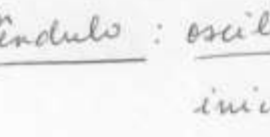
OSCILADOR HARMÔNICO

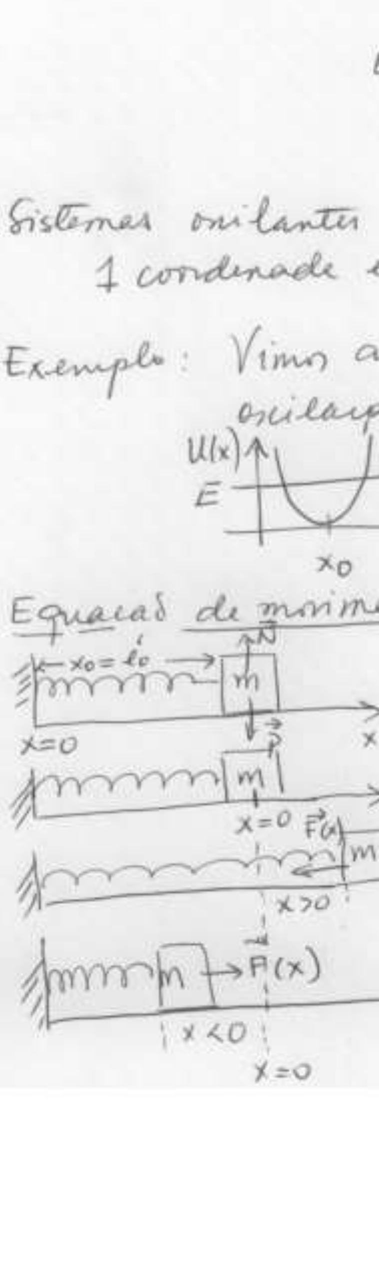
* Tambem conhecido como MHS (Movimento Harmônico Simples)
* Oscilações: vibrações localizadas
  Ondas: propagação
* Oscilações: exemplos: pêndulos, cordas em instrumentos e colunas de ar em instrumentos de sopro, vibrações de átomos na rede (RAMAN), correntes elétricas alternadas.

  Pêndulo: oscilações livres: estabelece-se a configuração inicial e se não existem forças externas oscilatórias $\Rightarrow$ T é fixo

  oscilações forçadas: deve-se levar em conta o período das forças externas.
* Sistemas oscilantes mais simples: 1 grau de liberdade $\Rightarrow$ 1 coordenada é suficiente para descrever o movimento.
* Exemplo: Vimos anteriormente que para forças conservativas oscilações periódicas $\Rightarrow U(x) = \frac{kx^2}{2}$ e $F = -kx$



Equação de movimento da mola:



$\Rightarrow F = -k(x - x_0)$

$\Rightarrow F = -kx$ (restauradora)

* $F(x)$ é a única força na direção do movimento

<u>2ª Lei de Newton</u>: $F_R = ma$

$$-kx = ma = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\ddot{x}$$

$$\underbrace{m\ddot{x} = -kx}_{\text{equação de movimento}} \quad \Big\}\ \text{Oscilador harmônico unidimensional (MHS)}$$

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$$

$\uparrow$ $\underbrace{\text{equação diferencial}}_{\text{derivadas de } x}$ ordinária de $\underbrace{\text{2ª ordem}}_{\text{máxima derivada}}$

* Considera-se soluções do tipo $x_1 = \operatorname{sen} ct$ (1)
$x_2 = \cos ct$ (2)

onde $\underline{\underline{c}}$: frequência angular de oscilação.

(1) $\dot{x}_1 = c\cos ct$ e $\ddot{x}_1 = -c^2 \operatorname{sen} ct$

$$-c^2 \cancel{\operatorname{sen} ct} = -\frac{k}{m} \cdot \cancel{\operatorname{sen} ct} \Rightarrow c^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow c = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$C = \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

(2) $\dot{x}_2 = -c\operatorname{sen} ct$ e $\ddot{x}_2 = -c^2\cos ct$

$$-c^2 \cancel{\cos ct} = -\frac{k}{m} \cdot \cancel{\cos ct} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

* Quando $t = T$ (período) volta-se à condição inicial

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \equiv \text{frequência angular de oscilação}$$

* Como há 2 soluções aplica-se o Princípio da Superposição.

(i) se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são soluções $\Rightarrow x_1(t) + x_2(t)$ também é solução.

(ii) Se $x(t)$ é solução $a\,x(t)$ também é solução ($a = cte$)

$$x(t) = a\,x_1(t) + b\,x_2(t) \Big\} \frac{\text{Solução geral}}{\text{Combinação linear}}$$

Soluções independentes — Princípio da superposição

* Oscilações livres de um oscilador harmônico:

$$x(t) = a\cos(wt) + b\,\text{sen}(wt)$$ reduzir
$$x(t) = A\cos(wt + \varphi)$$

Relação entre estas constantes:

$$x(t) = A\cos(\omega t)\cos\varphi - A\,\text{sen}(\omega t)\,\text{sen}\,\varphi$$

$$a\cos(\omega t) + b\,\text{sen}(\omega t) = [A\cos\varphi]\cos(\omega t) - [A\,\text{sen}\,\varphi]\,\text{sen}(\omega t)$$

$$a = A\cos\varphi \quad \Rightarrow \quad tg\,\varphi = -\frac{b}{a}$$
$$b = -A\,\text{sen}\,\varphi$$

φ é determinado a menos de um múltiplo de 2π.

$$a^2 + b^2 = A^2 \Rightarrow A = \sqrt{a^2+b^2}$$

Interpretação física: $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

(i) $x(t)\big|_{max} = A$ (amplitude de oscilação) $\Rightarrow A > 0$

(ii) $\cos(\omega t + \varphi) \equiv$ função periódica de ω de período 2π

$$t = T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f} \Rightarrow f \equiv \text{frequência de oscilação } (s^{-1} \equiv Hz)$$

$\omega \equiv rad/s$ (frequência angular de oscilação).

(iii) $\theta = \omega t + \varphi \equiv$ fase do movimento

(iv) $\varphi \equiv$ constante de fase ou fase inicial.

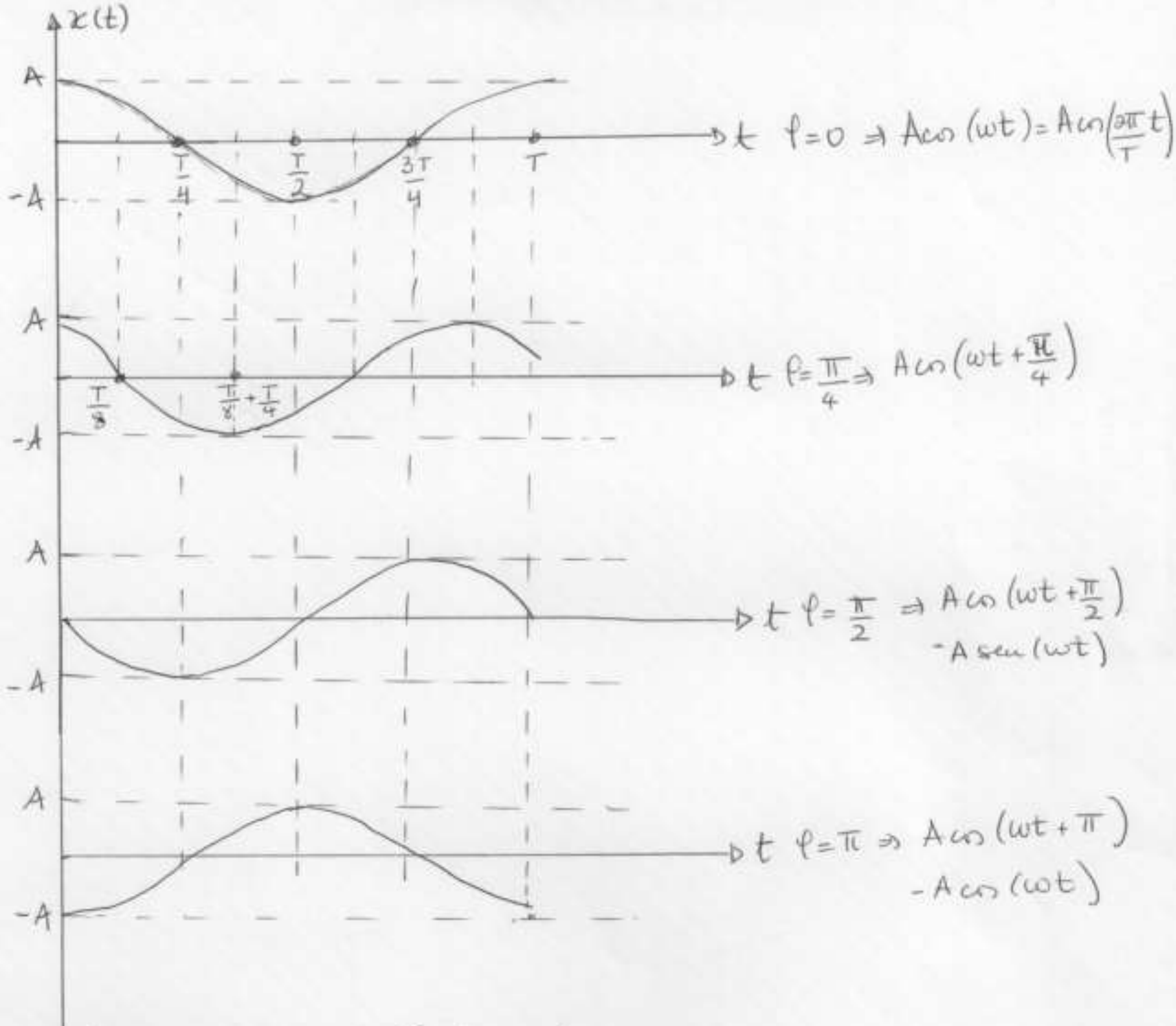
$\varphi = 0$ — quadratura — oposição de fase
$\varphi = 90°$
$\varphi = 180°$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$$ (4)

$\omega^2 = \frac{k}{m}$ = força restauradora por unidade de comprimento e massa.

Maior a força ⇒ maior k e menor a massa (inércia)

Maior ω ⇒ mais rápidas serão as oscilações



* Ajuste das condições iniciais

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \xrightarrow{t=0} x_0 = A\cos\varphi \quad (1)$$

$$a = A\cos\varphi = x_0$$

$$\dot{x}(t) = -\omega A \operatorname{sen}(\omega t + \varphi) \xrightarrow{t=0} v_0 = -\omega A \operatorname{sen}\varphi = \omega(-A\operatorname{sen}\varphi) = \omega b$$

$$b = \frac{v_0}{\omega}$$

$$(1)^2 + (2)^2 = \quad x_0^2 = A^2\cos^2\varphi$$

$$v_0^2 = \omega^2 A^2 \operatorname{sen}^2\varphi \Rightarrow \frac{v_0^2}{\omega^2} = A^2 \operatorname{sen}^2\varphi$$

$$x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} = A^2 \underbrace{(\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi)}_{1} = A^2$$

$$\therefore \quad A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \quad e \quad tg\,\varphi = \frac{-v_0/\omega A}{x_0/A} = -\frac{v_0}{\omega x_0}$$

$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ { sabe-se A e φ a partir das condições iniciais.

Ou

$$x(t) = a\cos(\omega t) + b\operatorname{sen}(\omega t)$$

$$x(t) = x_0\cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\operatorname{sen}(\omega t)$$

2 incógnitas { A e φ ou a e b } 2 condições de contorno

* Quando o oscilador é solto do repouso $v_0 = 0$, $\dot{x}(0) = 0$

$\boxed{\varphi = 0} \Rightarrow \quad a = A = x_0 \quad e \quad b = 0$

$$x(t) = x_0\cos(\omega t)$$

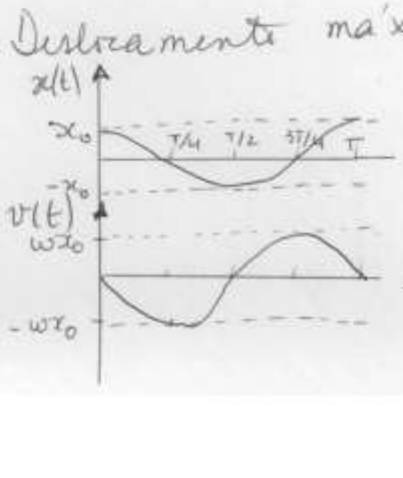
$$v(t) = -x_0\omega\operatorname{sen}(\omega t) = \omega x_0 \underbrace{\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)}_{\operatorname{sen}\theta = -\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}$$

puxado ao máximo

$\boxed{\varphi = \pi} \Rightarrow \quad a = -A = x_0 \Rightarrow A = -x_0$

Como $A > 0$ $x_0 < 0$ (comprimento ao máximo)

* Deslocamento máximo $\Rightarrow$ velocidade nula



$\Rightarrow x(t) = x_0\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$

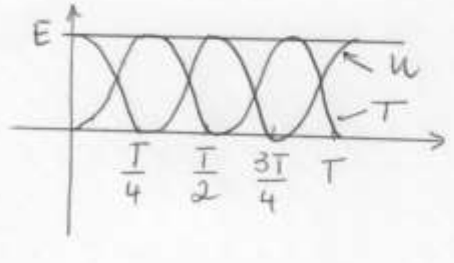
$\Rightarrow v(t) = \omega x_0\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \pi/2\right)$

* Energia do oscilador

Energia Cinética $\equiv \Gamma = \frac{1}{2} m [\dot{x}(t)]^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \varphi)$

Energia Potencial $\equiv U = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$

Energia Total $\equiv E = \Gamma + U = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \equiv$ constante



$$\Gamma = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \quad p/\ \varphi = 0$$

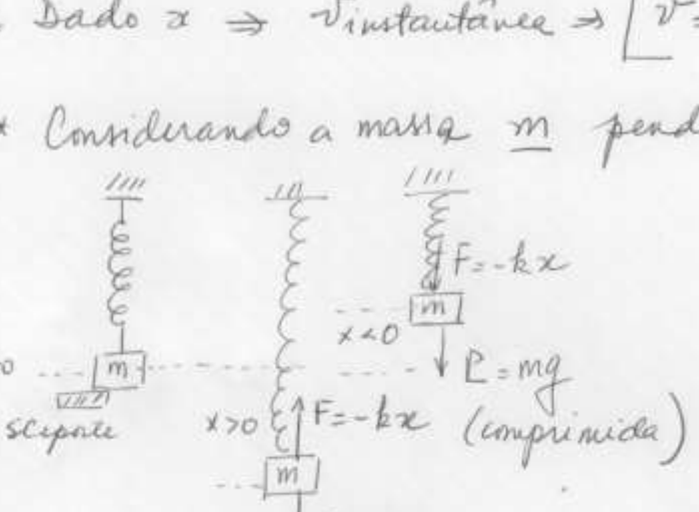
$$U = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$$

$$\overline{\Gamma} = \overline{U} = \frac{1}{4} m\omega^2 A^2$$

* Como $\Gamma = \frac{1}{2} m v^2 = E - U = \frac{1}{2} \underbrace{m\omega^2}_{k} (A^2 - x^2)$

* Dado $x \Rightarrow v_{instantânea} \Rightarrow \boxed{v = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2}}$

* Considerando a massa $\underline{m}$ pendurada na mola.



$$m\ddot{x} = -kx + mg$$

$$\underbrace{m\ddot{x} + kx = mg}_{\text{Equação homogênea modificada}}$$

* Mudança de variável:

$$m\ddot{x} + kx - mg = 0$$

$$m\ddot{x} + k\left(x - \frac{mg}{k}\right) = 0 \Rightarrow y = x - \frac{mg}{k}$$

$\dot{y} = \dot{x}$ e $\ddot{y} = \ddot{x}$

$$\therefore \quad m\ddot{y} + ky = 0 \Rightarrow \ddot{y} + \frac{k}{m}y = 0 \Rightarrow \ddot{y} = -\omega^2 y$$

$$y = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$y = x - \frac{mg}{k} = A\cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow$$

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) + \frac{mg}{k}} \; //$$

$$t = 0 \text{ e } \varphi = 0 \Rightarrow x_{max} = A + \frac{mg}{k}$$

* Outra forma:

solução da não homogênea = soluç particular + soluç da ~~não~~ homogênea.

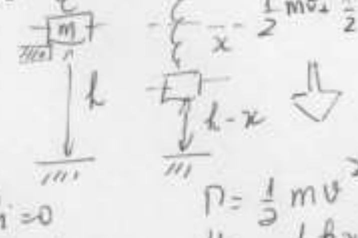
$$m\ddot{x} + kx - mg = 0$$

Particular $x_p = cte \quad \ddot{x}_p = 0 \Rightarrow x_p = \frac{mg}{k}$

Homogênea $x_h = A\cos(\omega t + \varphi)$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) + \frac{mg}{k} \; //$$

* Energia do sistema



$U + \Gamma = E$

$\Delta U + \Delta \Gamma = 0$

$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 - mgx = 0$

$\Gamma_i = 0$

$U_e = 0$

$U_g = mgh$

$E = mgh$

$\Gamma = \frac{1}{2}mv^2$

$U_e = \frac{1}{2}kx^2$

$U_g = mg(h-x)$

$E = mgh$ somente forças conservativas

E é conservada?

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 + mg(h-x)$$

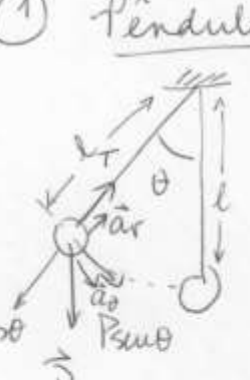
$$\frac{dE}{dt} = \frac{2mv}{2}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{2}k2x\frac{dx}{dt} - mg\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dE}{dt} = mav + kxv - mgv$$

$$\frac{dE}{dt} = (\underbrace{ma + kx - mg}_{2^a \text{ lei de Newton}})v = 0$$

Exemplos

① Pêndulo simples



Aceleração radial

$$T - mg\cos\theta = ma_r = \frac{mv^2}{\ell} = \frac{m(\omega\ell)^2}{\ell} = m\omega^2\ell$$

$$T - mg\cos\theta = m\ell\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

Aceleração tangencial

Arco = raio x ângulo

$$-mg\,\mathrm{sen}\,\theta = ma_\theta = m\ell\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$s = \ell\theta$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\frac{ds}{dt} = \ell\frac{d\theta}{dt}$$

$$v = \ell\dot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\,\mathrm{sen}\,\theta = 0$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = a_\theta = \ell\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Para θ pequeno $\Rightarrow \mathrm{sen}\,\theta \approx \theta$

$$a_\theta = \ell\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0_{(1)} \Rightarrow$$

$$\theta = \theta_0\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{\theta} = -\omega\theta_0\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$$

$$\ddot{\theta} = -\omega^2\theta_0\cos(\omega t + \varphi)$$

Em (1) $-\omega^2\theta_0\cos(\omega t + \varphi) + \frac{g}{\ell}\theta_0\cos(\omega t + \varphi) = 0$

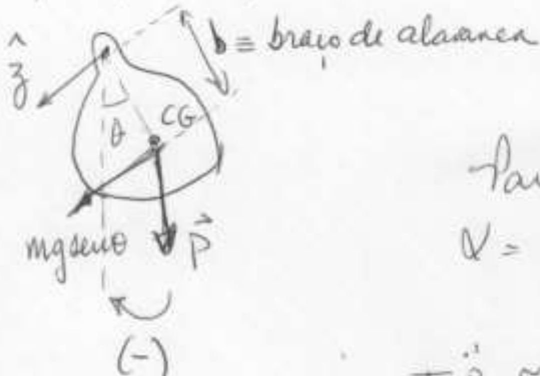
$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

Para θ pequenos $\theta = 10^\circ \Rightarrow \theta \approx 0{,}1745\,\mathrm{rad}$, $\mathrm{sen}\,\theta \approx 0{,}1736$ $\Big\}$ 0,5% de diferença

$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \Rightarrow$ independe da amplitude de oscilaç desde que θ seja pequeno e independe da massa.

② Pêndulo físico

O corpo oscila livremente em torno de um eixo que passa por $\underline{O}$.



$$\tau_z = -mg\,\text{sen}\,\theta \cdot b$$

$$I\alpha = -mg\,\text{sen}\,\theta \cdot b$$

Para θ pequeno sen θ ≈ θ

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta}$$

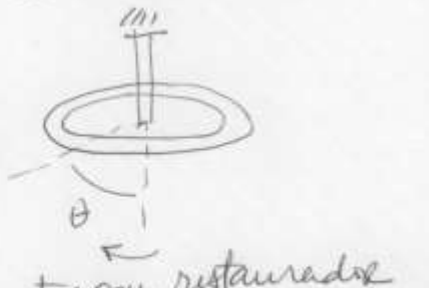
$$\therefore I\ddot{\theta} \cong -mg\theta b$$

$$\ddot{\theta} \cong -\frac{mgb}{I}\theta$$

$$\ddot{\theta} + \frac{mgb}{I}\theta = 0 \Rightarrow \theta = \theta_0\cos(\omega t + \varphi) \text{ com } \omega^2 = \frac{mgb}{I} = \frac{\cancel{m}gb}{\cancel{m}r^2}$$

independe da massa $\Leftarrow \omega = \frac{gb}{r^2} \Leftarrow$ r ≡ raio de giração.

③ Pêndulo de torção



$$\tau = -K\theta \qquad K \equiv \text{módulo de torção}$$

$$-K\theta = I\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{K}{I}\theta = 0 \qquad \omega = \sqrt{\frac{K}{I}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{K}}$$

$$\theta = \theta_M\cos(\omega t + \varphi)$$

Outros exemplos de pêndulos físicos: barra e disco

a) Barra

$$I\alpha = -Mg\frac{L}{2}\operatorname{sen}\theta$$

Eixos ∥s

$$I = \frac{ML^2}{3} \qquad I = \frac{ML^2}{12} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{ML^2}{3}$$

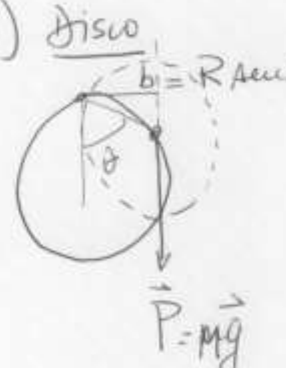
$$\frac{ML^2}{3}\ddot{\theta} = -Mg\frac{L}{2}\operatorname{sen}\theta$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{3g}{2L}\operatorname{sen}\theta \Rightarrow \ddot{\theta} \cong -\frac{3g}{2L}\theta$$

$$\omega^2 = \frac{3g}{2L} = \frac{g}{2L/3} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2L/3}{g}}$$

Corresponde a um pêndulo simples com $l = \frac{2L}{3}$

b) Disco



Eixo ∥s

$$I = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$$

$$I\alpha = -MgR\operatorname{sen}\theta$$

$$\frac{3}{2}M\cancel{R^2}\ddot{\theta} = -Mg\cancel{R}\operatorname{sen}\theta$$

$$\ddot{\theta} = \frac{-2g}{3R}\operatorname{sen}\theta \approx \frac{-2g}{3R}\theta$$

$$\omega^2 = \frac{2g}{3R} = \frac{g}{\frac{3R}{2}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{3R/2}{g}}$$

Corresponde a um pêndulo simples com $l = \frac{3R}{2}$

* Oscilações de 2 partículas: descreve o movimento do CM.

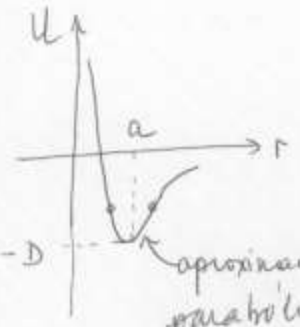
$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \equiv \text{massa reduzida do sistema de 2 corpos}$$

$$\mu\ddot{x} = -kx \quad \text{com } x = x_2 - x_1$$

Exemplo: Molécula Diatômica

Potencial de Lennard-Jones

$$U(r) = D\left[\left(\frac{a}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{a}{r}\right)^{6}\right]$$



$U(a) = -D$ (energia de dissociação)

Para pequenos deslocamentos $r \approx a$

$x = r - a$

$U(r) = U(x+a)$ (parábola)

$$U(r) \approx -D + \frac{1}{2}kx^2 = -D + \frac{1}{2}k(r-a)^2$$

$$\left.\frac{dU(r)}{dr}\right|_{r\to a} = 2\frac{k}{2}(r-a) \to 0 \quad e \quad \underbrace{\frac{d^2U(r)}{dr^2}}_{} = k \text{ (r próximo a a)}$$

Expressão geral: $\dfrac{dU}{dr} = D\left[-\dfrac{12}{a}\left(\dfrac{a}{r}\right)^{13} + \dfrac{12}{a}\left(\dfrac{a}{r}\right)^{7}\right]$

$$\underbrace{\frac{d^2U}{dr^2}}_{} = 12D\left[\frac{13}{a^2}\left(\frac{a}{r}\right)^{14} - \frac{7}{a^2}\left(\frac{a}{r}\right)^{8}\right] \overset{r\to a}{=} \frac{12D\times 6}{a^2} = \frac{72D}{a^2}$$

$$\underbrace{k = \frac{72D}{a^2}}_{} \Rightarrow F = -kx \text{ (vibração das moléculas)}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

aplicação para a molécula de CO $\left\{\begin{array}{l} D = 10\,eV = 1{,}6\times10^{-18}\,J \\ a = 1{,}1\times10^{-10}\,m \\ \mu = 1{,}16\times10^{-26}\,kg \end{array}\right.$

$k = 9{,}5\times10^{3}\ N/m$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{\mu}} \approx 1{,}4\times10^{14}\ Hz$$

Comprimento de onda: $E = hf = \dfrac{hc}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \dfrac{c}{f}$

$$\lambda = \frac{3\times10^{8}}{1{,}4\times10^{14}} \cong 2\times10^{-6}\,m \cong 2\,\mu m$$

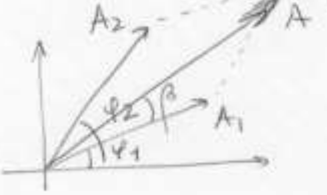
$\lambda_{C-O}(exp) \approx 4{,}7\ \mu m$ ordem de grandeza ok!

* Superposição de MHS

(a) Mesma direção e frequência

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

(método dos fasores ⇒ projeção de vetores girantes)



A_1 e A_2 conhecidos

φ_1 e φ_2 conhecidos

$$A = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{A_2}{A}\operatorname{sen}(\varphi_2 - \varphi_1)$$

(b) Mesma direção e frequências diferentes

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Se $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2}$ (n_1 e n_2 inteiros) ⇒ $n_1 T_1 = n_2 T_2$ ⇒ periódico

Batimentos: $\omega_1 > \omega_2$ mas não muito diferentes

$A_1 = A_2 = A$

$$x(t) = \underbrace{2A\cos\left(\frac{\Delta\omega t}{2}\right)}_{\text{envoltória}}\underbrace{\cos(\bar{\omega} t)}_{\text{oscilação com maior frequência}}$$

$\bar{\omega} = \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2}$ $\quad \Delta\omega \ll \bar{\omega}$

$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 \simeq 0$

$\omega_1 = \bar{\omega} + \frac{1}{2}\Delta\omega$

$\omega_2 = \bar{\omega} - \frac{1}{2}\Delta\omega$

(c) Mesma frequência e direções perpendiculares

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= A\cos(\omega t + \varphi_1) \\ y(t) &= B\cos(\omega t + \varphi_2) \end{aligned}\right\} \quad \varphi_1 = 0 \Rightarrow \begin{aligned} x(t) &= A\cos(\omega t) \\ y(t) &= B\cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

Chega-se a: $\frac{y^2}{B^2} + \frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB}\cos\varphi = \operatorname{sen}^2\varphi$ (elipse inscrita em 1 retângulo)

$\varphi = 0$ e $\varphi = \pi$ ⇒ retas

$\varphi = \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$ ⇒ elipses ⇒ se $A = B$ ≡ circunferência

$\varphi = \frac{\pi}{4}$ e $\omega_1 \neq \omega_2$ e ΔS ⇒ Figuras de Lissajous (osciloscópio)