v	a	E_c	U_m
0	A	0	$-\omega_0^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$T/4$	0	$-\omega_0 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
$T/2$	$-A$	0	$\omega_0^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$3T/4$	0	$\omega_0 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
T	A	0	$-\omega_0^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$

$t = 0 \Longrightarrow x = A$

Lucy V. C. Assali