

MAT2456 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia IV

2o. Semestre de 2023 - 1a. Lista de exercícios

I) Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$.

a) Mostre que se $a, b \in \mathbb{R}$ e $0 \leq a < b$, então $\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b - a} < (n + 1)b^n$.

b) Deduza que $b^n[(n + 1)a - nb] < a^{n+1}$, para todos $n \in \mathbb{N}$ e $a, b \in \mathbb{R}$ com $0 \leq a < b$.

c) Use $a = 1 + 1/(n + 1)$ e $b = 1 + 1/n$ na parte b) para demonstrar que $(a_n)_n$ é crescente.

d) Use $a = 1$ e $b = 1 + 1/(2n)$ na parte b) para demonstrar que $a_{2n} < 4$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

e) Use as partes c) e d) para concluir que $a_n < 4$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Conclua, usando também c) que o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ existe.

II) (*Teorema do Confronto*) Sejam $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seqüências convergentes para $a \in \mathbb{R}$. Seja $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ outra seqüência para a qual existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \leq c_n \leq b_n$, para todo $n \geq N$. Prove que $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para a .

III) Decida se cada uma das seqüências abaixo é convergente ou divergente, calculando o limite no caso convergente.

1) $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \dots$

3) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{7}{8}, \dots$

5) $c_k = \frac{\sqrt{k+1}}{k-1}, k \geq 2$

7) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

9) $a_n = \frac{2n}{n+1} - \frac{n+1}{2n}$

11) $a_n = \frac{\sin n}{n}$

13) $a_n = \frac{2n + \sin n}{5n+1}$

15) $a_n = \sqrt[n]{n^2 + n}$

17) $a_n = \frac{3^n}{2^n + 10^n}$

19) $a_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$

21) $a_n = \frac{n!}{n^n}$

23) $a_n = (-1)^n + \frac{(-1)^n}{n}$

25) $a_n = (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3}) \dots (1 - \frac{1}{n})$

27) $a_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots (2n)}$

29) $a_n = \frac{n^\alpha}{e^n}, \alpha \in \mathbb{R}$

31) $a_n = \sqrt[n]{n!}$

33) $a_n = (\frac{n-1}{n})^n$

35) $a_n = (\frac{n+1}{n})^{\sqrt{n}}$

37) $a_n = (\frac{3n+5}{5n+1})^n (\frac{5}{3})^n$

2) $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{8}, 1, \frac{1}{16}, \dots$

4) $a_n = (4 + \frac{1}{n})^{\frac{1}{2}}$

6) $a_n = \frac{n^3 + 3n + 1}{4n^3 + 2}$

8) $a_n = \frac{n + (-1)^n}{n - (-1)^n}$

10) $a_n = n(\sqrt{n^2 + 1} - n)$

12) $a_n = \sin n; b_n = \sin(n\pi); c_n = \sin(\frac{n\pi}{2})$

14) $a_n = \frac{(n+3)! - n!}{(n+4)!}$

16) $a_n = \frac{n \sin(n!)}{n^2 + 1}$

18) $a_n = (\frac{n+2}{n+1})^n$

20) $a_n = na^n, a \in \mathbb{R}$

22) $a_n = n - n^2 \sin \frac{1}{n}$

24) $a_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}$ onde $0 < a < b$

26) $a_n = (1 - \frac{1}{2^2})(1 - \frac{1}{3^2}) \dots (1 - \frac{1}{n^2})$

28) $a_n = \sqrt[n]{n}$

30) $a_n = \frac{\ln(n)}{n^a}, a > 0$

32) $a_n = \sqrt[n]{a}, a > 0$

34) $a_n = (\frac{n+1}{n})^{n^2}$

36) $a_n = (\frac{3n+5}{5n+11})^n$

38) $a_n = (1 + \frac{1}{n^2})^n$

IV) Sejam $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seqüências numéricas. Decida se cada afirmação abaixo é verdadeira ou falsa. Justifique sua resposta.

- (1) Se $a_n \rightarrow a$ então $|a_n| \rightarrow |a|$.
- (2) Se $|a_n| \rightarrow |a|$ então $a_n \rightarrow a$.
- (3) Se $a_n \rightarrow a$ e $a_n \leq 0$ então $a \leq 0$.
- (4) Se $a_n \rightarrow a$ e $a_n > 0$ então $a > 0$.
- (5) Se $a_n \rightarrow a$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não converge então $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não converge.
- (6) Se $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não convergem então $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não converge.
- (7) Se $a_n \cdot b_n \rightarrow d$ então $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergem.
- (8) Se $a_n \cdot b_n \rightarrow 0$ então ou $a_n \rightarrow 0$ ou $b_n \rightarrow 0$.

V) 1) Sejam $A \subset \mathbb{R}$ e $f : A \rightarrow A$ uma função contínua em A e $a \in A$. Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência definida por: $a_0 \in A$ e $a_{n+1} = f(a_n)$, para todo $n \geq 0$ e suponha que $(a_n)_n$ converge para a . Prove que $f(a) = a$.

2) Considere a sequência $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}$, $a_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$, Verifique que a sequência é crescente e limitada superiormente por 2 e calcule seu limite.

3) Seja a sequência definida por recorrência da seguinte forma: $x_1 = \sqrt{2}$ e $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$, para $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 2$. Mostre que a sequência é limitada e crescente. Obtenha o seu limite.

4) (i) Diz-se que um ponto B de um segmento OA divide este segmento na *razão áurea* se $\frac{OA}{OB} = \frac{OB}{BA}$. (Diz-se também que B divide o segmento OA em *média e extrema razão*) Denota-se por φ a razão $\frac{OA}{OB}$. Mostre que φ é a raiz positiva da equação $x^2 - x - 1 = 0$, chamado *número de ouro*.

(ii) (*Sequência de Fibonacci*). Considere a sequência dada por $f_0 = f_1 = 1$ e $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$, para $n \geq 2$. Prove que a sequência $x_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$ converge e que seu limite é φ .

5) Considere a sequência $(\frac{p_n}{q_n})_{n \in \mathbb{N}}$, tal que $p_1 = q_1 = 1$ e, para $n \geq 2$, $p_n = p_{n-1} + 2q_{n-1}$ e $q_n = p_{n-1} + q_{n-1}$. Prove que a sequência é convergente e que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = \sqrt{2}$.

VI) Verifique a convergência ou divergência das seguintes sequências.

$$\begin{array}{lll}
 1) s_n = \sum_{r=1}^n \frac{1}{r^3} & 2) s_n = \sum_{r=1}^n \frac{1}{e^r} & 3) s_n = \sum_{r=3}^n \frac{1}{\ln r} \\
 4) a_n = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)} & 5) a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} & 6) a_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}.
 \end{array}$$

VII) Expresse as seguintes representações decimais como quociente de 2 inteiros

$$1) 1, \overline{29} \qquad 2) 0, \overline{3117}.$$

VIII) Seja (a_n) uma sequência qualquer dos dígitos 0,1,2,...,9. Mostre que a série

$$\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \dots$$

é convergente.

IX) Seja (a_n) uma sequência de números positivos tal que $\sum a_n$ diverge. Mostre que $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ também diverge.

X) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$, calcule $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1})$.

XI) Decida se cada uma das séries abaixo é convergente. Se possível, calcule sua soma.

$$\begin{array}{lll}
1) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10^n} + 2^n \right) & 2) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{\frac{k}{2}} \text{ para } 0 < t < 1 & 3) \sum_{n=0}^{\infty} u^n (1+u)^n \text{ para } |u| < 1 \\
4) \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) \text{ para } |x| < 1 & 5) \sum_{n=0}^{\infty} \sin^{2n} x \text{ para } |x| < \frac{\pi}{2} & 6) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^n \frac{n}{j} \right) \\
7) \sum_{n=1}^{\infty} \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) & 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} & 9) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{\sin k} \\
10) \sum_{s=1}^{\infty} \cos \left(\frac{1}{s} \right) & 11) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 + \cos k}{k} &
\end{array}$$

XII) É convergente ou divergente? Justifique.

$$\begin{array}{llll}
1) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-4}} & 2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2} & 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2} & 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n!)^\lambda}, \lambda > 0 \\
5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} & 6) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n} & 7) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln n}} & 8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+2}}{\sqrt[4]{n^3+3} \sqrt[5]{n^3+5}} \\
9) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n} \right) & 10) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n} & 11) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2} & 12) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}, p > 0 \\
13) \sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n^p} \right), p > 0 & 14) \sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{n} \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) & 15) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! 3^n}{n^n} & 16) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! e^n}{n^n} \\
17) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{k}}}{k^k} & 18) \sum_{n=1}^{\infty} 3^n \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2} & 19) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(\ln 2)^n} &
\end{array}$$

XIII) Decidir se a série converge absolutamente, condicionalmente ou diverge.

$$\begin{array}{llll}
1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} & 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\frac{3}{2}}} & 3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2+1}{n^3+3} & 4) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n} \\
5) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n} & 6) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln n)^2} & 7) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{\ln n} & 8) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n}} \\
9) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{n^p}, p > 0 & 10) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2} & 11) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}} &
\end{array}$$

XIV) Verifique as relações 1) e 2) abaixo e use-as para calcular as somas 3) - 7):

$$\begin{array}{lll}
1) \sum_{n=1}^{\infty} [f(n+1) - f(n)] = \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) - f(1), \text{ se o limite existir.} & & \\
2) \sum_{n=1}^{\infty} [f(n+1) - f(n-1)] = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(n) + f(n+1)] - f(0) - f(1), \text{ se o limite existir.} & & \\
3) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) & 4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \left(\frac{n}{n+2} \right) & 5) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin \left(\frac{1}{n} \right) - \sin \left(\frac{1}{n+1} \right) \right] \\
6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} & 7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \dots (n+k)}, (k \geq 2) &
\end{array}$$

XV) Determine os valores de $x \in \mathbb{R}$ para os quais as séries convergem.

$$\begin{array}{llll}
1) \sum_{n=1}^{\infty} x^n (1+x^n) & 2) \sum_{n=1}^{\infty} x^n \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right) & 3) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^{\ln x}} & 4) \sum_{n=1}^{\infty} n! x^n \\
5) \sum_{n=1}^{\infty} \left(x^n + \frac{1}{2^n x^n} \right) & 6) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-n \sin x} & 7) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^5} x^{2n} &
\end{array}$$

XVI) Determine o intervalo máximo de convergência de cada uma das séries de potências abaixo:

$$\begin{array}{lll}
\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n} x^n & \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} n! x^n & \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3 + 1} \\
\text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(2n)!} x^n & \text{e)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-5)^n}{n3^n} & \text{f)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+1) \ln^2(n+1)} \\
\text{g)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(2n)!} (x-7)^n & \text{h)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{e^n} (x-e)^n & \text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} (x+3)^n \\
\text{j)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{(2n+1)\sqrt{n+1}} & \text{k)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{4^n} (x-4)^{2n} & \text{l)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln n)^2} x^n \\
\text{m)} \sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{n^2} & \text{n)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n4^n} x^n &
\end{array}$$

XVII) Obtenha o raio de convergência para as séries seguintes.

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} x^n \frac{(2n)!}{(n!)^2} \quad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \quad \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \quad \text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} x^n \frac{n!}{n^n} \quad \text{e)} \sum_{n=1}^{\infty} x^{3n} \frac{n!}{n^n} \quad \text{f)} \sum_{n=1}^{\infty} x^{n!} \frac{n!}{n^n}.$$

XVIII) Determine o intervalo de convergência de:

$$\begin{array}{llll}
\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2+(-1)^n)^n} & \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{5n+7} \right)^n x^n & \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^n+3}{3^n+2} \right) x^n & \text{d)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\ln n} \\
\text{e)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{a^n + b^n}, \text{ com } b > a > 0. & & &
\end{array}$$

XIX) Usando derivação e integração termo a termo, se necessário, determine as expansões em séries de potências em torno de $x_0 = 0$ das seguintes funções e os valores de x para os quais essas expansões são válidas:

$$\begin{array}{lllll}
\text{a)} \frac{1}{x^2 + 25} & \text{b)} \arctg(2x) & \text{c)} \frac{1}{(1+x)^2} & \text{d)} \frac{1}{(1+x)^3} & \text{e)} \frac{2x}{1+x^4} \\
\text{f)} \ln(1+x) & \text{g)} \ln\left(\frac{1}{1+3x^2}\right) & \text{h)} \frac{x}{1+x-2x^2} & \text{i)} \int_0^x \frac{t}{1+t^5} dt &
\end{array}$$

XX) Verifique que

$$\text{a)} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1 \quad \text{b)} \arctg x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| \leq 1.$$

RESPOSTAS

(III)

- | | | |
|---------------------------------|--|--|
| 1) converge para 1 | 2) diverge | 3) diverge |
| 4) converge para 2 | 5) converge para 0 | 6) converge para $\frac{1}{4}$ |
| 7) converge para 0 | 8) converge para 1 | 9) converge para $\frac{3}{2}$ |
| 10) converge para $\frac{1}{2}$ | 11) converge para 0 | 12) a_n e c_n divergem ; $b_n \rightarrow 0$ |
| 13) converge para $\frac{2}{5}$ | 14) converge para 0 | 15) converge para 1 |
| 16) converge para 0 | 17) converge para 0 | 18) converge para e |
| 19) converge para 0 | 20) converge para 0 se $ a < 1$ | 21) converge para 0 |
| 22) converge para 0 | 23) diverge | 24) converge para b |
| 25) converge para 0 | 26) converge para $\frac{1}{2}$ | 27) converge para 0 |
| 28) converge para 1 | 29) converge para 0, $\alpha \in \mathbb{R}$ | 30) converge para 0 |
| 31) diverge | 32) converge para 1 | 33) $1/e$ |
| 34) diverge | 35) 1 | 36) 0 |
| 37) $\exp(22/15)$ | 38) 1 | |

(VI) 1) converge, 2) converge para $\frac{1}{e-1}$, 3) diverge, 4) diverge (Dica: calcular $\ln a_n$), 5) converge para 0 (Dica: calcular $\ln a_n$). 6) converge para 0.

(XI) 1) diverge, 2) $\frac{1}{1+\sqrt{t}}$, 3) $\frac{2+u}{1-u^2}$, 4) $\frac{1}{1+x^2}$, 5) $\frac{1}{1-\sin^2 x}$, 6) diverge, 7) diverge, 8) diverge, 9) diverge, 10) diverge, 11) diverge.

(XII) 1) diverge, 2) converge, 3) converge, 4) converge, 5) diverge, 6) diverge, 7) converge, 8) converge, 9) converge, 10) converge, 11) converge, 12) converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$, 13) converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$, 14) diverge, 15) diverge, 16) diverge, 17) converge, 18) diverge, 19) diverge.

(XIII) 1) converge condicionalmente, 2) converge absolutamente, 3) converge condicionalmente, 4) converge condicionalmente, 5) converge condicionalmente, 6) converge absolutamente, 7) diverge, 8) diverge, 9) converge absolutamente se $p > 1$ e converge condicionalmente se $p \leq 1$, 10) converge absolutamente, 11) converge condicionalmente.

(XIV) 3) 1; 4) $\ln 2$; 5) $\sin(1)$ 6) converge para 1; 7) converge para $\frac{1}{k!(k-1)}$

(XV) 1) $\{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\}$, 2) $\{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\}$, 3) $\{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$, 4) $\{x = 0\}$,
5) $\{x \in \mathbb{R} : 1/2 < |x| < 1\}$, 6) $\{x \in \mathbb{R} : 2k\pi < x < (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, 7) $\{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1\}$.

(XVI) a) $] -4, 4[$; b) $\{0\}$; c) $[-1, 1]$; d) $\{0\}$; e) $]2, 8]$; f) $[-2, 0]$; g) \mathbb{R} ; h) $]0, 2e[$; i) $] -3 - e, -3 + e[$;
j) $[2, 4]$; k) $]2, 6[$; l) $[-1, 1]$; m) $] -1, 1[$; n) $[-4/3, 4/3[$.

(XVII) a) $R = 1/4$; b) $R = 1/2$; c) $R = 1$; d) $R = e$; e) $R = \sqrt[3]{e}$; f) $R = 1$.

(XVIII) a) $] -1, 1[$; b) $] -5/3, 5/3[$; c) $] -3/2, 3/2[$; d) $[-1, 1[$; e) $] -b - 1, b - 1[$.

(XIX)

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{5^{2n}}, \quad -5 < x < 5 \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{2n+1} x^{2n+1}, \quad -1/2 \leq x \leq 1/2$$

$$(c) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n, \quad -1 < x < 1 \quad (d) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+2)(n+1)}{2} x^n, \quad -1 < x < 1$$

$$(e) 2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{4n+1} \right), \quad -1 < x < 1 \quad (f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \quad -1 < x \leq 1$$

$$(g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n} x^{2n}, \quad \frac{-1}{\sqrt{3}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (h) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - (-1)^n 2^n}{3} \right) x^n, \quad \frac{-1}{2} < x < \frac{1}{2}$$

$$(i) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5n+2} x^{5n+2}, \quad -1 < x \leq 1$$