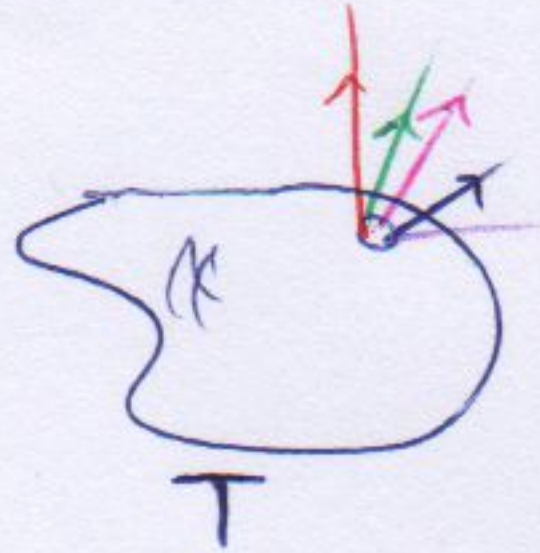
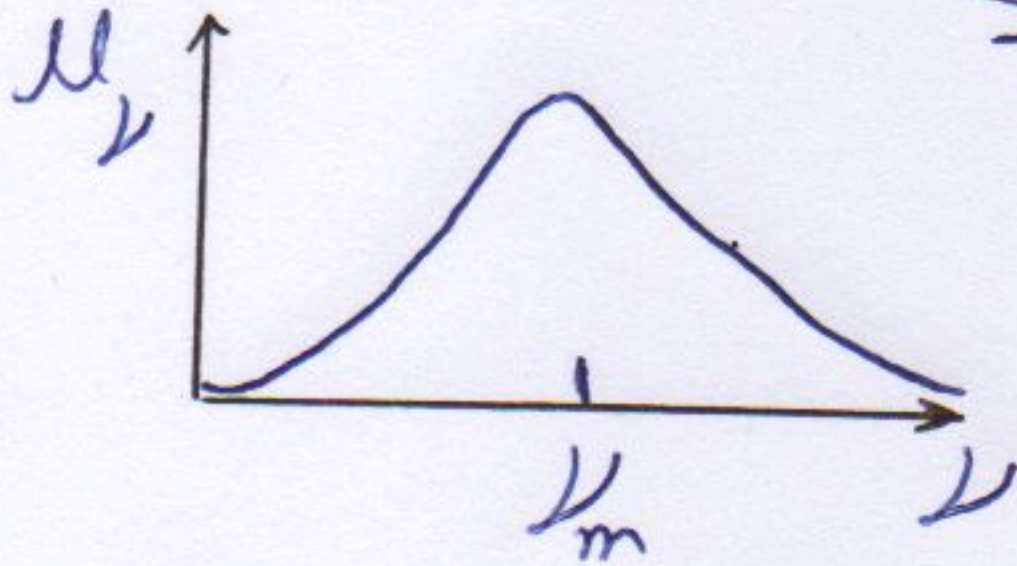


Propriedades Ondulatórias da matéria

Tipler cap. V

Revisão:

Planck, 1900:

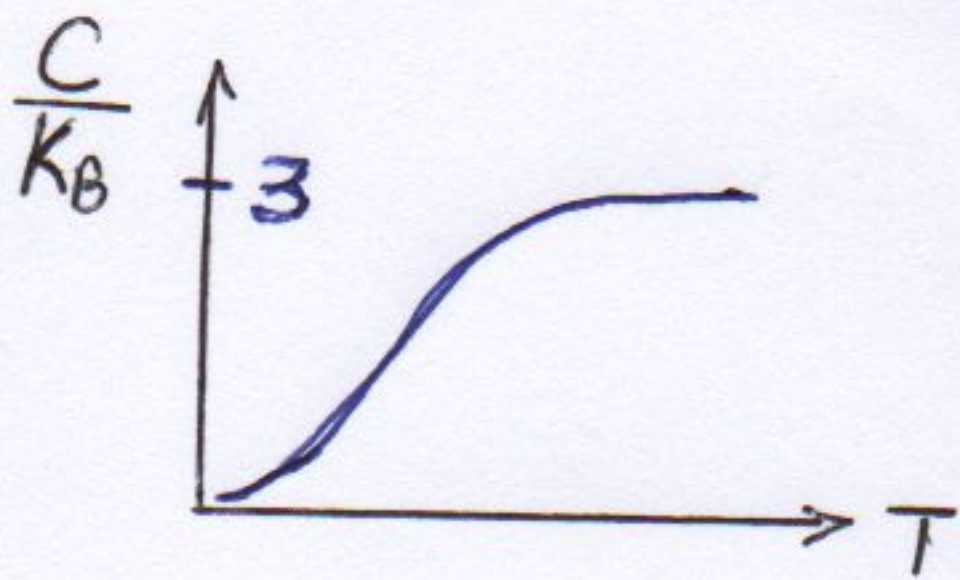


osciladores

$$\underline{E = nh\nu}$$

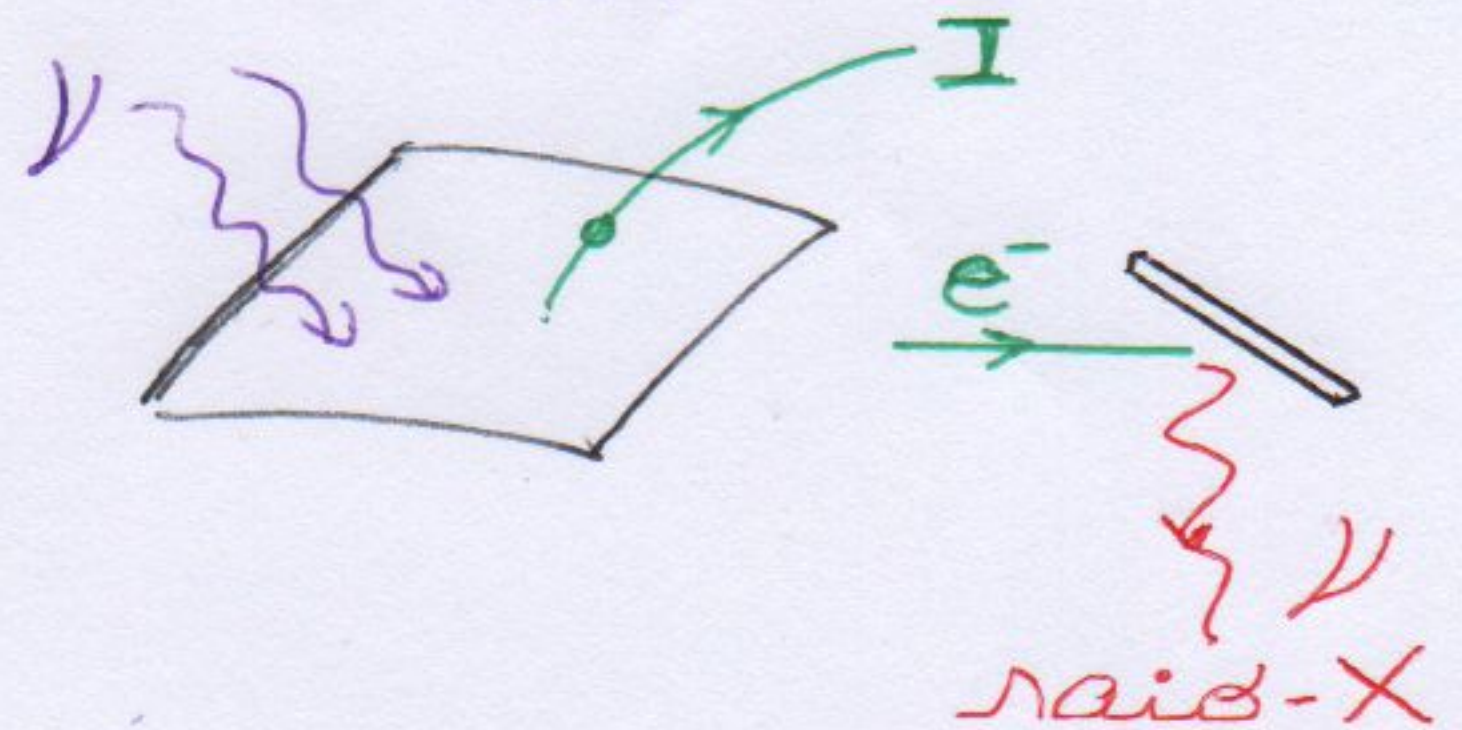
Einstein, 1905:

a radiação na cavidade
tb é quantizada:

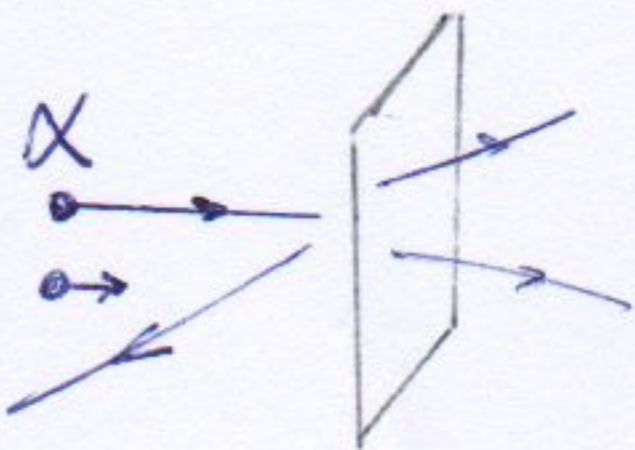


$$\underline{E = h\nu}$$

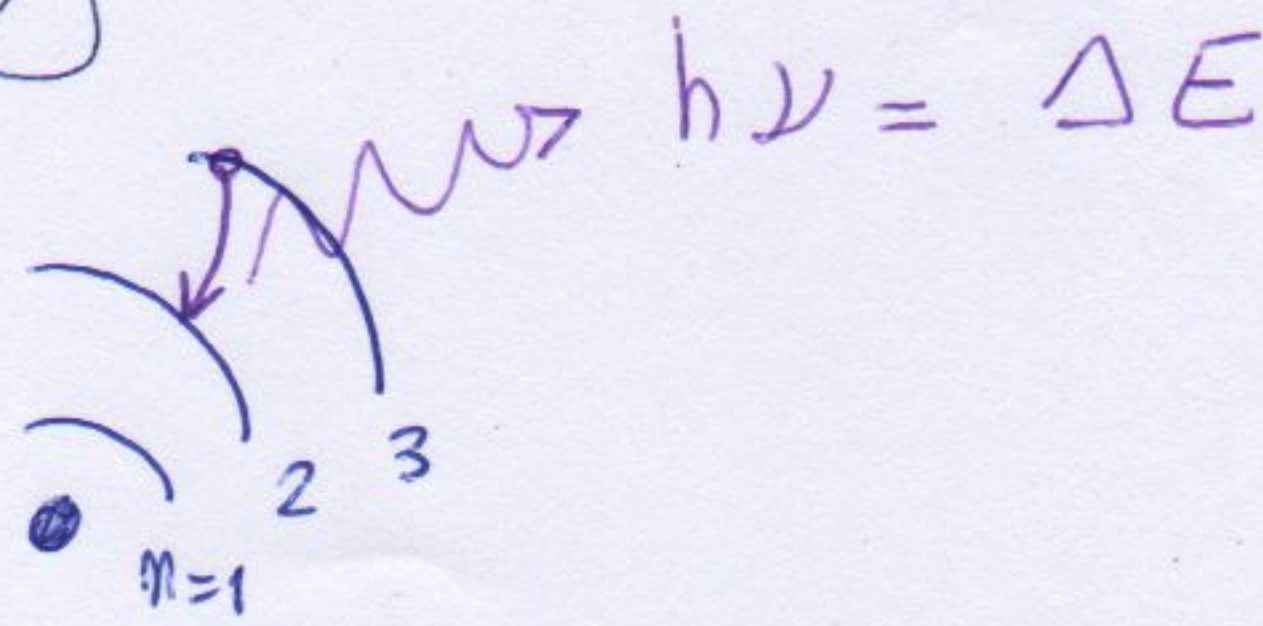
fóton



Rutherford, 1911:



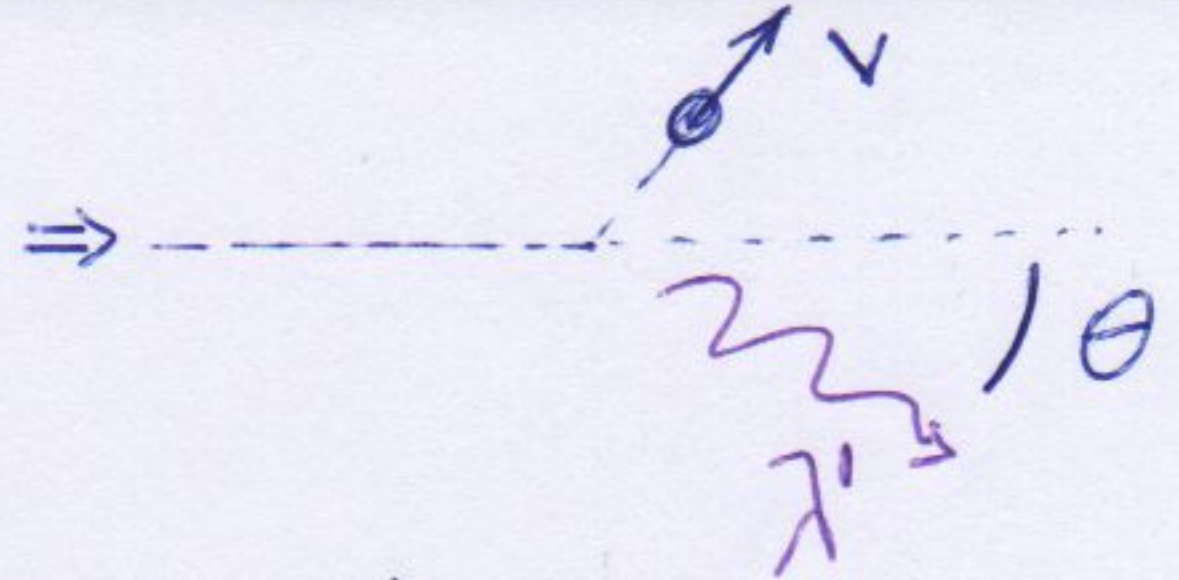
Bohr, 1913:



$$L = m\hbar$$

$$\rightarrow E_n \sim -1/n^2$$

Compton, 1924



$$\underline{\lambda' = \lambda + \lambda_c(1 - \cos\theta)}$$

usou que

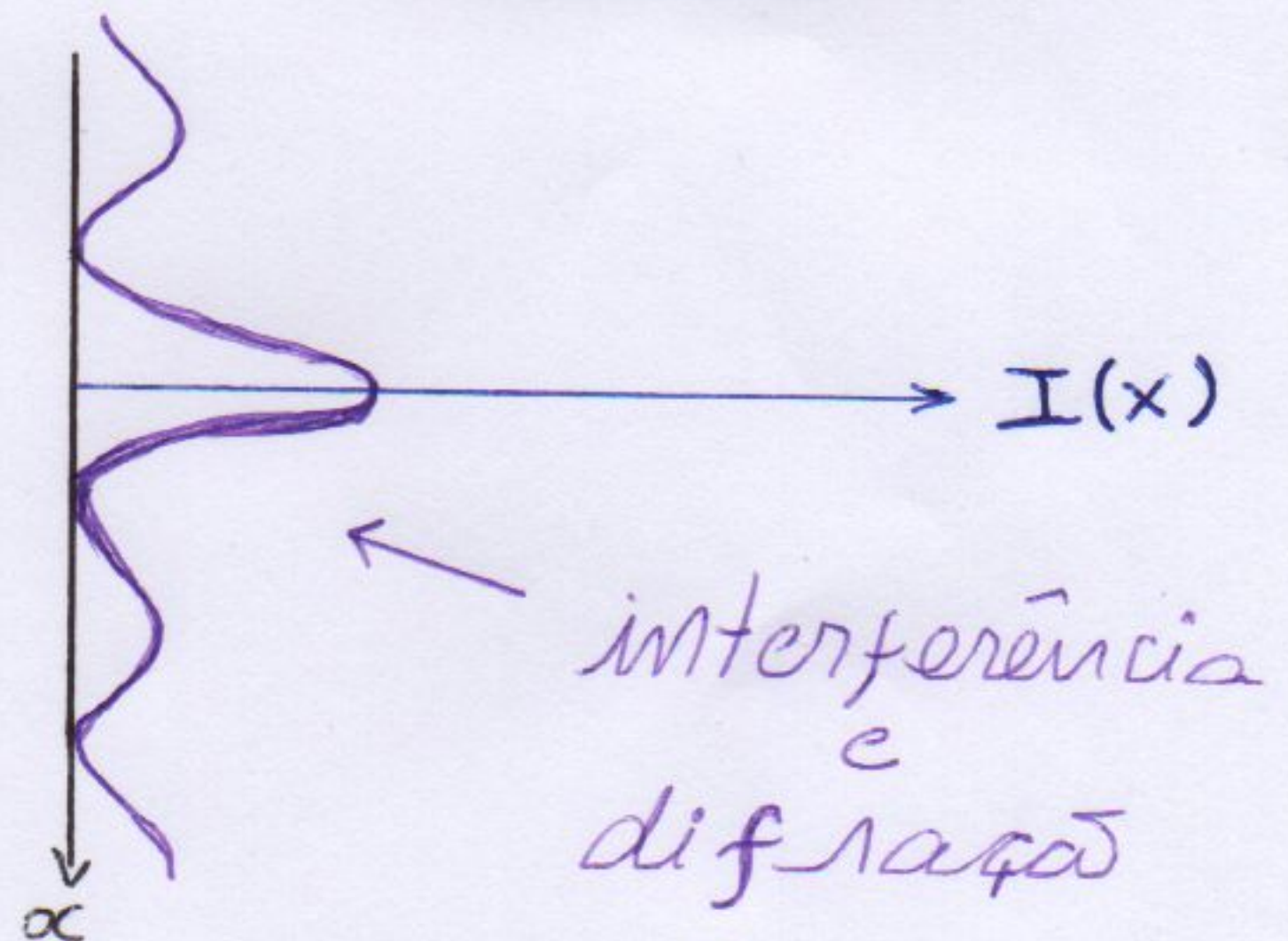
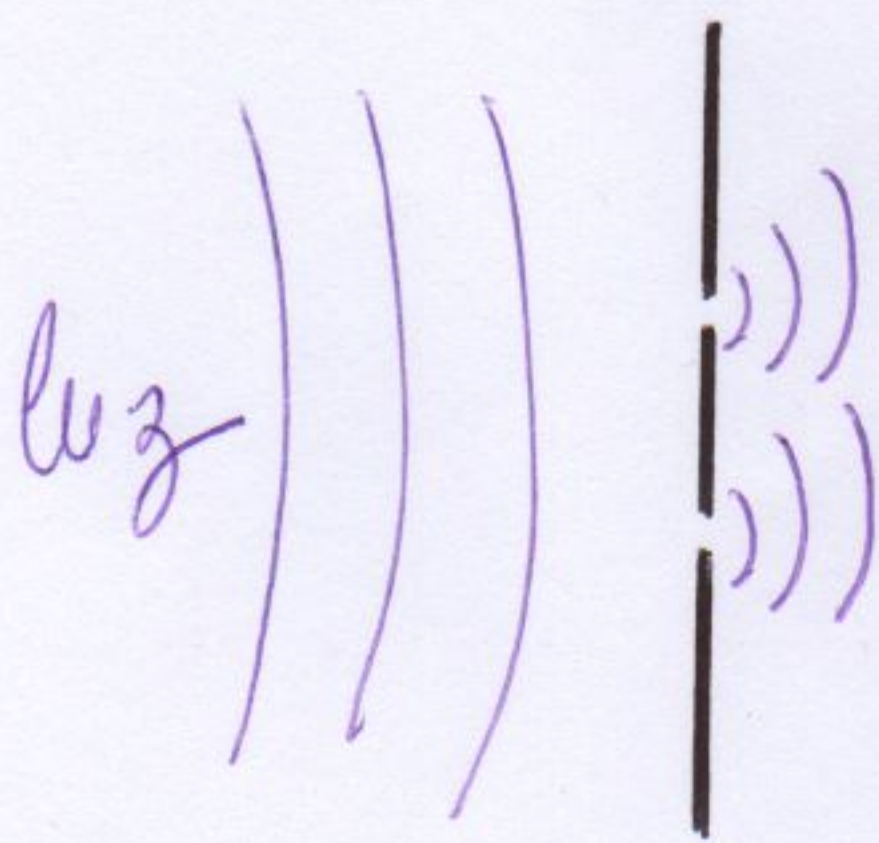
$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

$$E = \frac{pc^2}{v=c} = pc$$

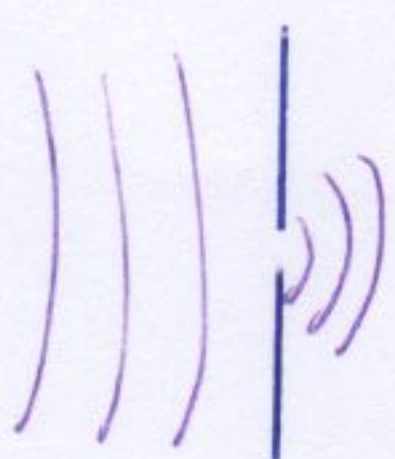
$$\Rightarrow \underline{p = \frac{h}{\lambda}}$$

ou seja,
o fóton carrega
momento e energia,
logo,
é uma partícula

Mas no experimento de Young, sec. 19,
a luz definitivamente era onda!



"Qualquer tentativa de se medir por qual
fenda o fóton passou destrói o padrão
de interferência."



aqui não há
interferência

Então, o fóton tem carácter dual

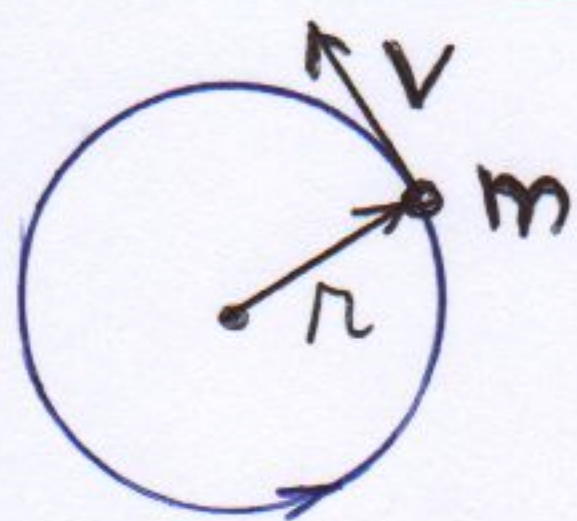
Louis Victor de Broglie - 1924

"a dualidade onda-partícula é uma manifestação universal"

isto é, vale n/ $\forall$ partícula de massa m :

hipótese $p = \frac{h}{\lambda} \rightarrow \underline{\underline{\lambda = \frac{h}{p}}}$

Interpretando a quantização de Bohr:



$$L = r \cdot p$$

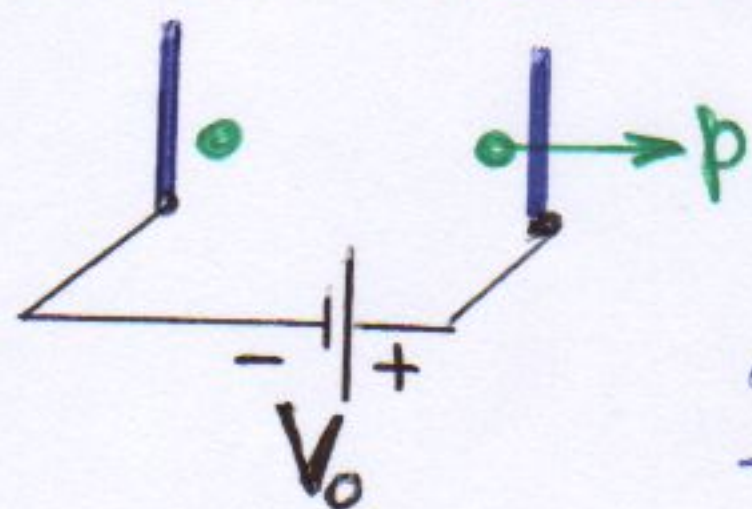
$$m \cdot \frac{h}{2\pi} = r \cdot \frac{h}{\lambda} \rightarrow \underline{\lambda \cdot m = 2\pi r}$$

"as órbitas especiais de Bohr são aquelas cujo perímetro encaixa um n° inteiro de λ "

Valores típicos de λ

• grão de poeira: $m \sim 10^{-15} \text{ Kg}$, $v \sim 1 \text{ mm/s} \rightarrow \lambda \sim 10^{-6} \text{ \AA}$

• elétron acelerado:



$$E = \frac{p^2}{2m} = eV_0 \rightarrow p = (2meV_0)^{1/2}$$

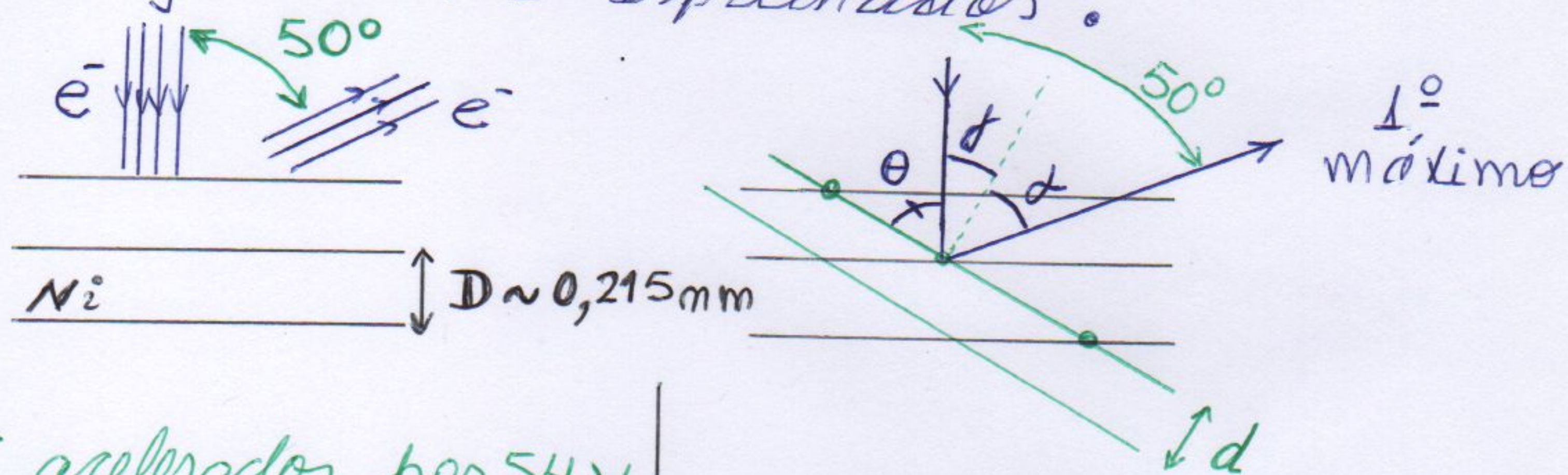
$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{(2mc^2eV_0)^{1/2}}$$

ou $\lambda = \frac{1,226}{V_0^{1/2}} \text{ em nm}$; $p / V_0 = 10 \Rightarrow \lambda \sim 0,4 \text{ nm}$
 $\Downarrow$
espaçamento cristalino

Davissom e Germer, 1927

Estudam (desde 1921 Kunsman) espalhamento de elétrons em superfície de Ni.

Descobrem (mas não era isso que estavam procurando) máximos e mínimos na contagem dos e^- espalhados:



e^- acelerados por 54V

$$\lambda = \frac{1,226}{\sqrt{54}} \approx \underline{\underline{0,167 \text{ nm}}}$$

interpretando tipo onda
- Bragg -

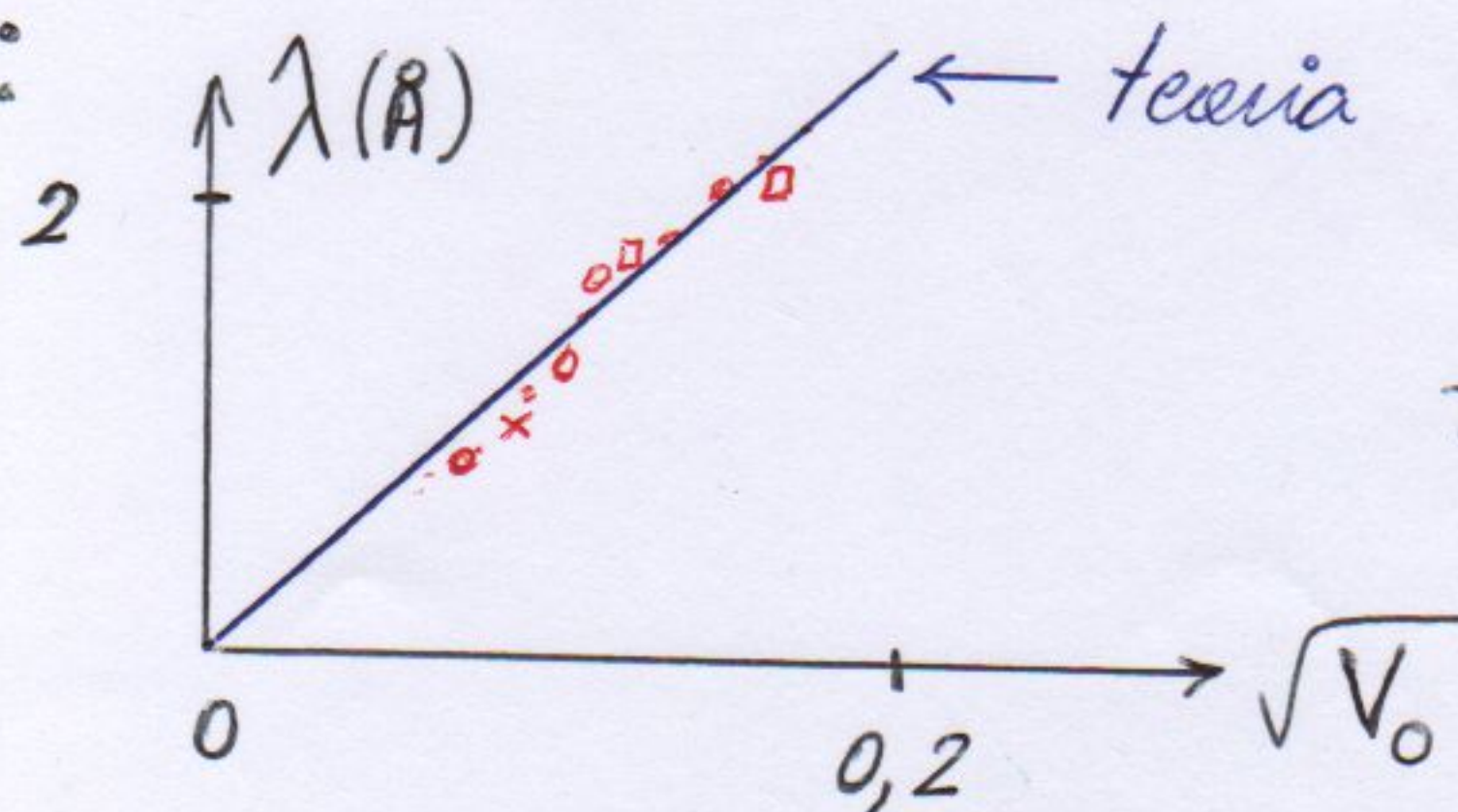
$$m\lambda = 2d \sin \theta, \quad m=1$$

$$d = D \sin \alpha, \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$\phi = 2\alpha$$

$$\lambda = D \sin \phi \approx \underline{\underline{0,165}}$$

Outro teste:



Tipler, Fig. 5.5

1927, G. P. Thomson (filho de J. J. Thomson)

usou e^- relativísticos (40 KeV) para
mostrar difração - Nobel (com Davisson) em 1937

1930, Stern e Estermann espalham átomos
e moléculas em cristais (LiF).

1949, Fabrikant passa um e^- de cada vez
num difratômetro e obtém,
após N e^- ,
padrão de interferência.

A onda de de Broglie

- Annales de Physique, 1924
- Comptes Rendus, 1924

Parecia evidente, experimentalmente, que havia uma onda associada a cada partícula material:

1. que onda é essa?
2. qual sua equação?
3. e que ela faz nesse?

Elaborando:

pt partícula livre

No referencial de repouso da partícula,

$$E_0 = mc^2 \Rightarrow \nu_0 = \frac{E_0}{h} = \frac{mc^2}{h} \left(= \frac{c}{\lambda_c} \right)$$

A esta frequência estaria relacionada um processo periódico descrito por uma oscilação:

$$\psi_0 = e^{-i\omega_0 t_0}, \quad \omega_0 = 2\pi\nu_0,$$

onde t_0 é o tempo próprio (no referencial da partícula).

pt um observador em que a partícula tem velocidade v ,

$$t_0 = \gamma(t - vx/c^2),$$

portanto,

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{1/2}$$

$$\psi = e^{-i 2\pi \nu_0 (t - x v/c^2)}$$

Mas

$$\nu = \frac{E}{h} = \frac{\gamma E_0}{h} = \gamma \nu_0$$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma mc^2 = \gamma E_0$$

Então,

$$\psi = e^{-i 2\pi \nu (t - x v/c^2)} \equiv e^{i(Kx - \omega t)},$$

sendo

$$K \equiv 2\pi \frac{v}{c^2} \nu \quad \text{e} \quad \omega = 2\pi \nu$$

Isso implica que

$$\lambda = \frac{2\pi}{K} = \frac{c^2}{v \cdot \nu} = \frac{\gamma m}{\gamma m} \frac{c^2}{v \nu} = \frac{E}{p \cdot \nu} = \frac{h}{p}$$

$$\text{ou} \quad p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi/K} = \hbar K$$

$$\psi = e^{i(p x - E t)/\hbar}$$

onda plana!

Problemas:

1 - onda plana se estende de $-\infty$ a $+\infty$,
enquanto uma partícula é localizada!

2 - velocidade de fase:

$$E = p^2 c^2 / v$$

$$v_F = \frac{\omega}{K} = \frac{\hbar \omega}{\hbar K} = \frac{E}{p} = \frac{c^2}{v} > c$$

$$v = \lambda \cdot \nu = 2\pi/K \cdot \nu = \omega/K$$

A ideia, é para representar um corpo localizado, usamos um pacote de ondas:

$$\psi = \sum_j a_j e^{i(k_j x - \omega_j t)} \Rightarrow \int a(k) e^{i(kx - \omega t)} dk$$

sendo que cada componente obedece

$$E = (p^2 c^2 + m^2 c^4)^{1/2} \Rightarrow \hbar \omega = (\hbar^2 k^2 c^2 + m^2 c^4)^{1/2}$$

Assim,

$$V_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{dp} = \dots = \frac{pc^2}{E} = v \quad \checkmark$$

Se for $\bar{m}$ relativístico:

$$E = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow \hbar \omega = \frac{(\hbar k)^2}{2m}$$

$\therefore$

$$V_F = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar k^2 / 2m}{k} = \frac{\hbar k}{2m} = \frac{v}{2} \quad ?$$

$$V_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk} \left(\frac{\hbar k^2}{2m} \right) = \frac{\hbar k}{m} = v \quad \checkmark$$

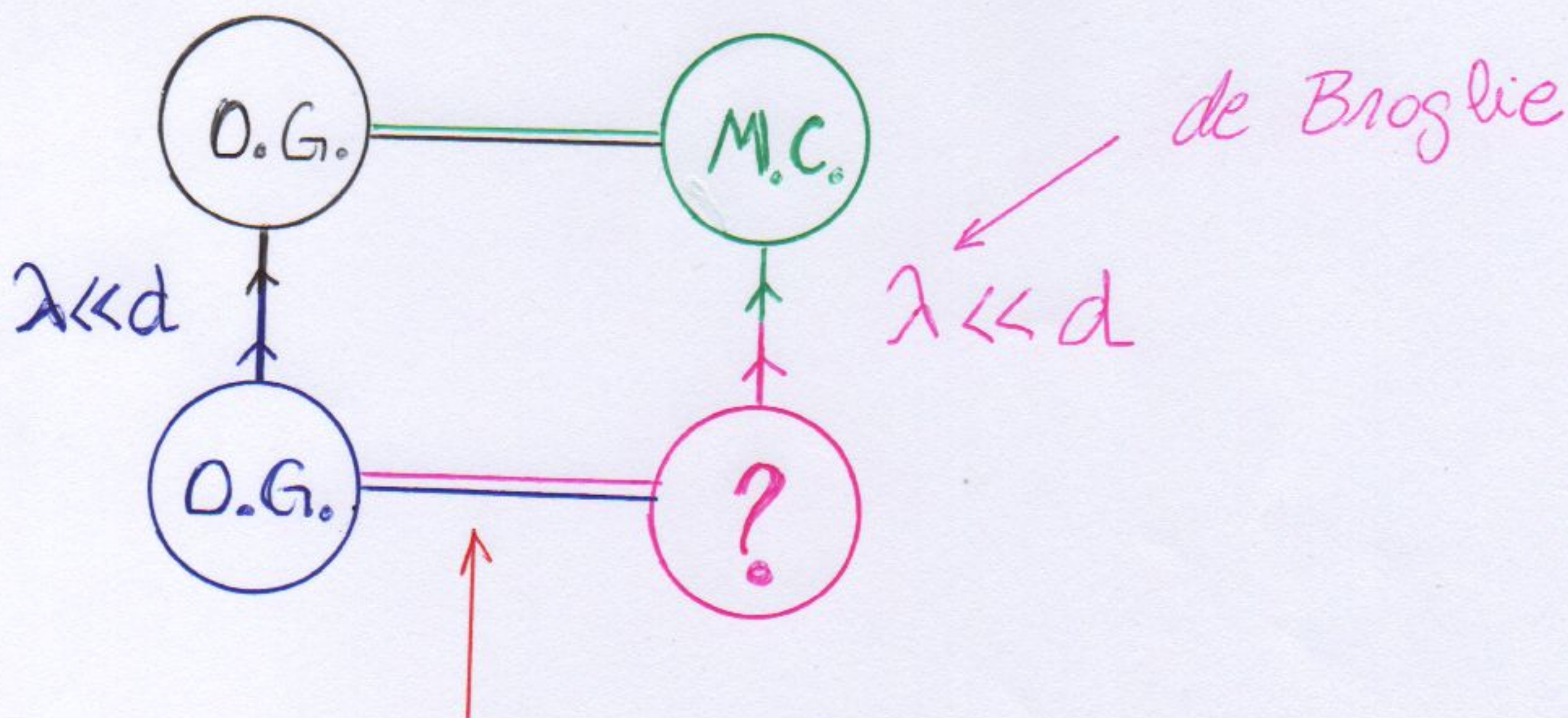
Schrödinger - 1925

1835, Hamilton estabelece analogia entre Ótica Geométrica e Mec. Clássica

"a trajetória de uma partícula num potencial $V(\vec{r})$ é idêntica à trajetória de um raio de luz num meio com índice de refração $n(\vec{r}) \sim \sqrt{E - V(\vec{r})}$."

"a ótica geométrica é um limite da ótica ondulatória, em que

luz $\nearrow \lambda \ll d$ tamanho típico de obstáculos



a correspondência deve se basear na evidência de existir uma onda associada à matéria!

A Equação de onda

Jeito fácil

Queremos uma Eq. diferencial p/ ψ ,
tipo Eq. de onda com ∂_t e ∂_x

P/ partícula livre $\psi = e^{i(Kx - \omega t)}$

e no caso NÃO relativístico devemos ter

$$E = \hbar\omega = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

Vem de $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$ Vem de $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$

Proposta: $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V_0 \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$

de fato, subst. $\psi = e^{i(Kx - \omega t)}$,

$$\frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V_0 = \hbar\omega = E \quad \checkmark$$

Generalizando

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V(\vec{r}, t) \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

Schrödinger, 1925

NÃO foi do jeito acima que ele fez!

M. Clássica como limite da Mec. Quântica

¶ uma partícula livre, $\psi = e^{iS/\hbar}$, onde

$$S = p x - E t, \text{ Veja que } p = \frac{\partial S}{\partial x} \text{ e } E = -\frac{\partial S}{\partial t}$$

↑
ação

Adotemos $\psi = e^{iS/\hbar}$ em geral:

$$\psi = e^{iS/\hbar} \Rightarrow \frac{1}{2m} \left(\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 - i\hbar \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \right) + V(x) = -\frac{\partial S}{\partial t} \quad (1)$$

Na teoria de Hamilton-Jacob,

$$H(p, x, t) = E \quad \text{e} \quad S / \quad p = \frac{\partial S}{\partial x} \quad \text{e} \quad E = -\frac{\partial S}{\partial t}.$$

Então, $H\left(\frac{\partial S}{\partial x}, x, t\right) = -\frac{\partial S}{\partial t}$, ou

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + V(x) = -\frac{\partial S}{\partial t} \quad (2)$$

Comparando (1) e (2) Mec. Clássica vde

Se $\hbar \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \ll \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 \Rightarrow \hbar \frac{dp}{dx} \ll p^2$

ou $\frac{\Delta p}{p} \ll 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda}$, $\lambda = \frac{h}{p}$.

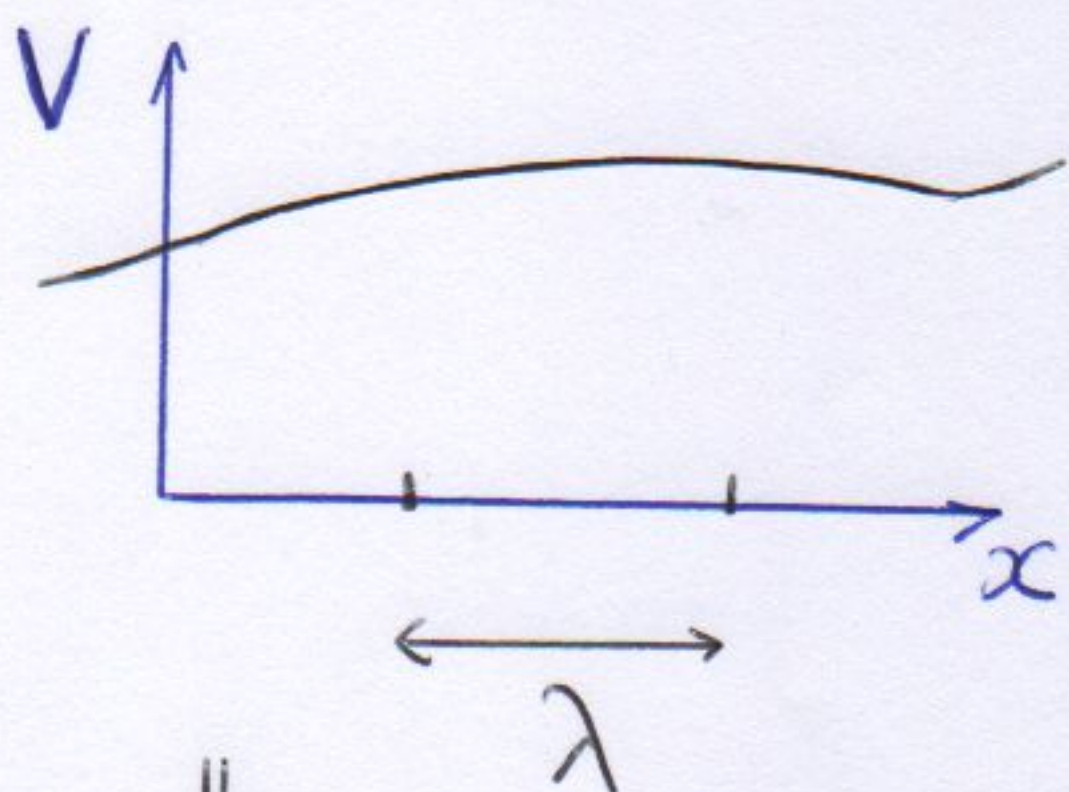
É claro que M.Q. vcai em M.C.

qdo $\hbar \rightarrow 0$

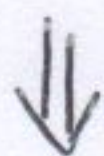
, ou

Quando Mec. Clássica Vale

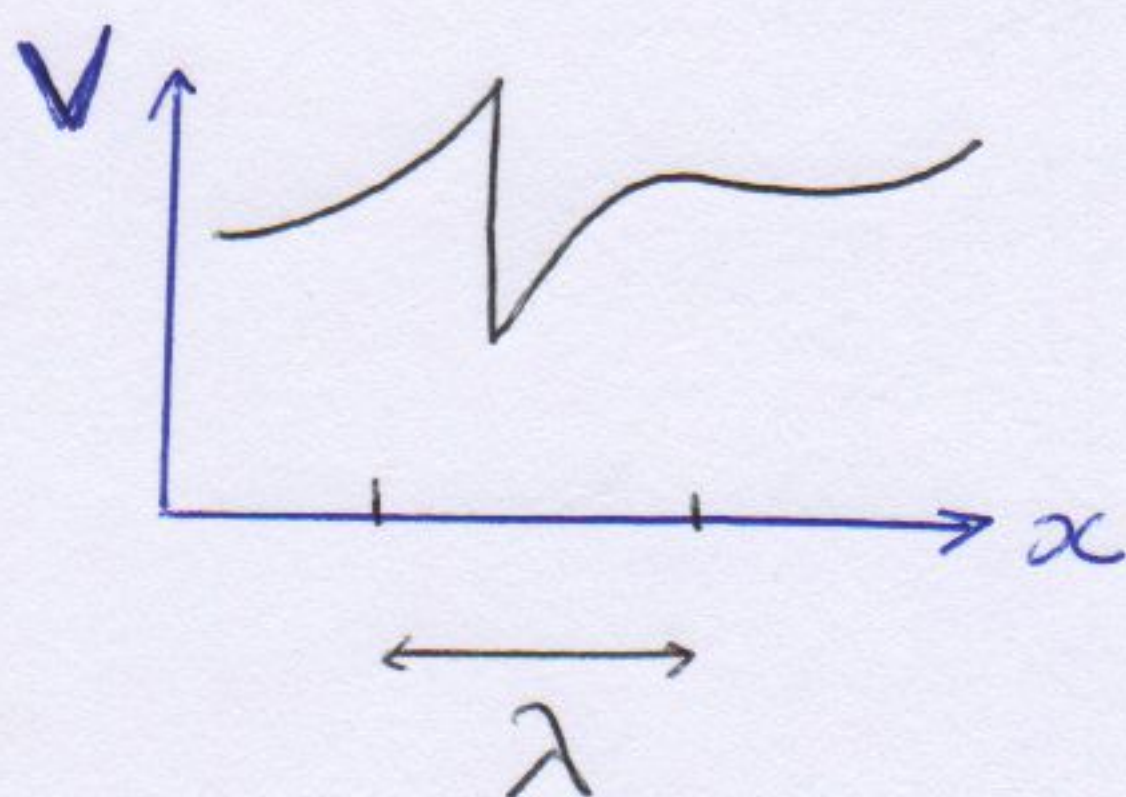
$$F = -\frac{dV}{dx}$$



$$\Delta p \ll p$$



M. Cl. Vale



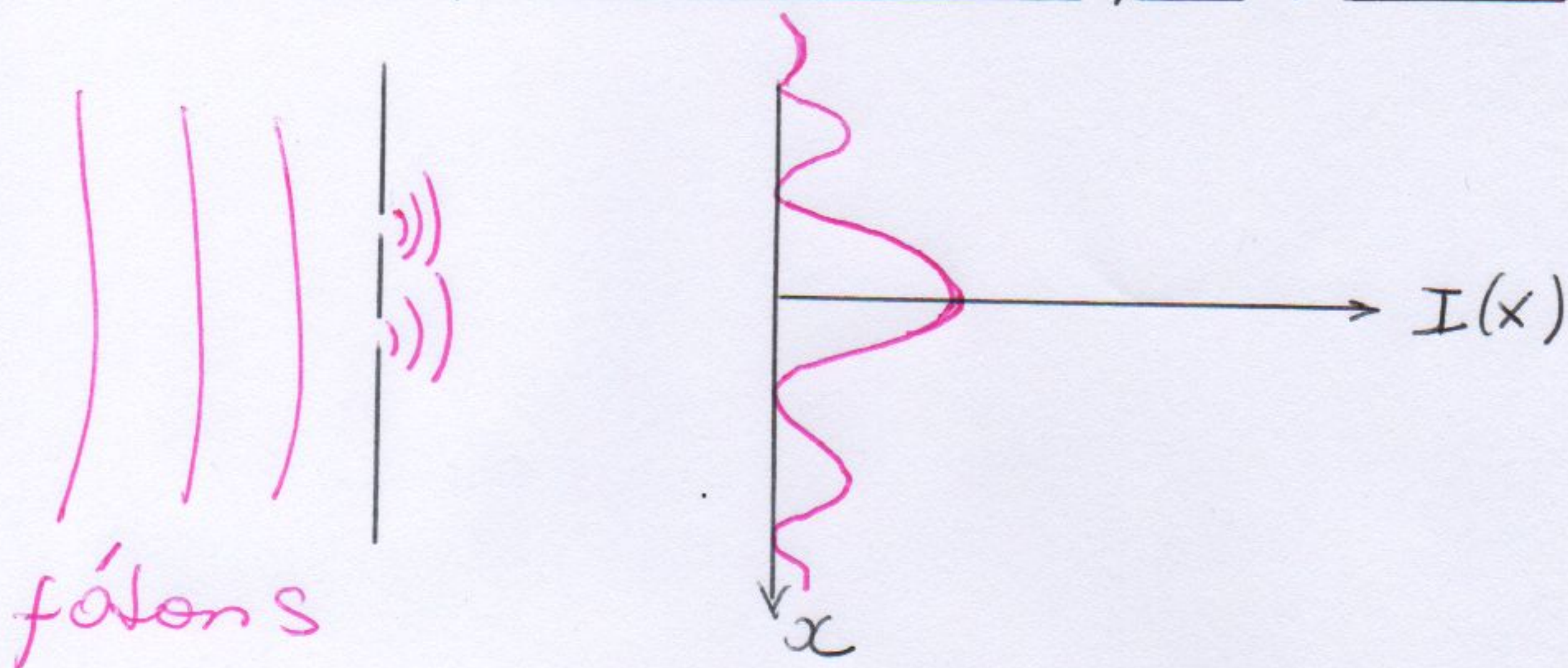
$$\Delta p \gtrsim p$$

M. Q. imprescindível

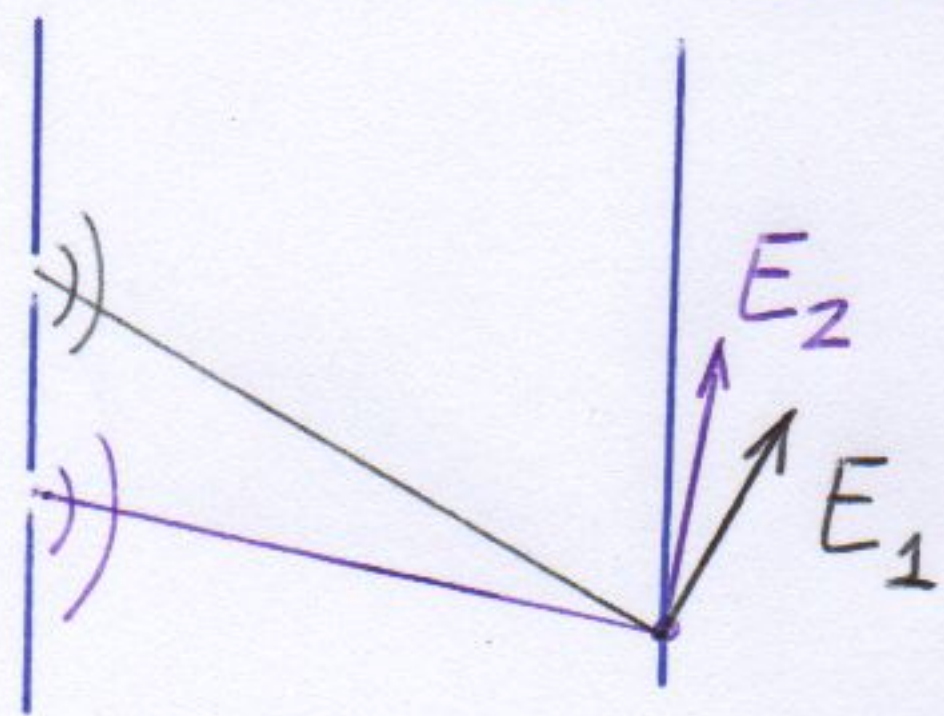
"M. Quântica é imprescindível se o potencial variar apreciavelmente dentro de uma região da ordem de λ ."

Mas a final, que onda é essa?

o experimento da dupla fenda



Pl fótons a intensidade I é o brilho,
e é proporcional à amplitude ao
quadrado do campo elétrico:



$$I \sim |E|^2 = |\vec{E}_1 + \vec{E}_2|^2 \\ = |E_1|^2 + |E_2|^2 + 2 \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2$$

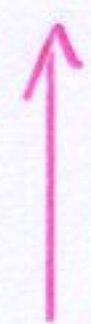
interferência vem daqui

$$I = I_1 + I_2 + \text{positivo ou negativo}$$

Max Born 1926:

maior brilho significa maior nº de fótons $\rightarrow$ maior probabilidade de
de achar um fóton!

$$P(x) \sim I(x) \sim |\vec{E}|^2 = |\vec{E}_1 + \vec{E}_2|^2$$



↑
ondulatório

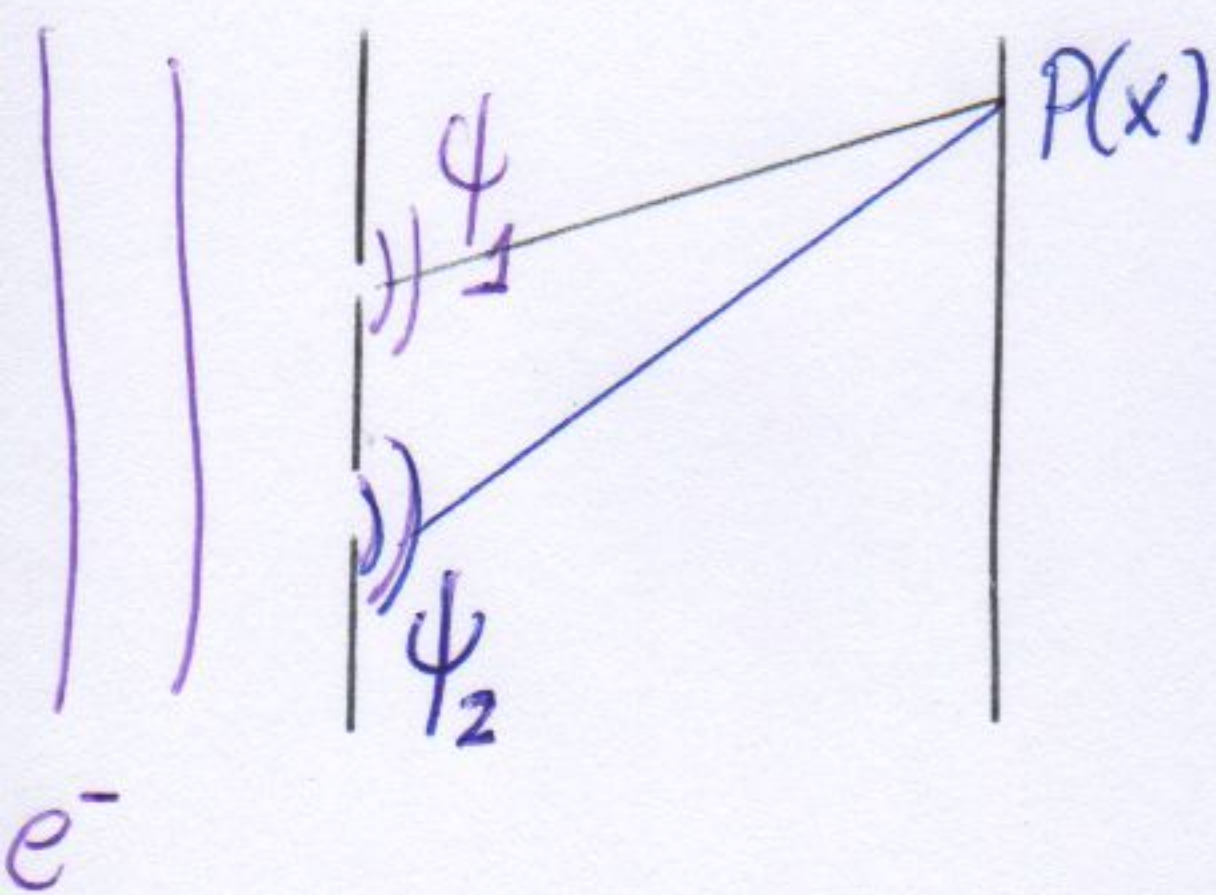
↑
interferência

probob., em
no de fótons

Extrapolando p/ e^- :

como tb temos um padrão de interferência p/ elétrons, que tal procurar por uma grandeza ondulatória ψ tal que

$$P(x) = |\psi|^2 = |\psi_1 + \psi_2|^2 = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 +$$



$$+ (\psi_1^* \psi_2 + \psi_2^* \psi_1)$$

↑
este termo é
responsável pela
interferência!

como veremos $|\psi|^2$ é uma densidade de probabilidade:

$dP = |\psi|^2 dV$ é a probab. de se achar

uma partícula no Volume infinitesimal dV .

Princípios de Superposição e Incerteza

análise qualitativa

Eq. de Schrödinger p/ partícula livre em 1d

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad \psi = e^{i(kx - \omega t)}$$

Esta Eq. é linear, logo, tb são soluções

$$A e^{i(kx - \omega t)}, \quad A_1 e^{i(k_1 x - \omega_1 t)} + A_2 e^{i(k_2 x - \omega_2 t)},$$

$$\text{com } \frac{\hbar^2 k_1^2}{2m} = \hbar \omega_1 \quad \text{e} \quad \frac{\hbar^2 k_2^2}{2m} = \hbar \omega_2.$$

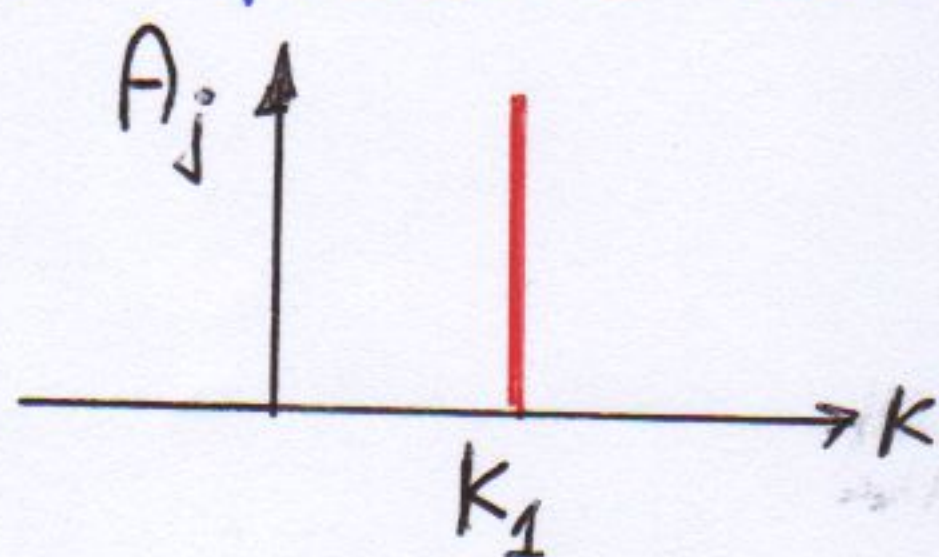
Portanto, tb é solução o pacote

$$\Psi(x, t) = \sum_j A_j e^{i(k_j x - \omega_j t)}, \quad \text{q/ } \frac{\hbar^2 k_j^2}{2m} = \hbar \omega_j.$$

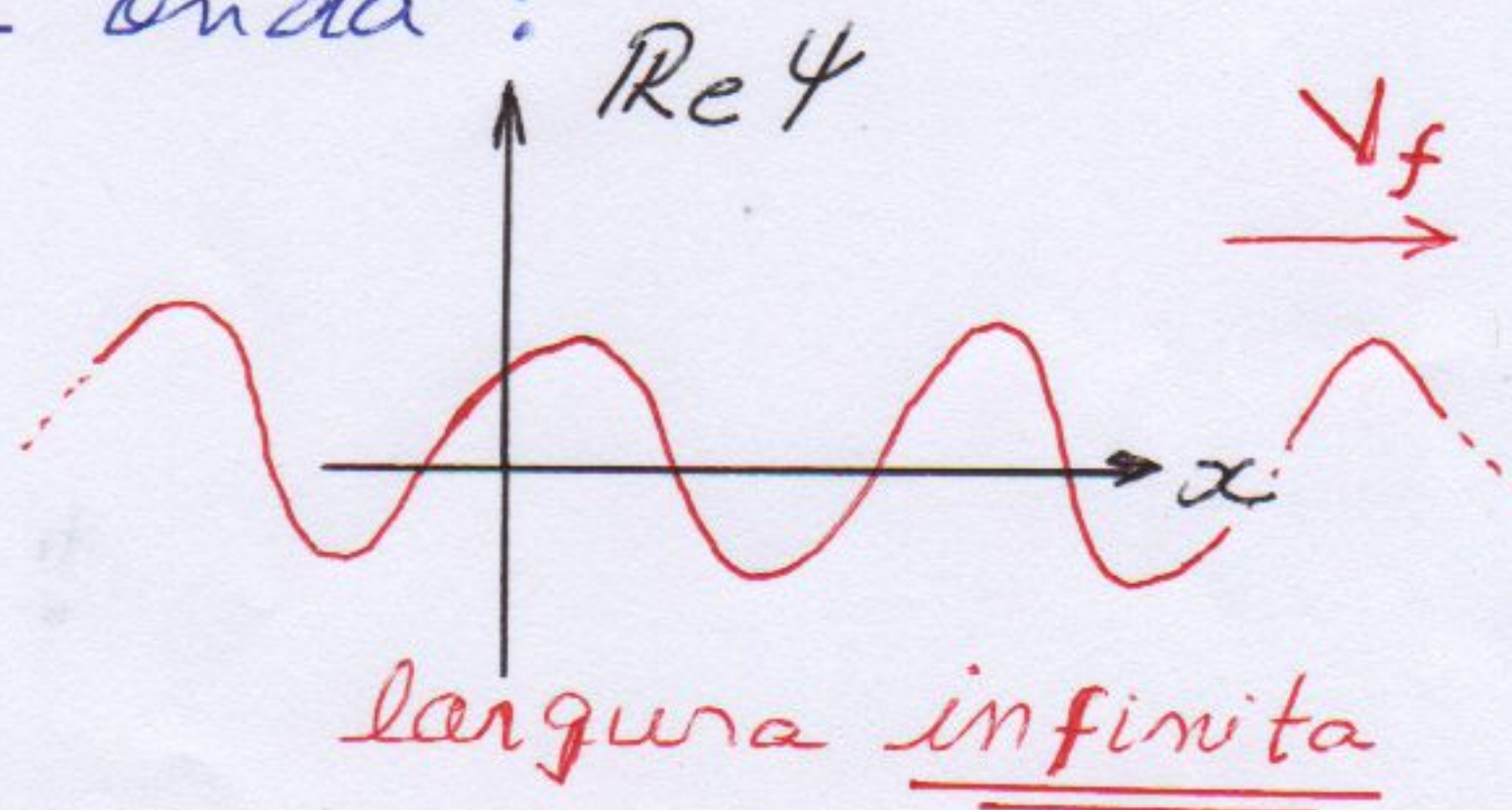
Um pacote, então, não tem k, ω ou E definidos.
Daí falarmos em incerteza nesses valores!

Casos particulares

1 - "pacote" com 1 onda:



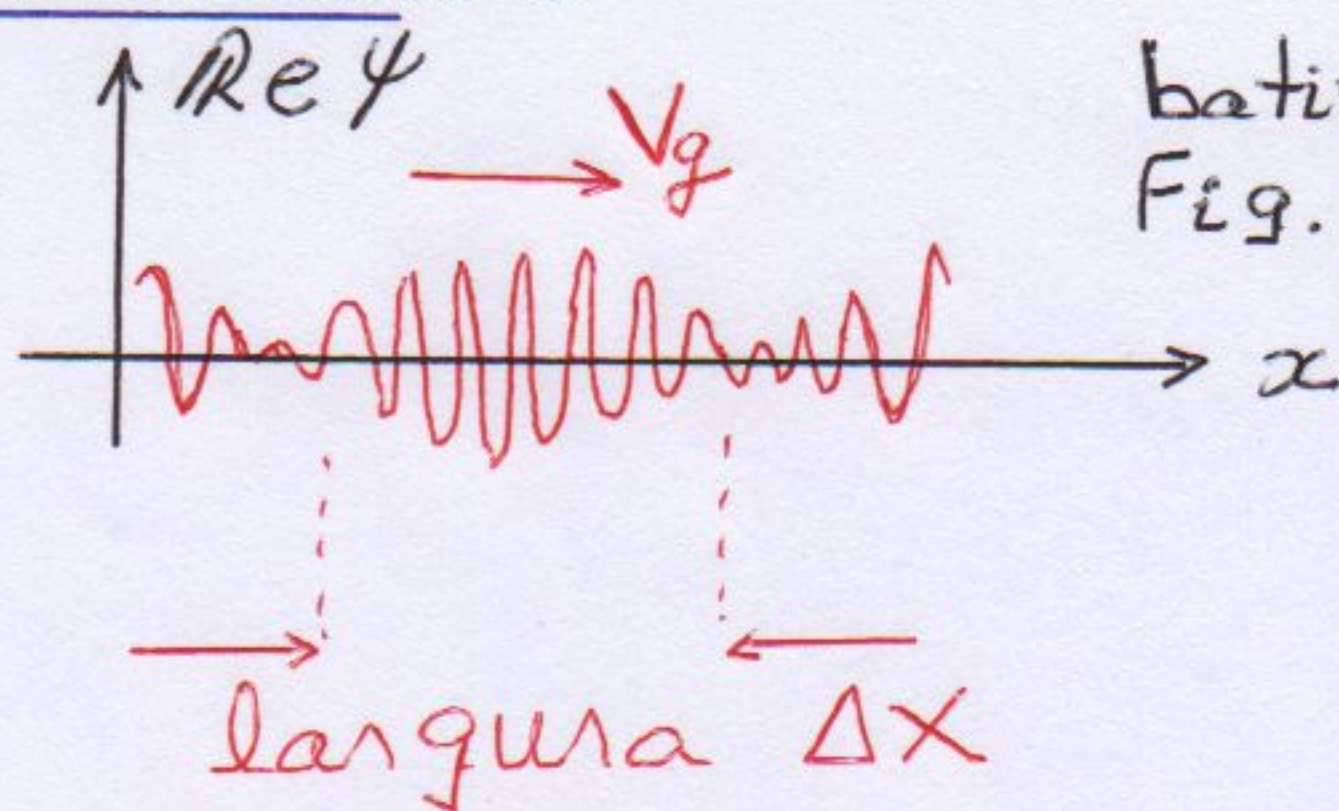
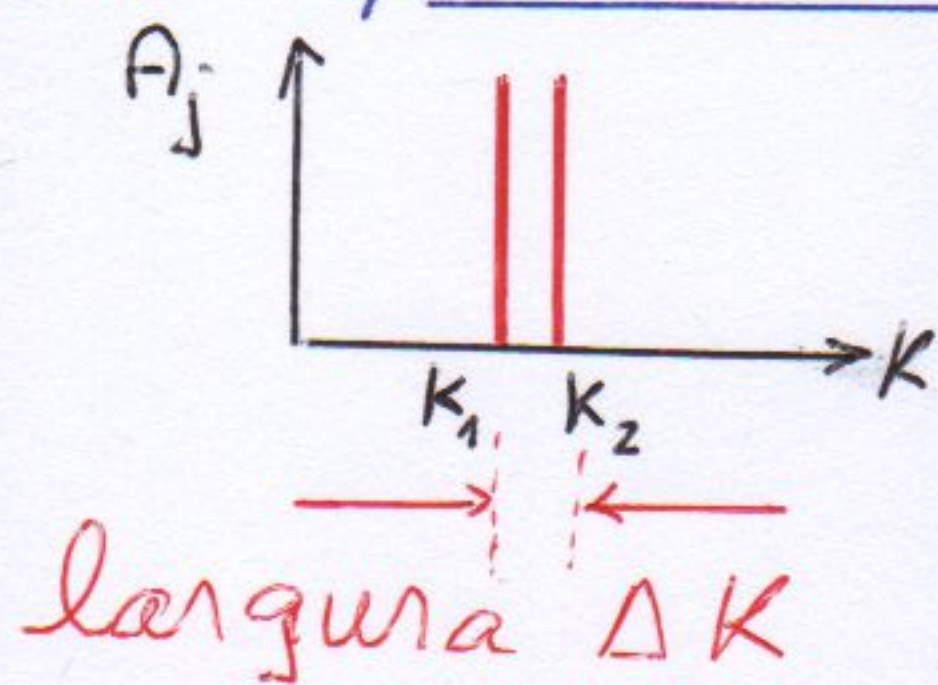
largura zero



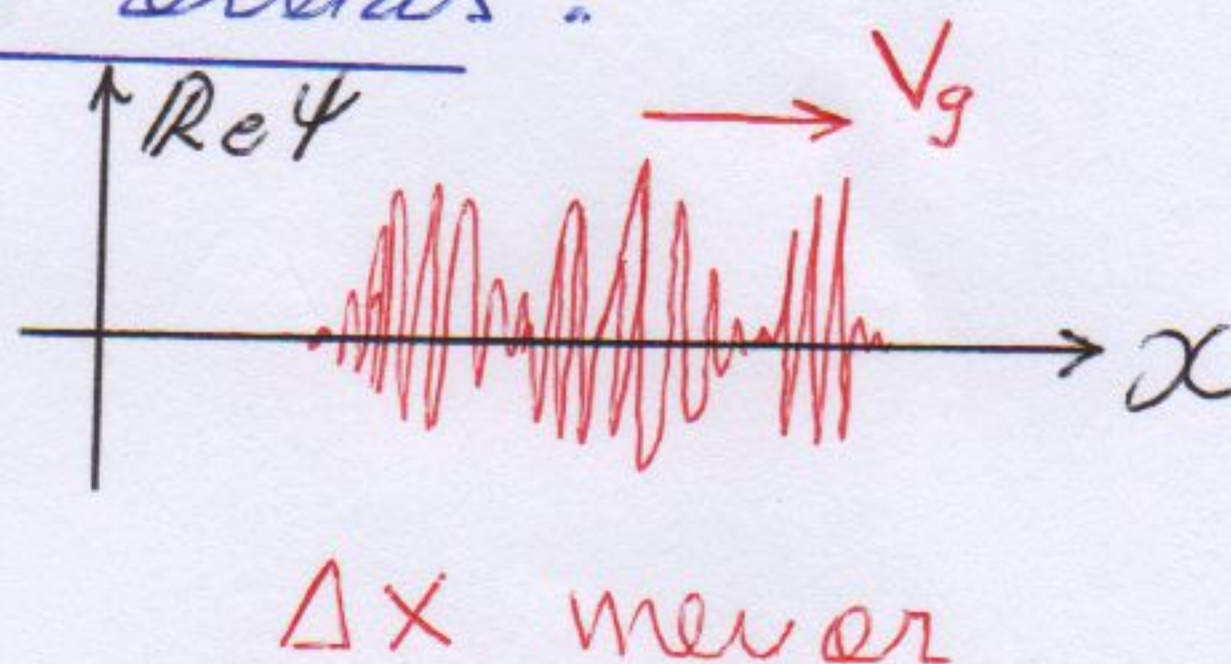
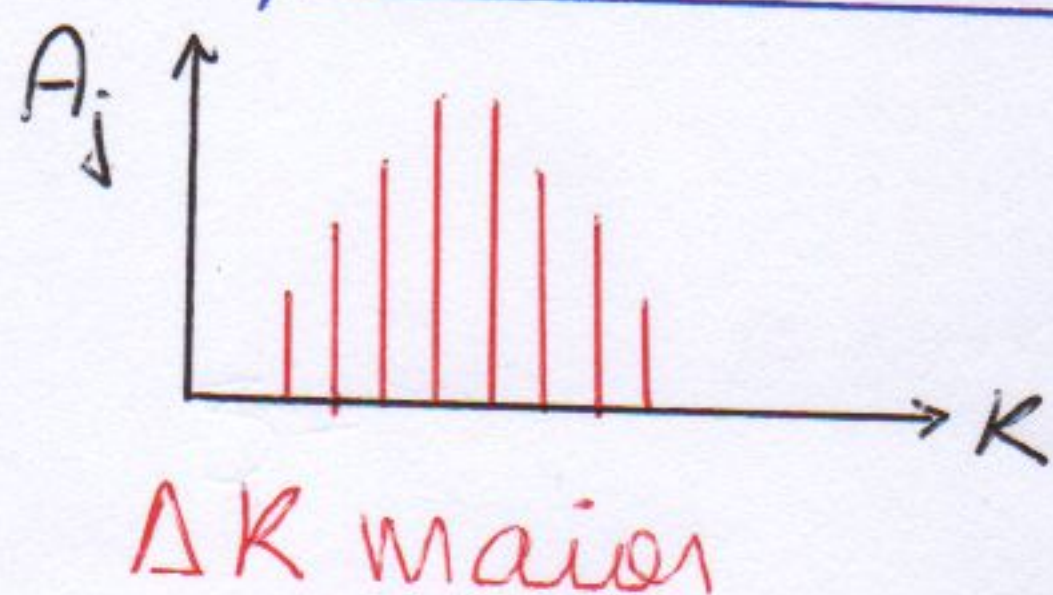
largura infinita

$$\text{Re } \psi = A_1 \cos(k_1 x - \omega_1 t)$$

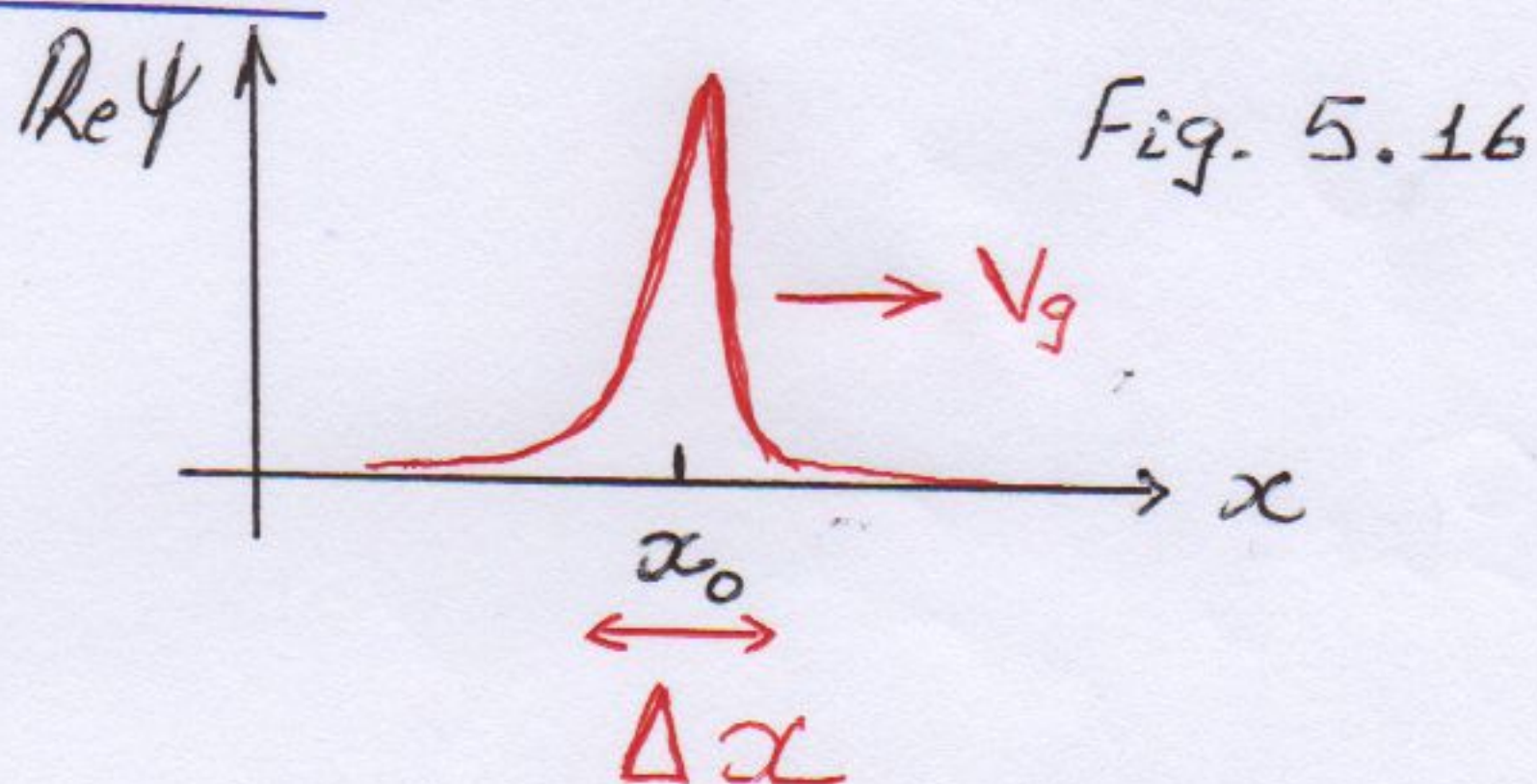
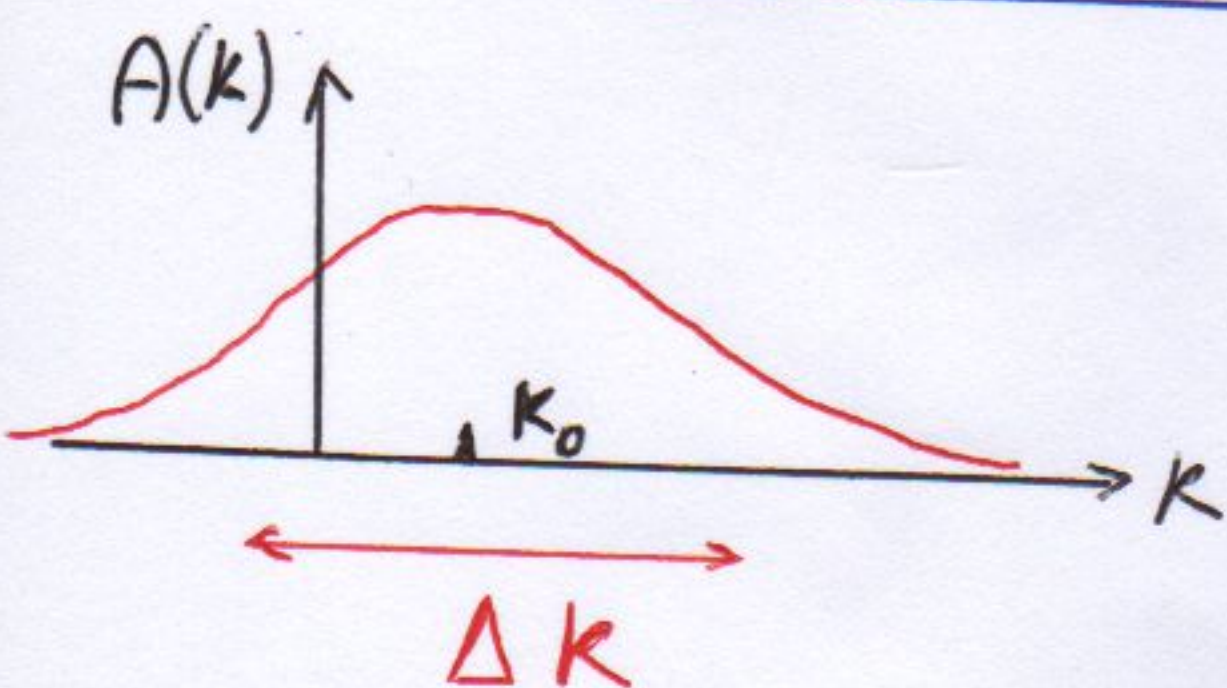
2 - pacote com duas ondas:



3 - pacote com N ondas:



4 - os k no contínuo



$$\Delta x \sim 1/\Delta k \rightarrow \Delta x \cdot \Delta k \sim 1$$

de $p = \hbar k$

$$\rightarrow \Delta x \Delta p \sim \hbar$$

$$\underline{\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar/2}$$

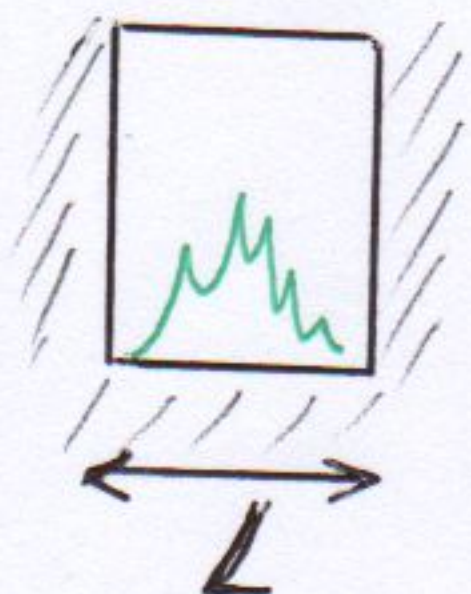
$$\Psi(x, t) = \int A(k) e^{i(kx - \omega t)} dk$$

$$A(k) = \int \Psi(x, 0) e^{-ikx} dx$$

↑ condição inicial

Consequências de $\Delta x \Delta p \sim \hbar$

- partícula confinada no espaço!



a partícula é representada pelo seu pacote de ondas

$$\Delta x \sim L \rightarrow \Delta p \sim \frac{\hbar}{L}$$

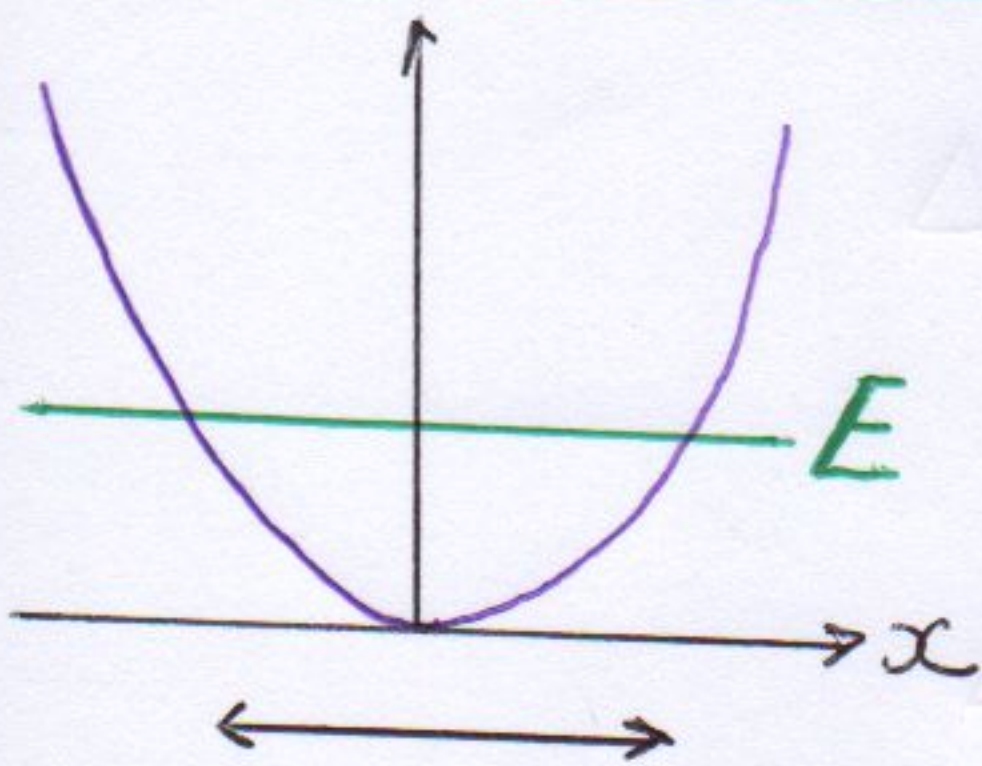
$$\Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \underbrace{\langle p \rangle^2}_0} = \sqrt{\langle p^2 \rangle}$$

$$E_c = \bar{E}_c = \frac{\langle p^2 \rangle}{2m} = \frac{(\Delta p)^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2mL^2} \neq 0 //$$

a) $m = 10^{-6} \text{ g}, L = 10^{-6} \text{ m} \rightarrow E_c \sim 10^{-29} \text{ eV}$

b) $m \sim 9 \cdot 10^{-31} \text{ Kg} \rightarrow E_c \sim 4 \text{ eV}$

- energia mínima de um oscilador



$$E = \bar{E} = \frac{\langle p^2 \rangle}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \langle x^2 \rangle$$

$$\Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \underbrace{\langle p \rangle^2}_0} = \sqrt{\langle p^2 \rangle}$$

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \underbrace{\langle x \rangle^2}_0} = \sqrt{\langle x^2 \rangle}$$

$\Delta x \equiv a$
 $\uparrow$
 $\Rightarrow \Delta p \sim \frac{\hbar}{2a}$

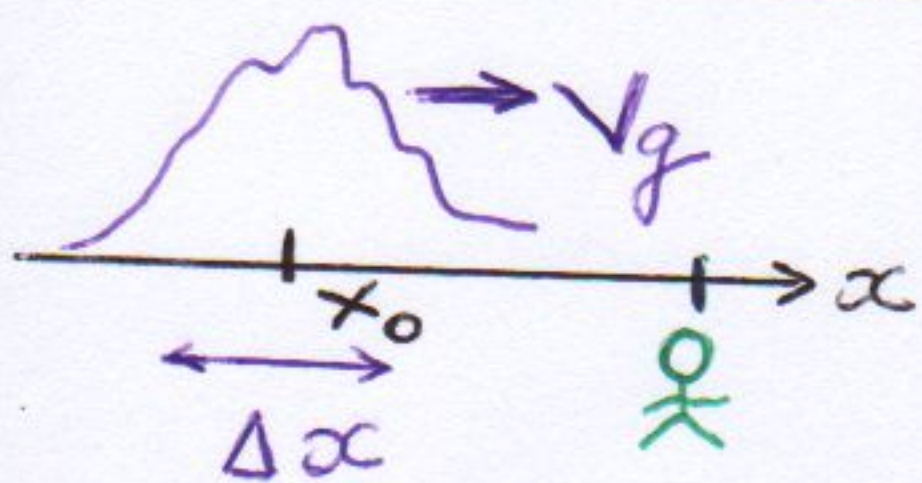
$$\rightarrow E = \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{2a} \right)^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 a^2$$

Energia mínima: $dE/da = 0 \Rightarrow a_m^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}$

$$E(a_m) = \frac{\hbar\omega}{2} //$$

← $\bar{m}$ é zero!

Incerteza tempo-energia



- o pacote caminha e/ velocidade v_g
- é composto de inúmeros k e ω , logo, tem Δk e $\Delta \omega$.

Para que Δk , ou $\Delta \omega$, ou ΔE sejam mensurados precisa que a parte central em torno de x_0 , e de largura Δx , passe; isso leva Δt segundos:

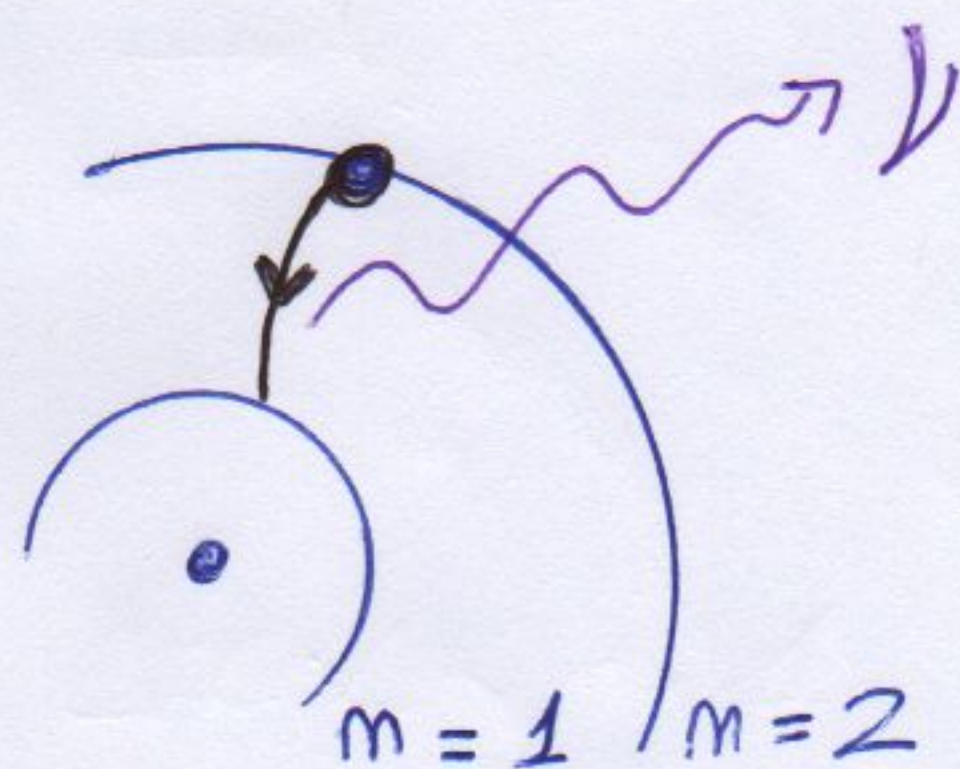
$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v_g} = \frac{\Delta x}{\Delta \omega / \Delta k} = \frac{\Delta x \cdot \Delta k}{\Delta \omega} = \frac{\Delta x \Delta p}{\hbar \Delta \omega} = \frac{\Delta x \Delta p}{\Delta E}$$

$$\therefore, \Delta E \Delta t \sim \Delta x \Delta p \sim \hbar$$

$$\underline{\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar/2}$$

Consequência

Seja a emissão de um fóton



$$\begin{aligned} \nu &= \frac{\Delta E_{2 \rightarrow 1}}{h} = \frac{1}{h} \frac{m e^4}{2 \hbar^2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2^2} \right) \\ &= \frac{1}{h} \frac{3}{4} \frac{m e^4}{2 \hbar^2} = \frac{3}{4} \frac{13,6}{4 \cdot 10^{-15}} \sim 10^{15} \text{ Hz} \end{aligned}$$

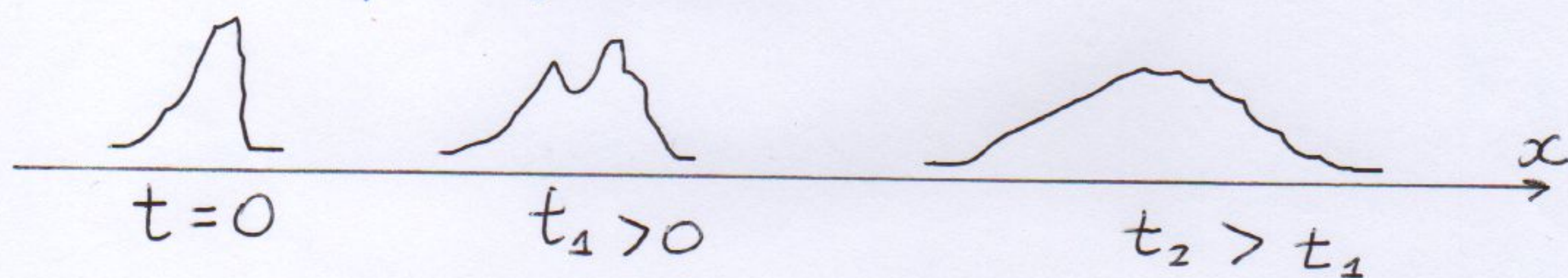
Tipicamente o e^- decai em $\Delta t \sim 10^{-8} \text{ s}$

$$\Rightarrow \Delta \nu = \frac{\Delta E}{h} \sim \frac{\hbar / \Delta t}{h} = \frac{1}{2\pi \Delta t} \sim 10^7 \text{ Hz}$$

Propagação de um pacote

$$\underbrace{\text{---}}_{K_1 \rightarrow V_1} + \underbrace{\text{---}}_{K_2 \rightarrow V_2} + \underbrace{\text{---}}_{K_3 \rightarrow V_3} + \dots = \text{---} \rightarrow V_g$$

Se cada componente do pacote viajar com diferente velocidade, o pacote se deforma com o tempo!



$$\lambda \nu = V_f \Rightarrow \frac{2\pi}{K} \nu = V_f \Rightarrow \omega = K V_f$$

$$V_g = \frac{d\omega}{dK} = V_f + K \frac{dV_f}{dK}$$

- Se $dV_f/dK = 0 \rightarrow$ meio $\bar{n}$ dispersivo
 - vácuo p/ a luz
 - ar p/ o som

- Se $dV_f/dK \neq 0 \rightarrow$ meio dispersivo
 - vidro p/ a luz

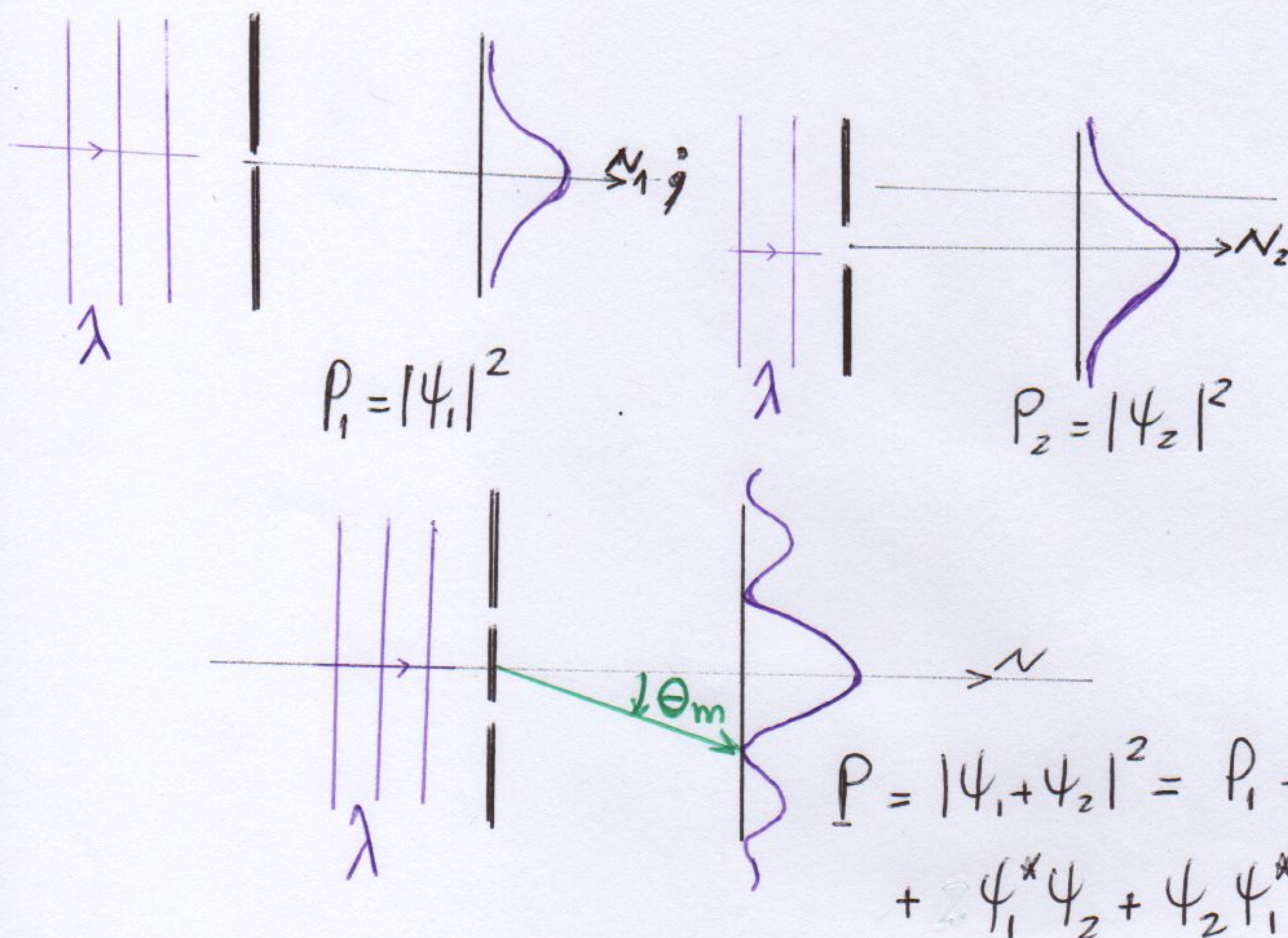
Em Quântica:

partícula livre: $\hbar \omega = \frac{\hbar^2 K^2}{2m}$

de $\lambda \nu = V_f \Rightarrow \frac{2\pi}{K} \nu = V_f \Rightarrow V_f = \frac{\omega}{K} \gg \frac{dV_f}{dK} = \frac{\hbar}{2m} \neq 0$

arco íris

o experimento da dupla fenda e o princípio da incerteza

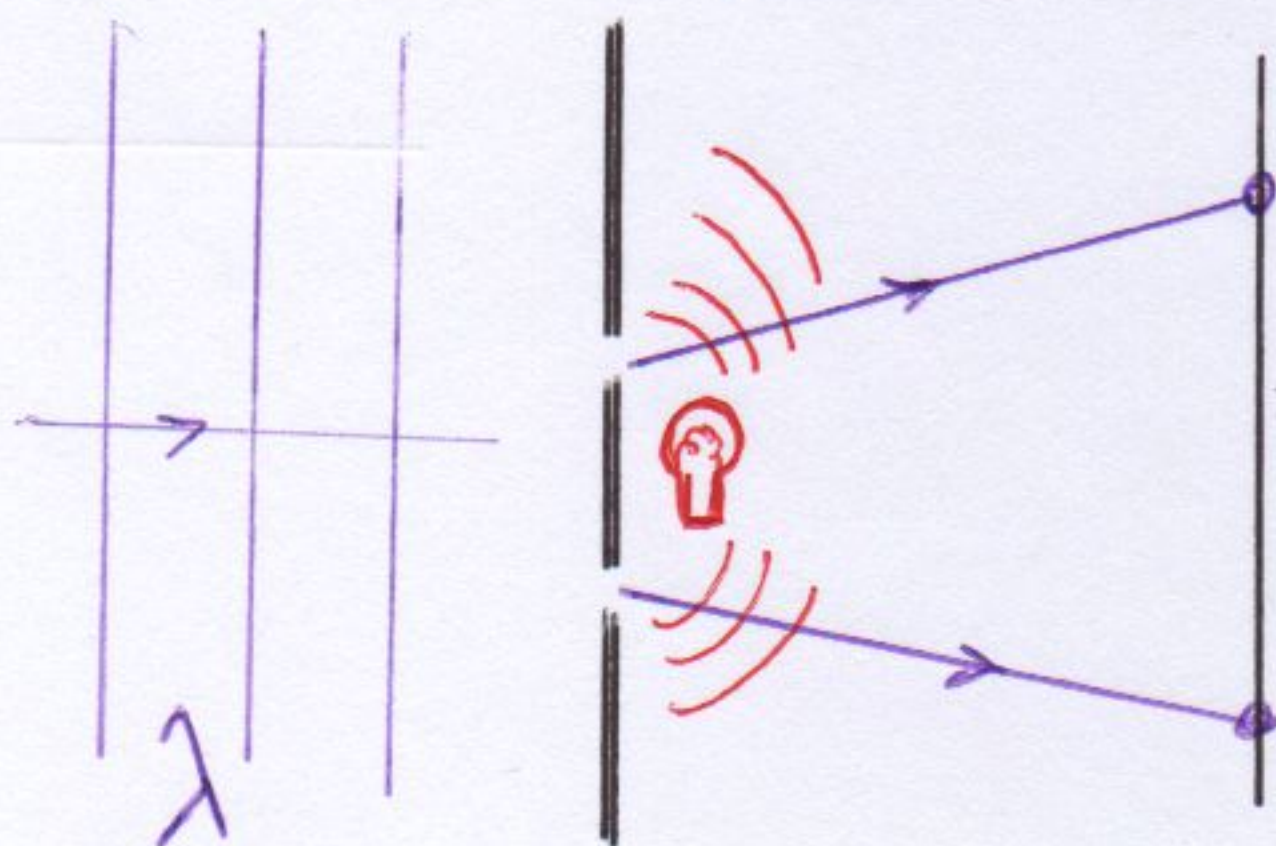


1º mínimo ocorre em
 $2d \sin \theta_m = \lambda$

Para simplificar a discussão, seja $\lambda \ll d \Rightarrow \theta_m = \frac{\lambda}{2d}$

Vamos tentar saber por qual
fenda o e^- passou

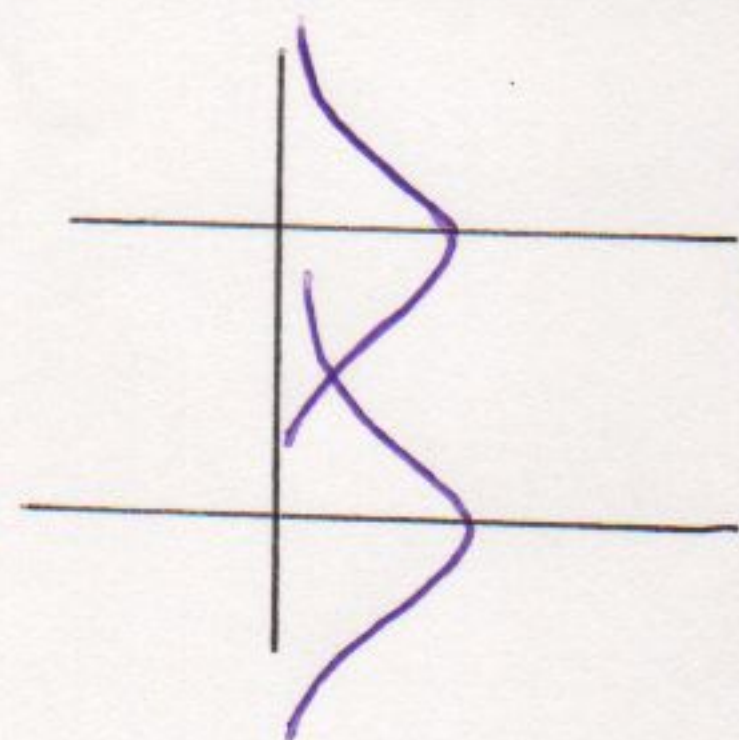
(invasão de privacidade elementar!)



ao passar por uma das
fendas aparecerá um
flash e então saberei
a trajetória do e^-
até o anteparo

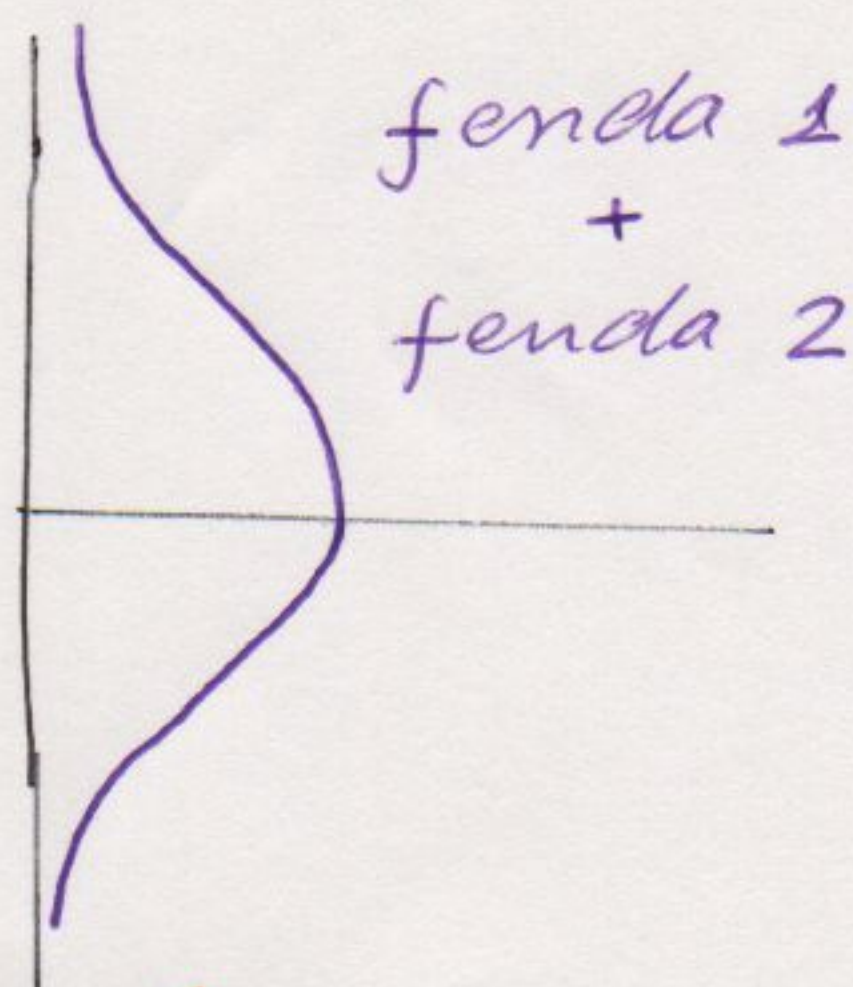
Sempre que um elétron é detectado aparece um único flash, da fenda 1 ou da 2.

Fazendo a contagem de e^-



que passaram
pela fenda 1

que passaram
pela fenda 2



n aparece interferência

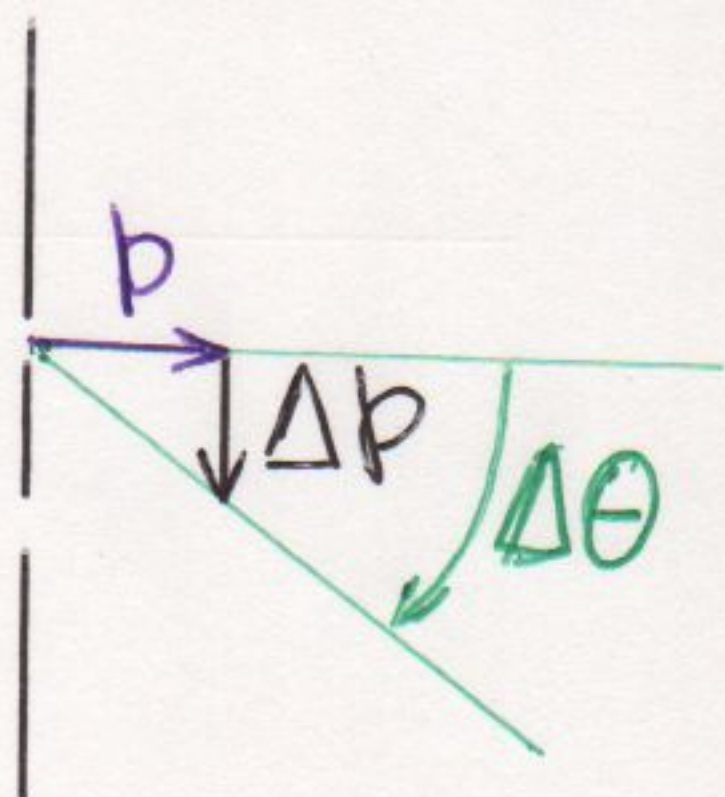
Note que aqui as 2 fendas estão abertas!

O ato de observar por qual fenda (ou qual trajetória) o e^- passou destrói o padrão de interferência.

A observação perturba incontavelmente!

(ou se ele tinha intenção de ir para um máximo, a observação o "chuta" para um mínimo)

A observação que o e^- passou por uma das fendas significa que sabemos sua localização com uma incerteza $\Delta x \sim d/2 \Rightarrow \Delta p > 2\hbar/d$



$$\Delta \theta \sim \frac{\Delta p}{p} = \frac{2\hbar/d}{h/\lambda} = \frac{\lambda}{\pi d} \sim \theta_m$$

→ o mínimo é invadido por elétrons
→ n há interferência