OSCILADOR HARMÔNICO AMORTECIDO (MHA)

* MHS → conservação de energia.
* Na prática há dissipação de energia.
* A resistência de um fluido (ar, líquido) é proporcional à velocidade para velocidades pequenas ⇒ pequenas oscilações.

$$F_{amortecimento} \propto -v = -\dot{x} = -\frac{dx}{dt}$$

$$m\ddot{x} = -kx \underbrace{- \rho\dot{x}}_{\text{Força de amortecimento } = -\rho\dot{x} \text{ com } \rho>0} \qquad \rho \equiv \text{coeficiente de atrito viscoso.}$$

* Viscosidade atuando ⇒ A amplitude decresce com o tempo.

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x + \frac{\rho}{m}\dot{x} = 0 \qquad \frac{k}{m} = \omega_0^2 \;\; e \;\; \frac{\rho}{m} = \gamma$$

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (1)$$

* Caso(1) $x(t) = f(t)\,A\cos(\omega t + \varphi)$

$$\dot{x} = \dot{f}A\cos(\omega t+\varphi) + f(-\omega)A\,\mathrm{sen}(\omega t+\varphi)$$

$$\ddot{x} = \ddot{f}A\cos(\omega t+\varphi) + \dot{f}(-\omega)A\,\mathrm{sen}(\omega t+\varphi) + \dot{f}(-\omega)A\,\mathrm{sen}(\omega t+\varphi) + f(-\omega)A(\omega)\cos(\omega t+\varphi)$$

Em (1)

$$\ddot{f}A\cos(\omega t+\varphi) + \dot{f}(-\omega)A\,\mathrm{sen}(\omega t+\varphi) + \dot{f}(-\omega)A\,\mathrm{sen}(\omega t+\varphi) + f(-\omega)A\omega\cos(\omega t+\varphi) + \gamma\dot{f}A\cos(\omega t+\varphi) - \gamma f\omega A\,\mathrm{sen}(\omega t+\varphi) + \omega_0^2 fA\cos(\omega t+\varphi) = 0$$

$$\underbrace{(\ddot{f} - f\omega^2 + \gamma\dot{f} + \omega_0^2 f)}_{\text{igual a zero}}A\cos(\omega t+\varphi) - \underbrace{(2\dot{f}\omega + \gamma f\omega)}_{\text{igual a zero}}A\,\mathrm{sen}(\omega t+\varphi) = 0$$

$$\omega \neq 0 \Rightarrow 2\dot{f} + \gamma f = 0$$

$$\dot{f} = -\frac{\gamma}{2}f \Rightarrow F(t) = F_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} \;\; e \;\; \ddot{f} = \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 f$$

* No primeiro termo:

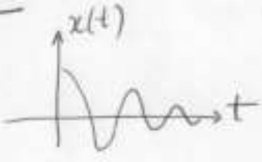
$$\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 f - \omega^2 f - \frac{\gamma^2}{2} + \omega_0^2 f = 0$$

$$\left(\frac{\gamma^2}{4} - \omega^2 - \frac{\gamma^2}{2} + \omega_0^2\right) f = 0 \quad , \text{ como } f \neq 0$$

$$-\frac{\gamma^2}{4} - \omega^2 + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \omega^2 = \underbrace{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}_{\omega < \omega_0 \text{ e } \omega_0 > \frac{\gamma}{2}}$$

$$\therefore \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} \quad \Leftarrow \quad \underline{\text{Soluçã real}}$$

Amortecimento sub-crítico



* Caso (2) $x(t) = a e^{pt}$

$$\dot{x} = pa\, e^{pt}$$
$$\ddot{x} = p^2 a\, e^{pt}$$

na equação de movimento: $\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

$$p^2 a e^{pt} + \gamma p a e^{pt} + \omega_0^2 a e^{pt} = 0$$

$$\underbrace{(p^2 + \gamma p + \omega_0^2)}_{\text{nulo}} a e^{pt} = 0$$

$$p = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \underbrace{\sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}}_{\omega_0 < \frac{\gamma}{2}}$$

$$p_+ = -\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}$$

$$p_- = -\frac{\gamma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}$$

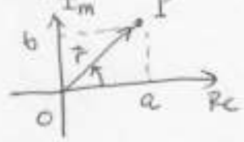
$$x(t) = a e^{-\left(\frac{\gamma}{2} - \beta\right)t} + b e^{-\left(\frac{\gamma}{2} + \beta\right)t}$$

Amortecimento super-crítico

(15)

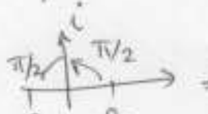
* Qual seria a solução geral que abrangeria as duas soluções acima (caso 1 e caso 2)?

$\sqrt{-1} = i \Rightarrow i^2 = -1$



$\vec{OP} = \vec{r} = a\hat{x} + b\hat{y}$
$= a\hat{i} + b\hat{j}$

$\hat{x} = 1$
$\hat{y} = i$



$\Rightarrow a \to -a$
$\frac{\pi}{2} \times 2 = \pi$
$i^2 = -1$

Número complexo
$z = a + ib$
$b \equiv$ rotação de $\frac{\pi}{2}$ no sentido anti-horário
para $a = 1$ e $b = 1$
$z = 1 + i$

* Equação: $A\frac{d^2x}{dt^2} + B\frac{dx}{dt} + Cx = F$ ($F=0 \Rightarrow$ homogênea)

$$A\ddot{x} + B\dot{x} + Cx = 0$$

Havíamos obtido:

$$p = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - w_0^2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\underbrace{i^2\left(w_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}\right)}_{\substack{>0 \text{ (subcrítico)} \\ <0 \text{ (super-crítico)}}}}$$

$$p = -\frac{\gamma}{2} \pm i\sqrt{\underbrace{w_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}_{>0 \text{ (sub-crítico)}}}$$

$$p = -\frac{\gamma}{2} \pm iw$$

$p = -\frac{\gamma}{2} \pm iw \Rightarrow$ substitui em $x(t)$

$$x(t) = a e^{[(-\frac{\gamma}{2} + iw)t]} + b e^{[(-\frac{\gamma}{2} - iw)t]}$$

$$x(t) = a e^{-\frac{\gamma t}{2}} e^{iwt} + b e^{-\frac{\gamma t}{2}} e^{-iwt} \Rightarrow x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(a e^{iwt} + b e^{-iwt}\right)$$

a e b podem ser números complexos $\Rightarrow$ $a = Ae^{i\varphi}$, $b = Ae^{-i\varphi}$

Apêndice : A fórmula de Euler

$$f(x) = e^{\lambda x} \quad \frac{df(x)}{dx} = \lambda e^{\lambda x} = \lambda f(x) \text{ com } f(0) = 1$$

* Vamos escrever $f(x) = \cos x$ e $f(x) = \text{sen}\, x$

$$\frac{df(x)}{dx} = -\text{sen}\, x \qquad \frac{df(x)}{dx} = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}\underbrace{(\cos x + i\,\text{sen}\, x)}_{f(x)} = -\text{sen}\, x + i \cos x = \underbrace{i}_{\lambda}\underbrace{(\cos x + i\,\text{sen}\, x)}_{f(x)}$$

$$\therefore \quad \cos x + i\,\text{sen}\, x = e^{ix}$$

* Expansão em série de Taylor:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\text{sen}\, x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$e^{ix} = 1 + (ix) + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \cdots =$$

$$= \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right)}_{\cos x} + \underbrace{i}_{i}\underbrace{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right)}_{\text{sen}\, x}$$

* Re-escrevendo:

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left[A e^{[i(\omega t + \varphi)]} + B e^{[-i(\omega t + \varphi)]}\right]$$

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left[A \cos(\omega t + \varphi) + i A\, \text{sen}(\omega t + \varphi) + B \cos(\omega t + \varphi) - i B\, \text{sen}(\omega t + \varphi)\right]$$

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left[(A+B)\cos(\omega t + \varphi) + \cancel{i(A-B)\,\text{sen}(\omega t + \varphi)}\right] \quad \overset{0}{\text{(imaginário!)}}$$

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\, C \cos(\omega t + \varphi)$$

* Aplicar ao caso MHS

$$\ddot{x} + w_0^2 x = 0 \qquad x = e^{pt}$$
$$\dot{x} = p e^{pt}$$
$$\ddot{x} = p^2 e^{pt}$$

$$(p^2 + w_0^2)x = 0 \quad \Rightarrow \quad p^2 = -w_0^2 \Rightarrow p = \pm i\omega_0$$

$$x(t) = \underbrace{a}_{Ae^{i\varphi}} e^{i\omega_0 t} + \underbrace{b}_{Be^{-i\varphi}} e^{-i\omega_0 t} = A e^{i(\omega_0 t + \varphi)} + B e^{-i(\omega_0 t + \varphi)}$$

$$x(t) = (A+B)\cos(\omega_0 t + \varphi) + i\cancel{(A-B)\,\text{sen}(\omega_0 t + \varphi)}^{\,0}$$
imaginário!

Parte real: $x(t) = C\cos(\omega_0 t + \varphi)$

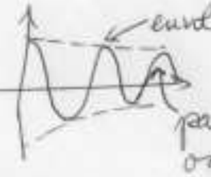
mesmo resultado.

* Oscilador Harmônico Amortecido — solução: $x(t) = e^{pt}$

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + w_0^2 x = 0$$
$$p^2 e^{pt} + \gamma p e^{pt} + \omega_0^2 e^{pt} = 0 \Rightarrow p^2 + \gamma p + w_0^2 = 0$$
$$p = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}$$

1) Se $w_0 > \frac{\gamma}{2} \Rightarrow p = -\frac{\gamma}{2} \pm i\omega$ onde $\omega = \sqrt{w_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$

$$x(t) = Ce^{-\frac{\gamma t}{2}}\cos(\omega t + \varphi)$$
[Amortecimento sub-crítico]

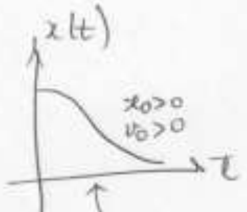


2) se $w_0 < \frac{\gamma}{2}$

[Amortecimento super crítico]

$$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(a e^{\beta t} + b e^{-\beta t}\right)$$

com $\beta = \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - w_0^2}$ pois $w_0 < \frac{\gamma}{2}$



$$x(t) = a e^{-\underbrace{\left(\frac{\gamma}{2}-\beta\right)}_{>0}t} + b e^{-\underbrace{\left(\frac{\gamma}{2}+\beta\right)}_{>0}t}$$

para tempos mais longos $e^{-\frac{\gamma}{2}+\beta}$ domina

duas exponenciais decrescentes

3) $w_0 = \frac{\gamma}{2} \Rightarrow W = 0 \Rightarrow \boxed{\beta = 0}$

[Amortecimento crítico]

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + W_0^2 x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + 2w_0\dot{x} + w_0^2 x = 0$$

Solução geral: $x(t) = f(t)\,e^{-\frac{\gamma}{2}t} = f(t)\,e^{-w_0 t}$

$$\dot{x} = \dot{f}e^{-w_0 t} - w_0 f e^{-w_0 t}$$

$$\ddot{x} = \ddot{f}e^{-w_0 t} - w_0\dot{f}e^{-w_0 t} - w_0\dot{f}e^{-w_0 t} + w_0^2 f e^{-w_0 t}$$

$$\left(\ddot{f} - 2w_0\dot{f} + w_0^2 f\right)e^{-w_0 t} + 2w_0\left(\dot{f} - w_0 f\right)e^{-w_0 t} + w_0^2 f e^{-w_0 t} = 0$$

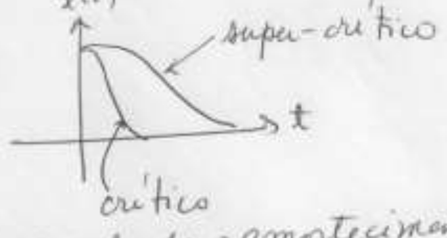
Como $e^{-w_0 t} \neq 0$ para qualquer t

$$\ddot{f} - \cancel{2w_0\dot{f}} + \cancel{w_0^2 f} + \cancel{2w_0\dot{f}} - \cancel{2w_0^2 f} + \cancel{w_0^2 f} = 0$$

$$\ddot{f} = 0 \Rightarrow \dot{f} = a \text{ e } f = at + b$$

$$\therefore\ x(t) = (at+b)\,e^{-w_0 t}$$

$$x(t) = (at+b)\,e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$



$\beta \neq 0$ retarda o amortecimento

$\beta = 0$ mais amortecido.

Ajuste das Condicões iniciais

$$x(t) = A e^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{x}(t) = -\frac{\gamma}{2} A e^{-\frac{\gamma t}{2}} \cos(\omega t + \varphi) + A e^{-\frac{\gamma t}{2}} (-\omega) \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$

x_0 e v_0 são dados

$$x_0 = A \cos\varphi$$

$$\dot{x}(0) = v_0 = -\frac{\gamma}{2} \underbrace{A\cos\varphi}_{x_0} - A\omega \operatorname{sen}\varphi \quad (1)$$

$$A = \frac{x_0}{\cos\varphi}$$

$$v_0 = -\frac{\gamma}{2} x_0 - x_0 \omega \operatorname{tg}\varphi \Rightarrow \frac{v_0}{x_0} = -\frac{\gamma}{2} - \omega \operatorname{tg}\varphi$$

$$\omega \operatorname{tg}\varphi = -\left(\frac{v_0}{x_0} + \frac{\gamma}{2}\right) \Rightarrow \operatorname{tg}\varphi = \frac{-\left(v_0/x_0 + \gamma/2\right)}{\omega}$$

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{-\left(v_0/x_0 + \gamma/2\right)}{\omega}\right]$$

Para $\varphi = 0 \Rightarrow x(t) = A e^{-\frac{\gamma t}{2}} \cos(\omega t)$

$$x_0 = A$$

$$v_0 = -\frac{\gamma}{2} A = -\frac{\gamma}{2} x_0$$

Amplitude $A e^{-\frac{\gamma t}{2}}$ decai no tempo $(x_{máx} = A)$

Para $\varphi \neq 0$ (caso particular do resultado anterior) e

$v_0 = 0 \Rightarrow$ $x_0 = A\cos\varphi$, $v_0 = 0$ $\Rightarrow -\frac{\gamma}{2} A \cos\varphi = A\omega \operatorname{sen}\varphi \quad (1)$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-\gamma/2}{\omega} \Rightarrow \varphi \Rightarrow \cos\varphi$$

$$A = \frac{x_0}{\cos\varphi}$$ (determina-se A)

* A energia do Oscilador Harmônico Amortecido (MHA)

$$E(t) = \frac{1}{2} m \underbrace{\dot{x}^2}_{v(t)} + \frac{1}{2} k x^2$$

Não é mais conservada, a dissipação converte a energia em outras formas de energia.

Como varia no tempo?

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{1}{\cancel{2}} m \cancel{2}\dot{x}\ddot{x} + \frac{1}{\cancel{2}} k \cancel{2}x\dot{x}$$

$$\frac{dE(t)}{dt} = \dot{x}\left(m\ddot{x} + kx\right) \quad \left\} \begin{array}{l} m\ddot{x} + kx + \rho\dot{x} = 0 \\ m\ddot{x} + kx = -\rho\dot{x} \end{array} \right.$$

$$\frac{dE}{dt} = \underbrace{-\rho\dot{x}^2}_{\substack{\text{varia com o quadrado} \\ \text{da velocidade e } \leq 0}} = \underbrace{-\rho\dot{x}}_{\text{força de atrito}} \cdot \dot{x}$$

Como $\frac{\rho}{m} = \gamma \Rightarrow \frac{dE}{dt} = -m\gamma\,\dot{x}^2(t)$

Para amortecimento fraco $\gamma \ll w_0$ (sub-crítico)

$$E(t) = \frac{1}{2} m A^2 e^{-\gamma t}\left[f(\omega, t)\right]$$

$e^{-\gamma t}$ varia muito pouco em 1 período $\therefore$ interessa o valor médio da energia instantânea durante 1 período τ.

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega}$$

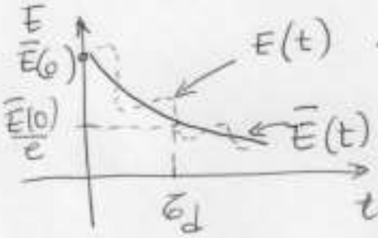
$$\bar{E}(t) = \frac{1}{\tau}\int_{t}^{t+\tau} E(t')\,dt'$$

$$\bar{E}(t) = \underbrace{\frac{1}{2}m\omega_0^2}_{k} A^2 e^{-\gamma t}$$

(demonstração em H. H. Nussenzveig, Vol 2)

$$\bar{E}(t) = \underbrace{\frac{1}{2}kA^2}_{\text{máximo}} e^{-\gamma t} = \bar{E}(0)\,e^{-\gamma t} \quad (\gamma \ll \omega_0)$$

* Isto mostra que para amortecimento fraco (sub-crítico) a energia média do oscilador decai exponencialmente com o tempo.



--- $E(t)$
— $\bar{E}(t)$

tempo de decaimento τ_d ⇒ a energia média cai de $\frac{1}{e}$.

$$\bar{E}(t) = \frac{\bar{E}(0)}{e} = \bar{E}(0)\,e^{-\gamma\tau_d}$$

$$e^{-1} = e^{-\gamma\tau_d} \Rightarrow \tau_d = \frac{1}{\gamma}$$

$$\frac{d\bar{E}}{dt} = -\underbrace{\gamma}\bar{E} \quad (\gamma \ll \omega_0) \quad \text{pois } \bar{E} = \bar{E}(0)\,e^{-\gamma t}$$

taxa de decréscimo relativo da energia média por unidade de tempo.

* Fator de mérito ou Fator Q (qualidade)

$$Q = \frac{2\pi}{1}\left(\frac{\text{energia armazenada no oscilador}}{\text{energia dissipada por ciclo}}\right)$$

$$\therefore\ Q = 2\pi\,\frac{\bar{E}}{\Delta\bar{E}} \quad \text{com } \underbrace{\overline{\Delta E}}_{\text{energia dissipada por ciclo}} = -\frac{d\bar{E}}{dt}\tau = \gamma\bar{E}\tau$$

$$\therefore \quad Q = \frac{2\pi \bar{E}}{\gamma \bar{E}\, \tau} = \underbrace{\frac{2\pi}{\tau}}_{w \approx w_0} \left(\frac{1}{\gamma}\right) \cong \frac{w_0}{\gamma} \approx w$$

Outra forma de escrever:

$$Q = \frac{2\pi}{\tau}\, \tau_d$$

Se $\underbrace{w_0 \approx w}_{\text{amortecimento fraco}} \Rightarrow Q \gg$

Maior Q ⇒ menor amortecimento por oscilação.