



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Elementos de Máquinas para Automação

PMR 3307 - A03

**Composição de tensões, deformações
e Círculo de Mohr**

2023.2



Tópicos

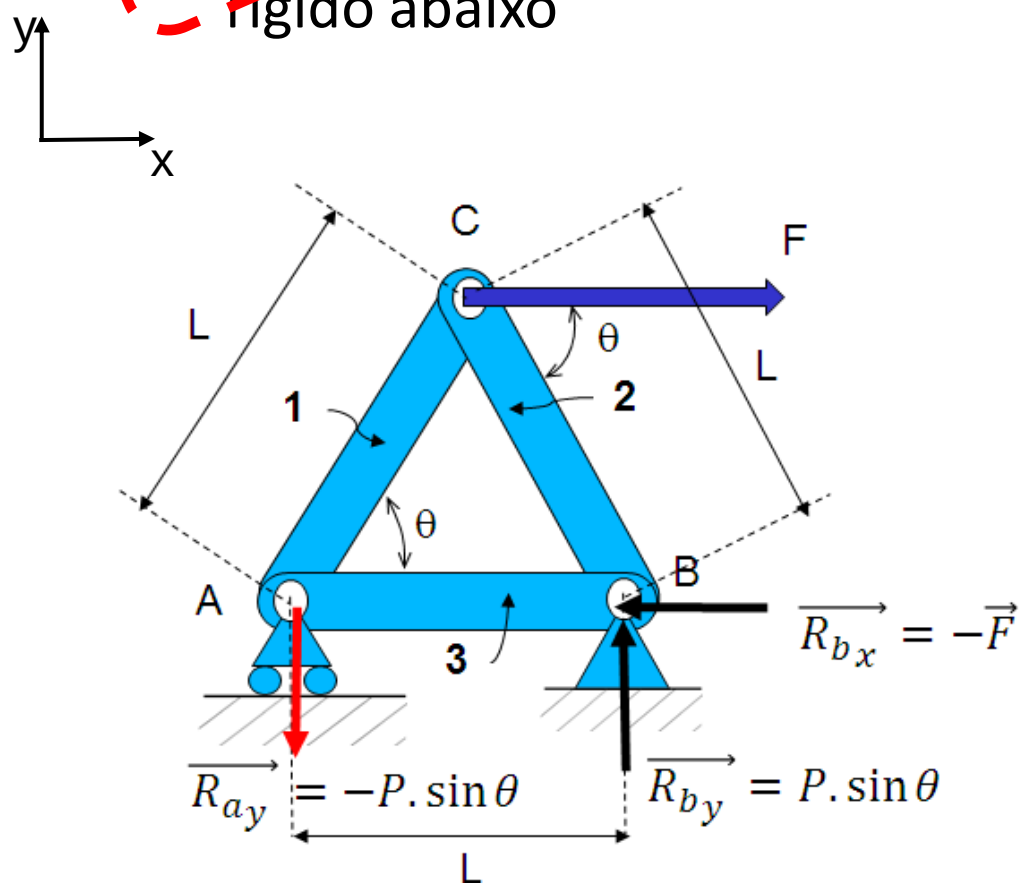
- ▶ Estado de tensão geral sobre um elemento
- ▶ Equações gerais para a tensão normal e cisalhante
- ▶ Tensões principais
- ▶ Transformações de tensões
- ▶ Círculo de Mohr
- ▶ Construção do círculo de Mohr
- ▶ Círculo de Mohr para o estado geral de Tensões
- ▶ Círculo de deformação de Mohr
- ▶ Relações adicionais entre tensão e deformação



RELEMBRANDO!

Estado de tensão geral sobre um elemento

- Desenvolvendo as equações de equilíbrio estático para o corpo rígido abaixo



$$\sum \vec{F}_x = 0 \quad \vec{F} + \vec{R}_{bx} = 0$$

$$\vec{R}_{bx} = -\vec{F}$$

$$\sum \vec{F}_y = 0 \quad \vec{R}_{ay} + \vec{R}_{by} = 0$$

$$\vec{R}_{ay} = -P \cdot \sin \theta$$

$$\vec{R}_{by} = P \cdot \sin \theta$$

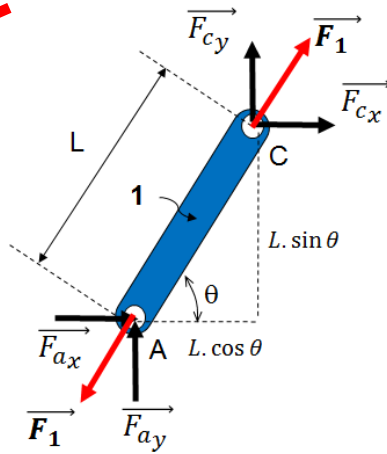
$$\sum \vec{M}_A = 0 \quad \vec{R}_{by} \cdot L + \vec{F} \cdot \sqrt{\left(\frac{3}{4}L^2\right)} = 0$$

$$\vec{R}_{by} \cdot L + \vec{F} \cdot (L \cdot \sin \theta) = 0$$



RELEMBRANDO!

Resultantes Internas Análise individual dos esforços

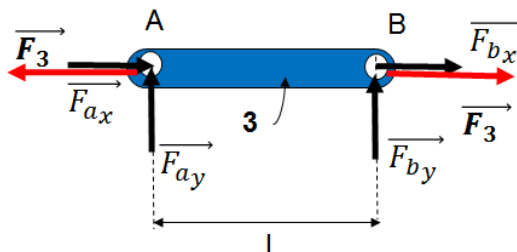
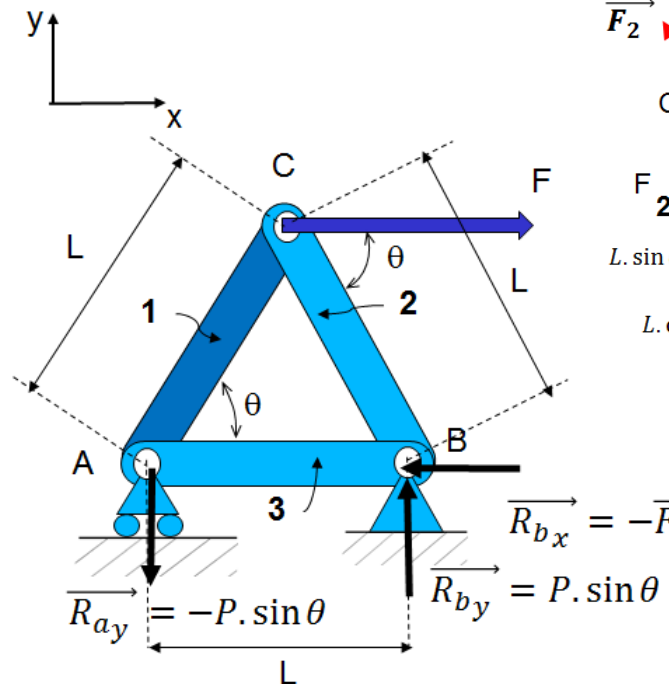


$$\sum \vec{F}_x = 0 \quad \vec{F}_{cx} + \vec{F}_{ax} = 0$$

$$\sum \vec{F}_y = 0 \quad \vec{F}_{cy} + \vec{F}_{ay} = 0$$

$$\sum \vec{M}_B = 0$$

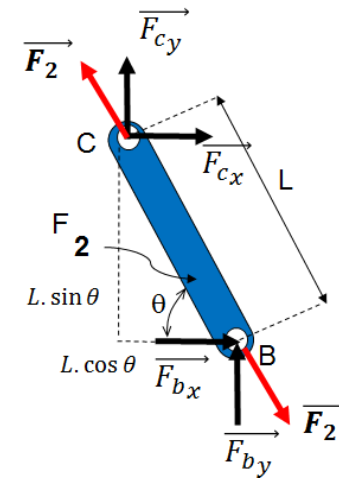
$$-\vec{F}_{cy} \cdot L \cdot \cos \theta + \vec{F}_{cx} \cdot \sin \theta = 0$$



$$\sum \vec{F}_x = 0 \quad \vec{F}_{cx} + \vec{F}_{ax} = 0$$

$$\sum \vec{F}_y = 0 \quad \vec{F}_{cy} + \vec{F}_{ay} = 0$$

$$\sum \vec{M}_A = 0 \quad -\vec{F}_{by} \cdot L = 0$$



$$\sum \vec{F}_x = 0 \quad \vec{F}_{cx} + \vec{F}_{bx} = 0$$

$$\sum \vec{F}_y = 0 \quad \vec{F}_{cy} + \vec{F}_{by} = 0$$

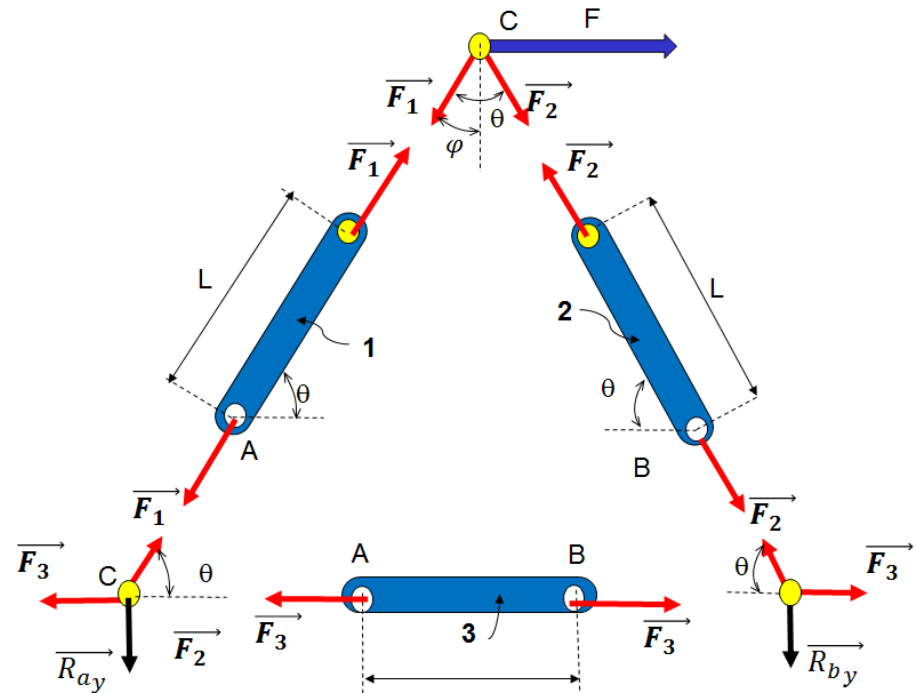
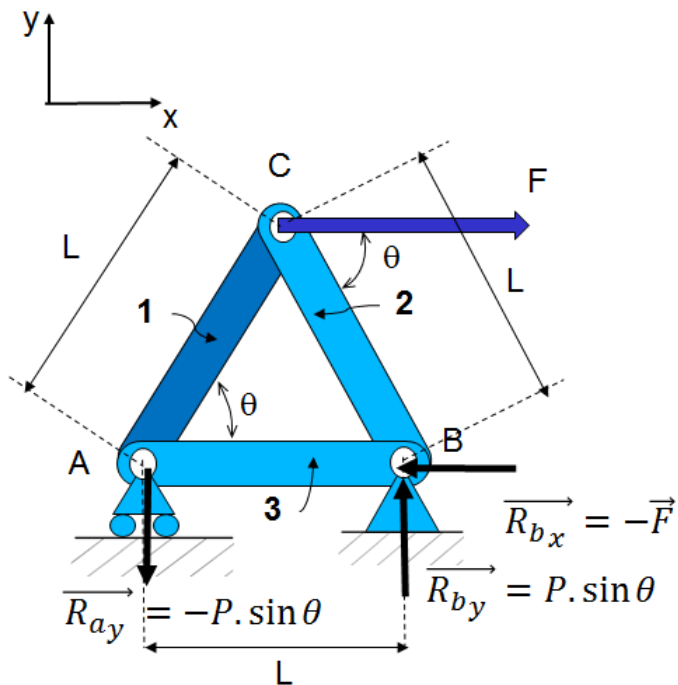
$$\sum \vec{M}_B = 0$$

$$\vec{F}_{cy} \cdot L \cdot \cos \theta + \vec{F}_{cx} \cdot \sin \theta = 0$$



RELEMBRANDO!

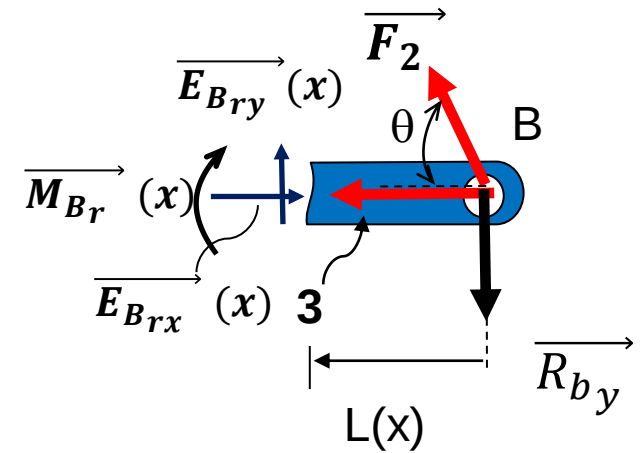
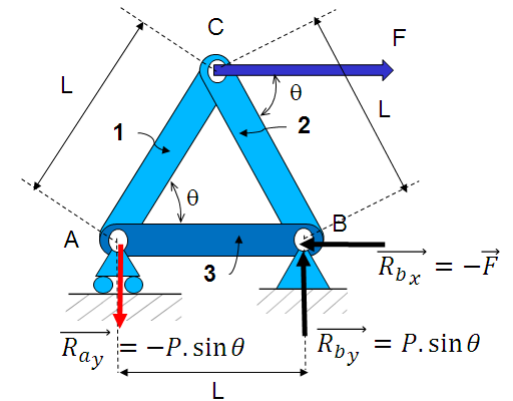
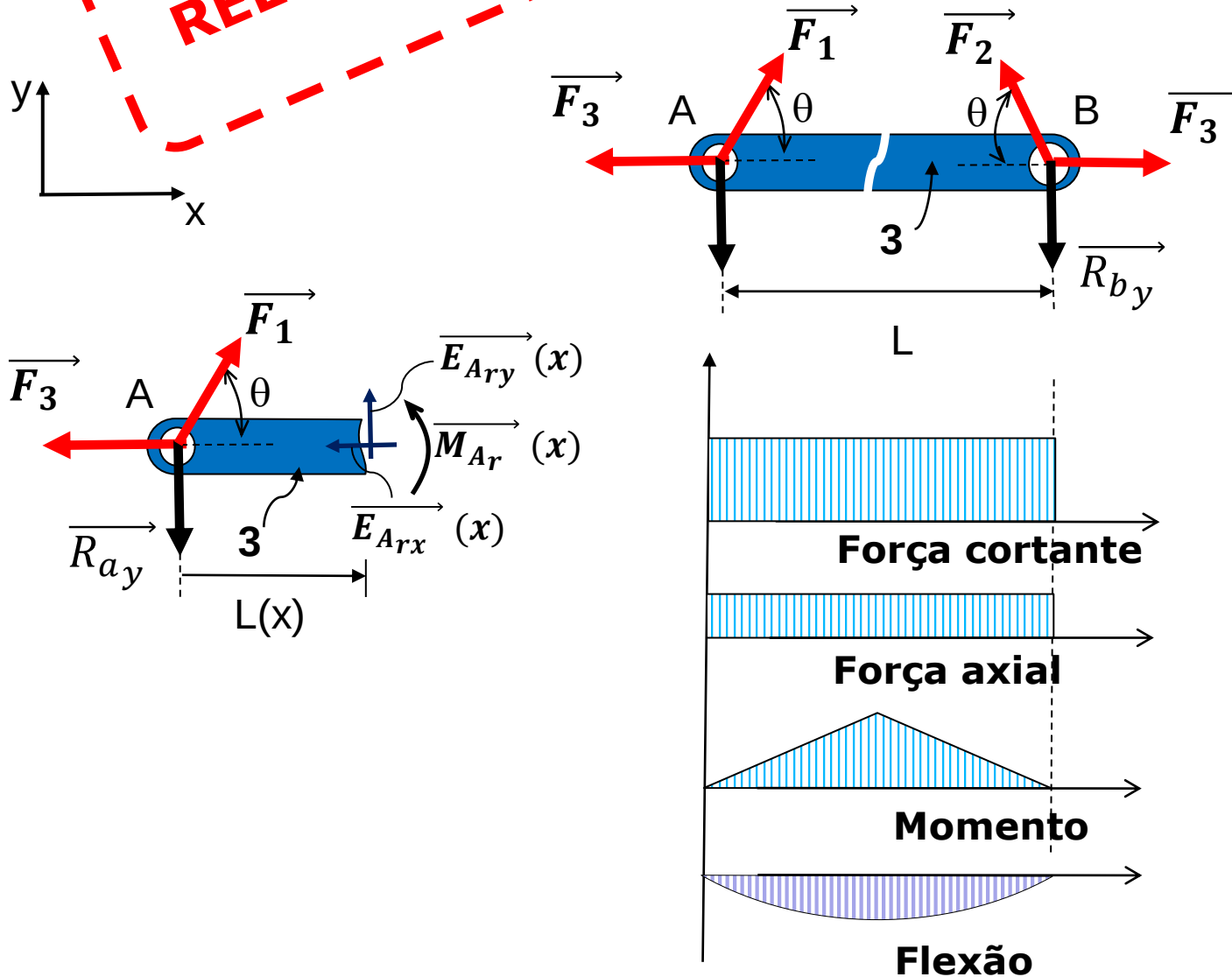
Resultantes Internas Análise individual dos esforços





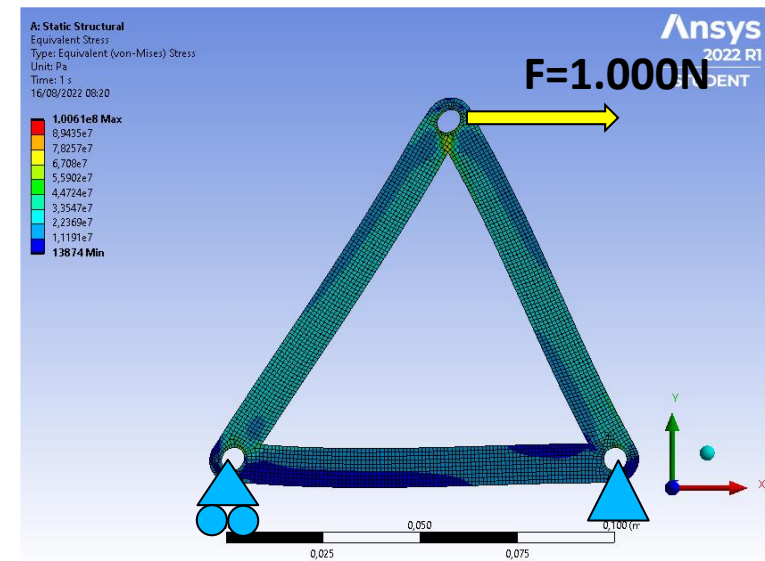
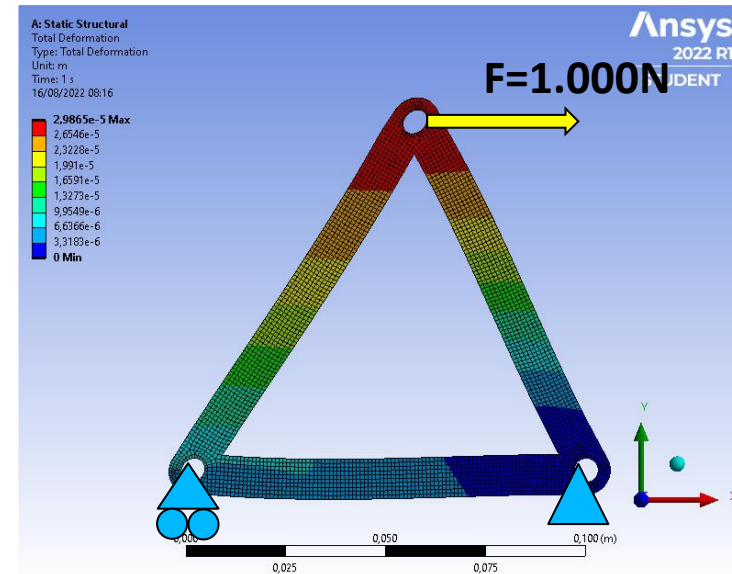
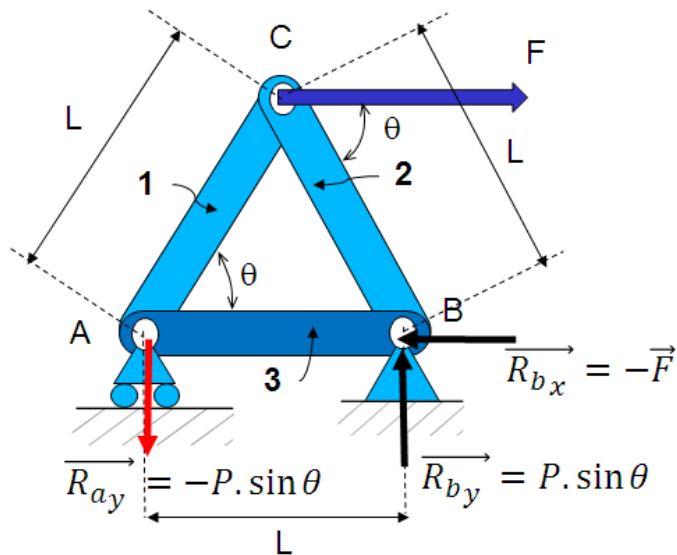
RELEMBRANDO!

Diagrama de Esforços





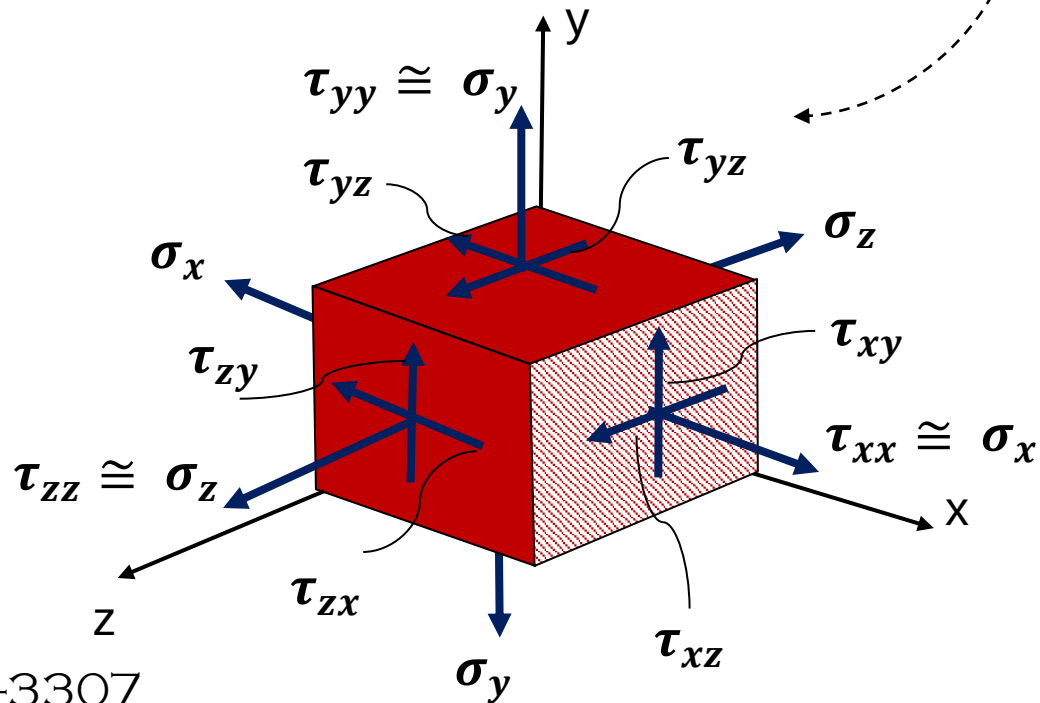
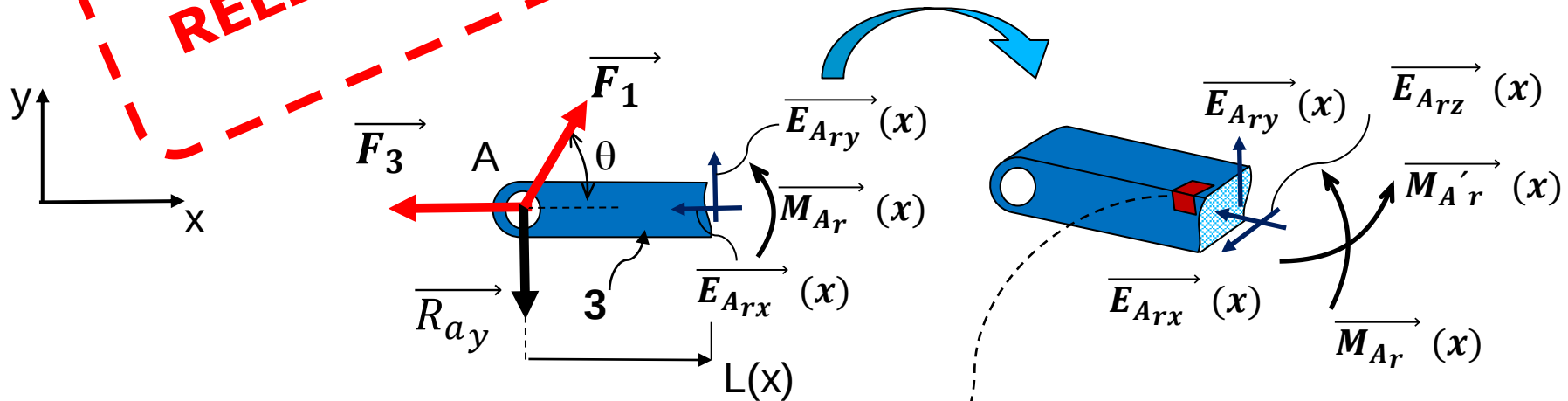
Estado de tensão geral sobre um elemento





RELEMBRANDO!

Estado de tensão geral sobre um elemento



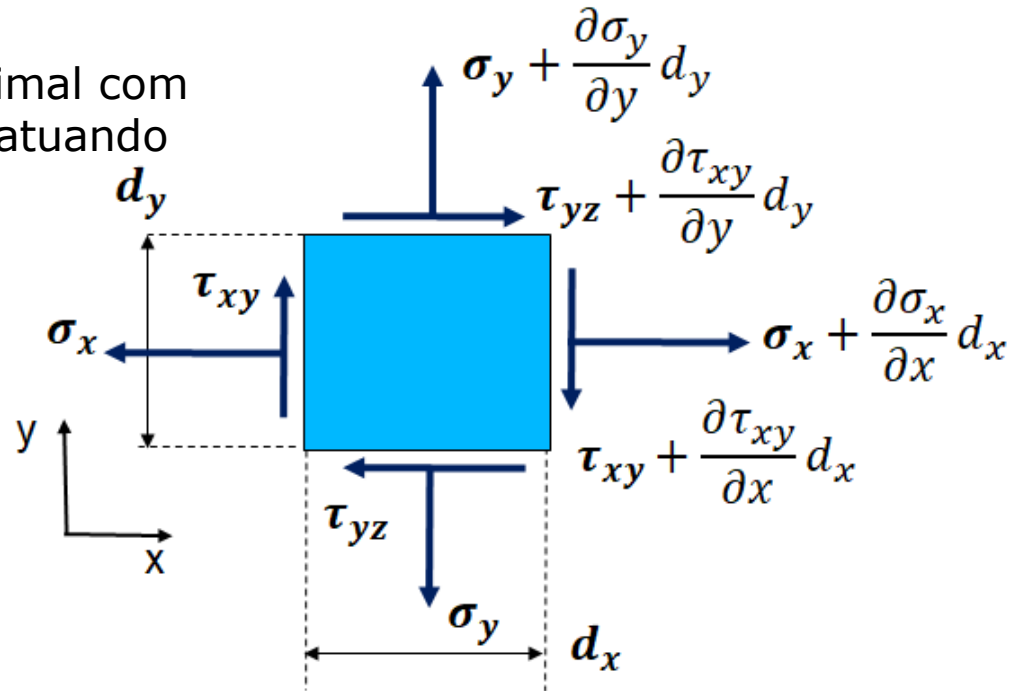
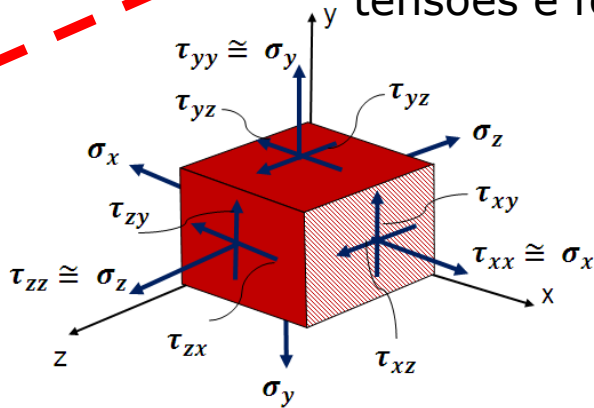
Estado de tensão geral
sobre um elemento



RELEMBRANDO!

Estado de tensão geral sobre um elemento

Elemento infinitesimal com tensões e forças atuando



$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0$$

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

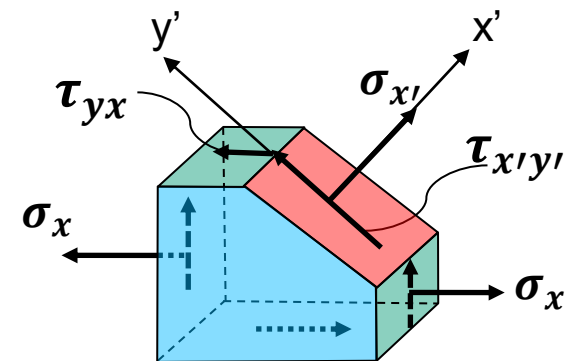
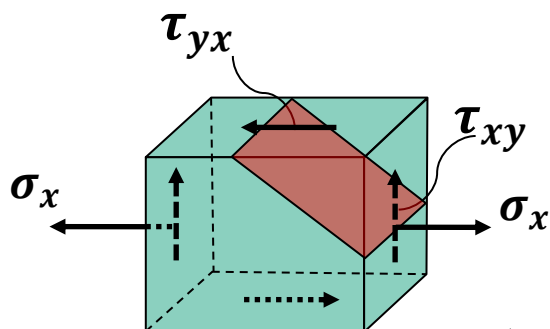
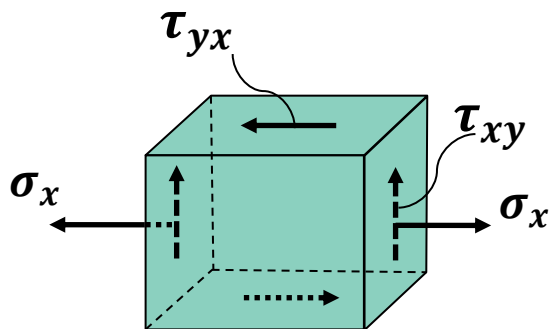
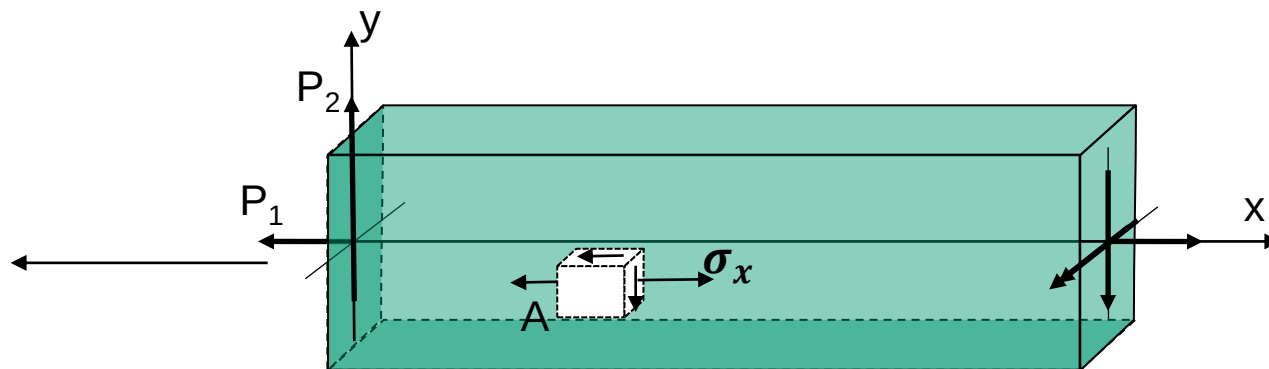


$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0$$



Introdução

Estado de tensão em um ponto sob diferentes planos

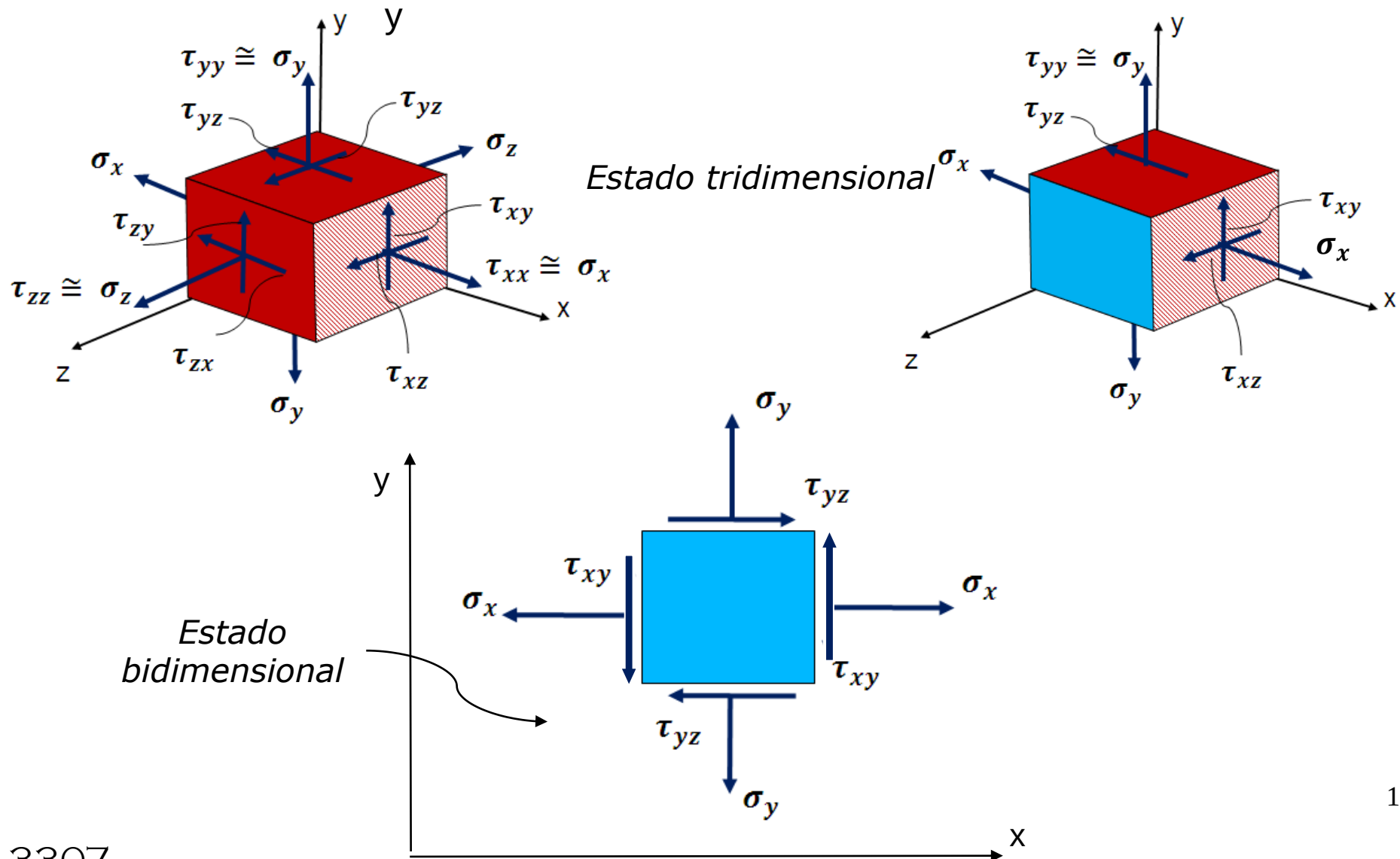


Em muitos casos tensões normais e cisalhantes atuam simultaneamente

tensões que atuam em quaisquer planos



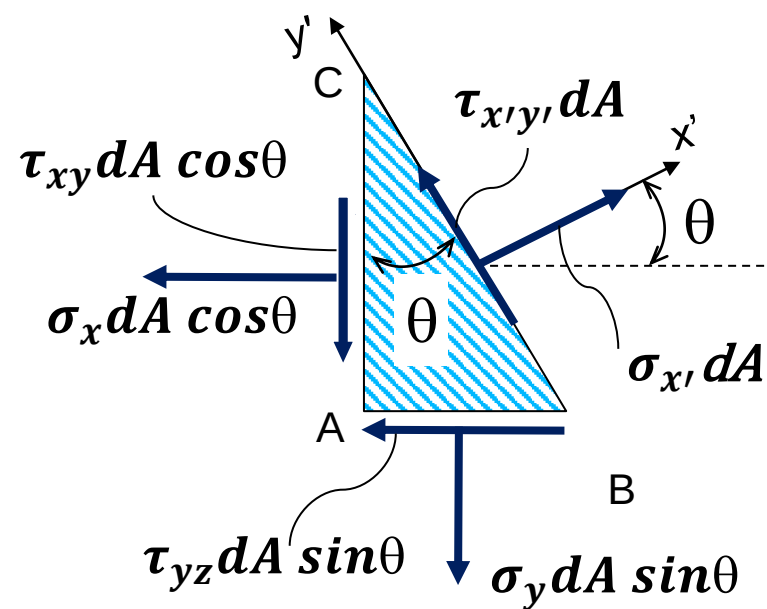
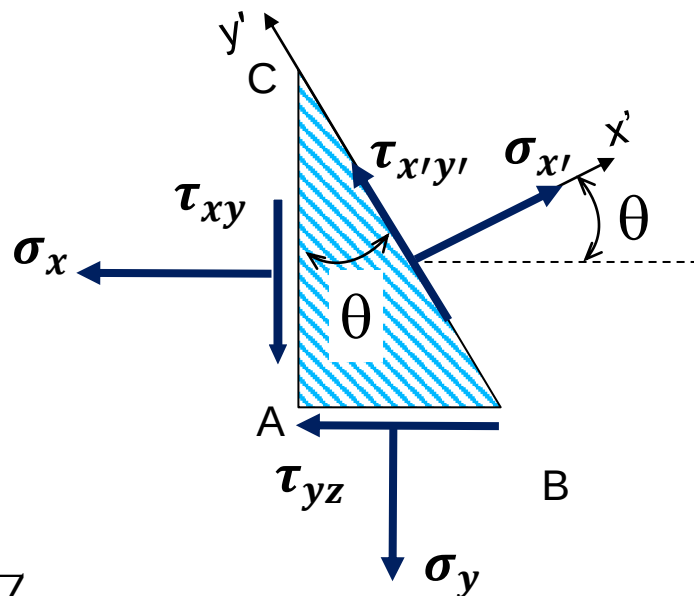
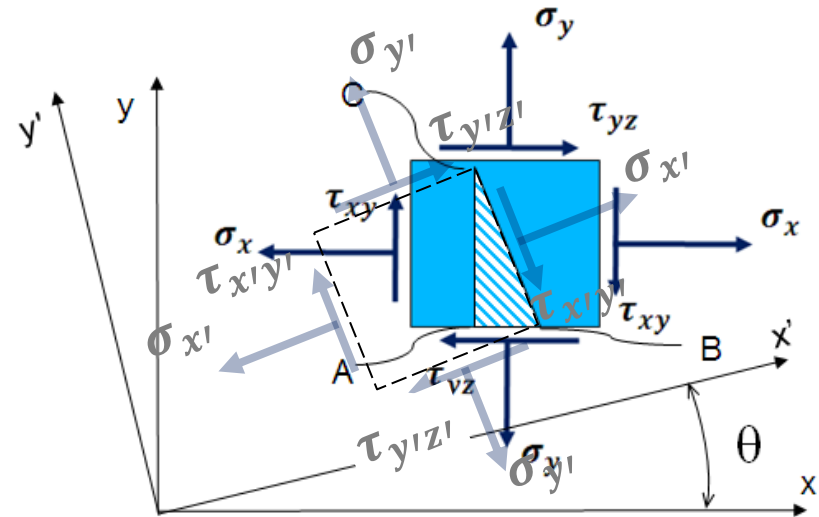
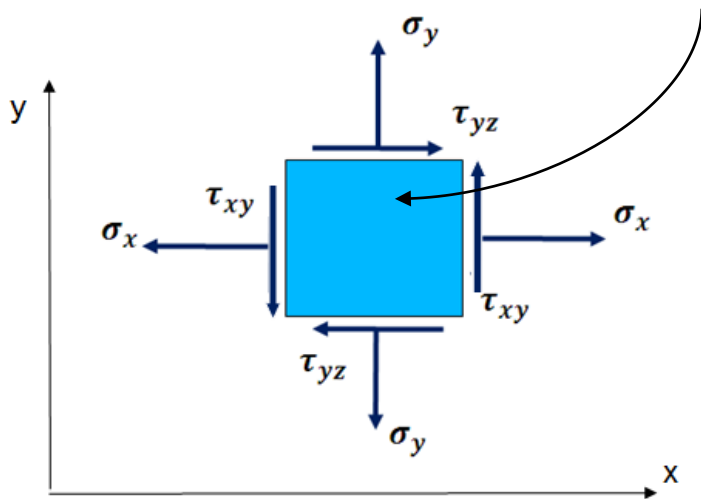
Estado de tensão geral sobre um elemento





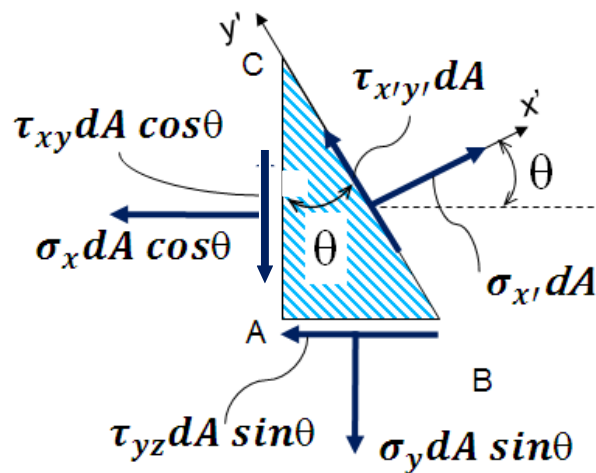
Estado de tensão geral sobre um elemento

*Elemento plano
Estado bidimensional*





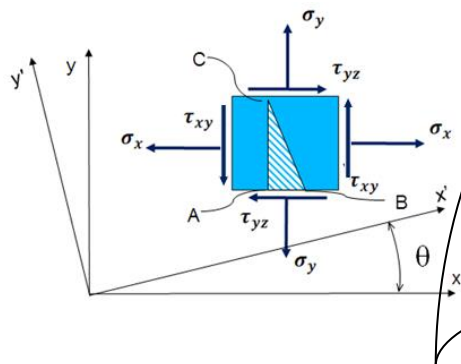
Equações gerais para a tensão normal e cisalhante



$$\sum \vec{F}_x = 0$$

$$\sigma_{x'} dA = \sigma_x dA \cdot \cos \theta \cdot \cos \theta + \sigma_y dA \cdot \sin \theta \cdot \sin \theta + \tau_{xy} dA \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta + \tau_{xy} dA \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta$$

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos 2\theta + \tau_{xy} \cdot \sin 2\theta$$



$$\sum \vec{F}_y = 0$$

$$\tau_{x'y'} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2\theta + \tau_{xy} \cdot \cos 2\theta$$

Equações gerais para a
tensão normal e cisalhante



Tensões principais

Determinação do plano principal

Diferenciando
com relação a θ

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos 2\theta + \tau_{xy} \cdot \sin 2\theta$$

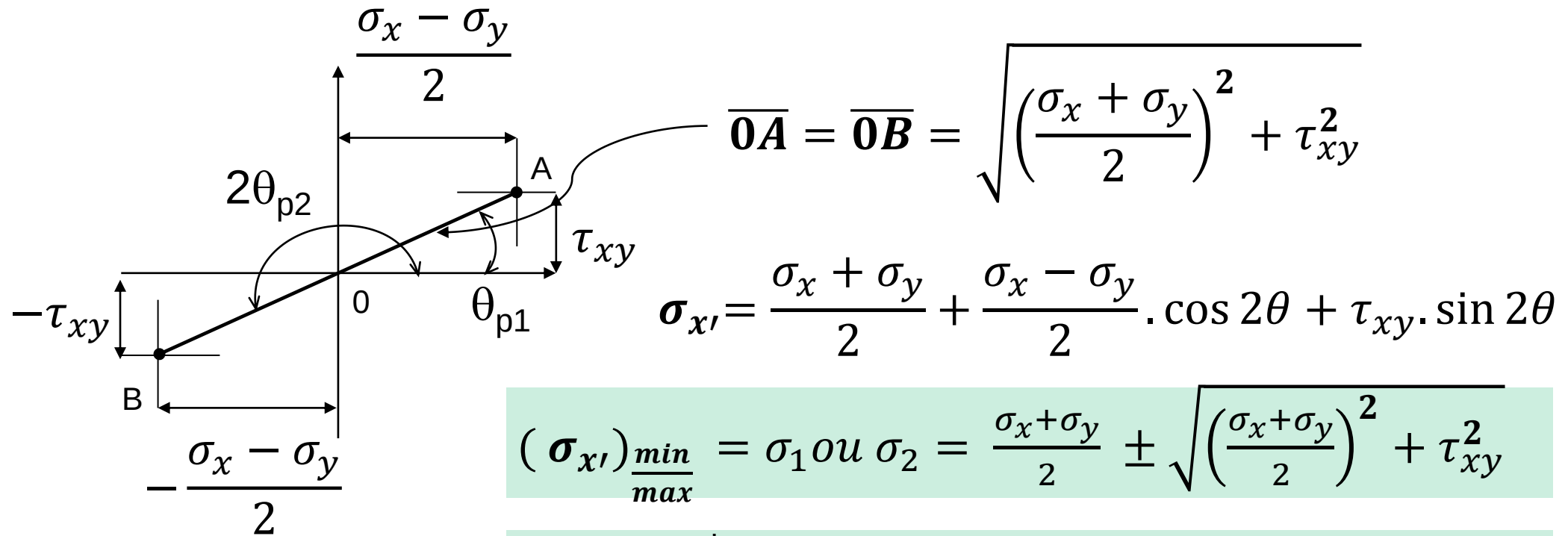
$$\frac{\partial \sigma_{x'}}{\partial \theta} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot 2 \cdot \sin 2\theta + 2\tau_{xy} \cdot \cos 2\theta$$

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot 2 \cdot \sin 2\theta + 2\tau_{xy} \cdot \cos 2\theta = 0$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2}$$



Tensões principais



$$(\sigma_{x'})_{\frac{min}{max}} = \sigma_1 \text{ ou } \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

De forma análoga determinamos as tensões cisalhantes máximas

$$\tau_{\frac{min}{max}} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

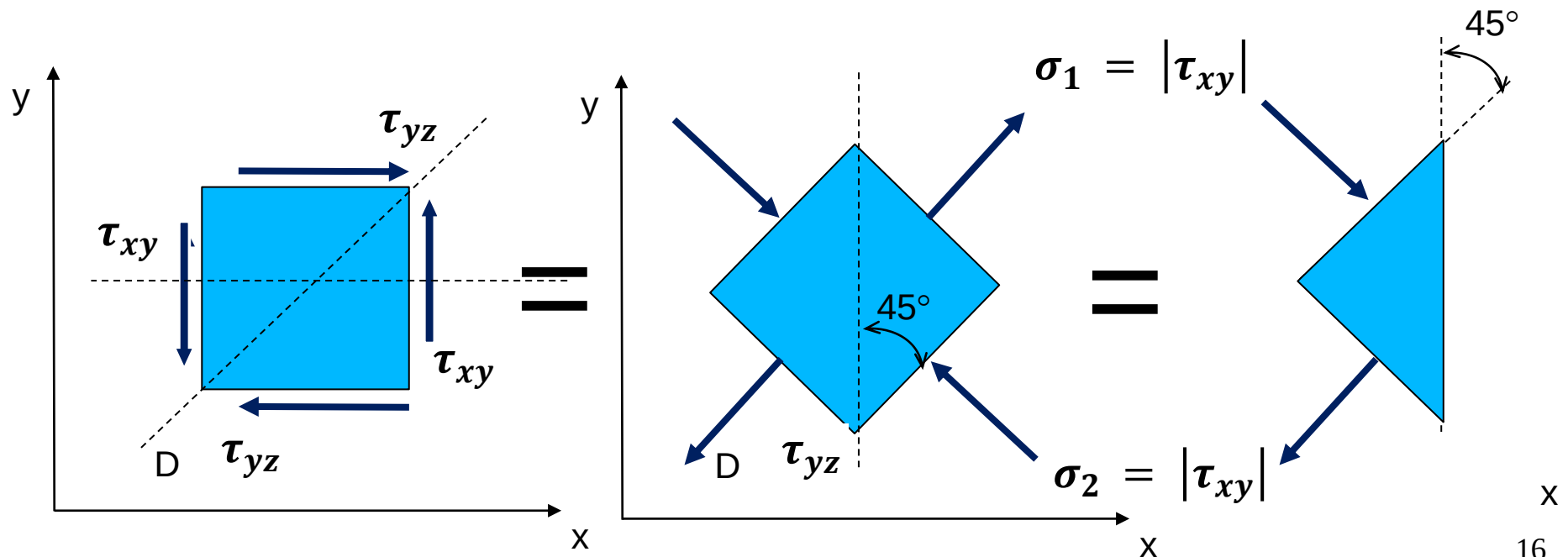
$$\tau_{max} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$$



Transformação de Tensões

Caso particular

- Uma transformação significativa de uma descrição de um estado de tensão ocorre quando a tensão de cisalhamento pura é convertida em tensões principais.





Círculo de Mohr

- ▶ Tomando por base as equações gerais para a tensão normal e cisalhante

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos 2\theta + \tau_{xy} \cdot \sin 2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2\theta + \tau_{xy} \cdot \cos 2\theta$$

- ▶ Essas são as expressões gerais para tensão normal e cisalhante em qualquer plano definido pelo ângulo θ ,
Observem que σ_x, σ_y e τ_{xy} são conhecidas inicialmente.



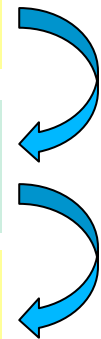
Círculo de Mohr

- ▶ Tomando por base as equações gerais para a tensão normal e cisalhante

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos 2\theta + \tau_{xy} \cdot \sin 2\theta$$

$$\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos 2\theta + \tau_{xy} \cdot \sin 2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2\theta + \tau_{xy} \cdot \cos 2\theta$$



- ▶ (Elevando ao quadrado, substituindo e simplificando):



$$\left(\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{x'y'}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2$$



Círculo de Mohr

- Para um problema onde σ_x , σ_y e τ_{xy} são conhecidos, e $\sigma_{x'}$ e $\tau_{x'y'}$ são variáveis

$$\left(\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{x'y'}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2$$

$$a = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)$$

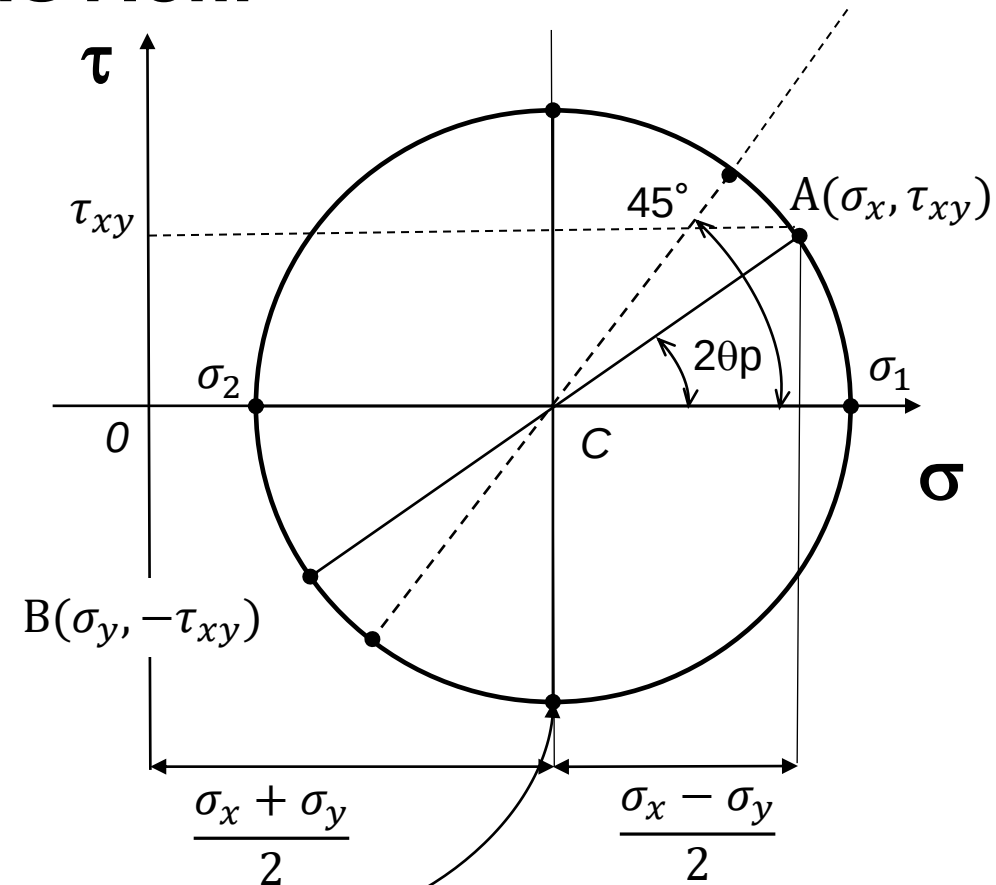
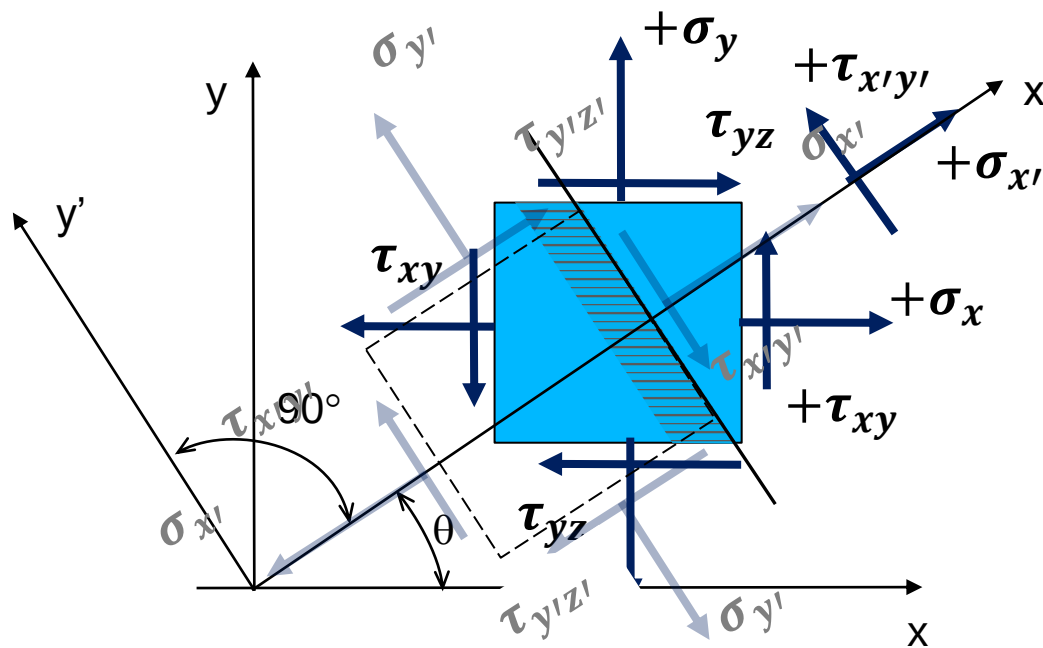
$$b^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2$$

$$(\sigma_{x'} - a)^2 + \tau_{x'y'}^2 = b^2$$

$$(x - a)^2 + y^2 = (r)^2$$



Círculo de Mohr



$$|\tau_{min}| = \tau_{max}$$

$$\left(\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{x'y'}^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2$$

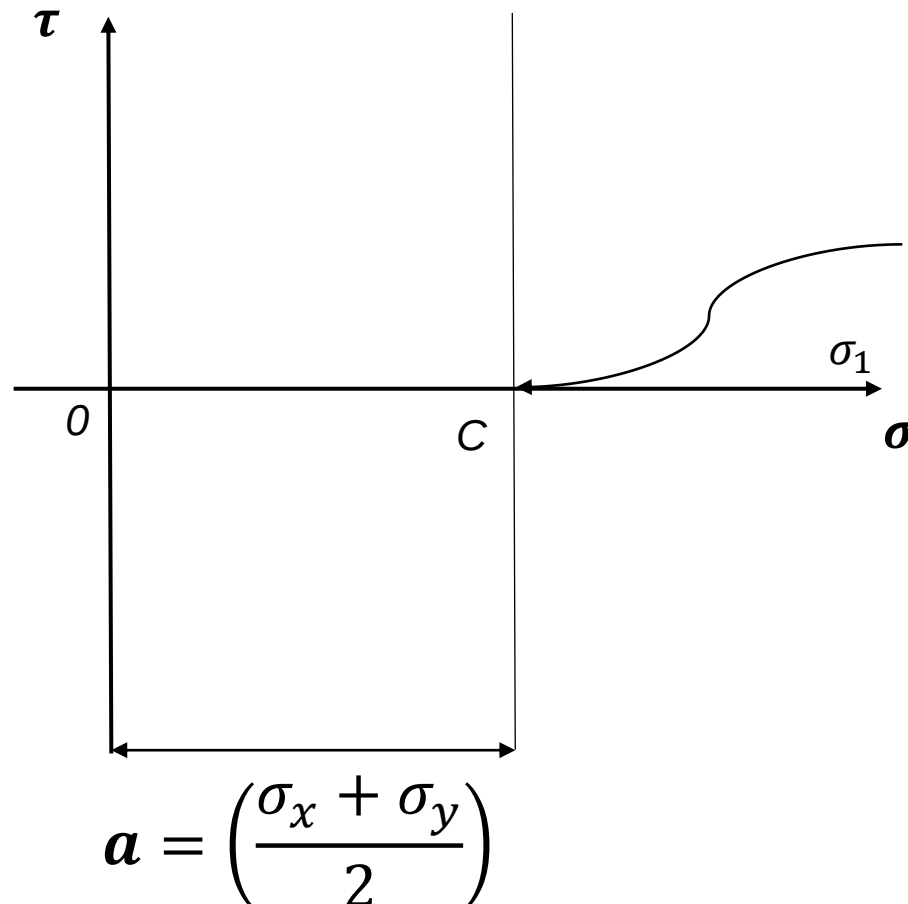


Círculo de Mohr

- ▶ O círculo de Mohr é uma representação geométrica o estado plano de tensão.
- ▶ Permite visualizar a relação entre a tensão normal e a cisalhante atuantes em vários planos do componente
- ▶ É muito útil para realizar estimativas eficientes e rápidas de falha em trabalhos mais complexos.
- ▶ O círculo de Mohr pode ser construído de várias formas, dependendo de qual tensão é conhecida, e qual deve ser determinada
- ▶ Esta interpretação visual do estado plano de tensões foi proposta pelo engenheiro alemão Otto Mohr em 1882

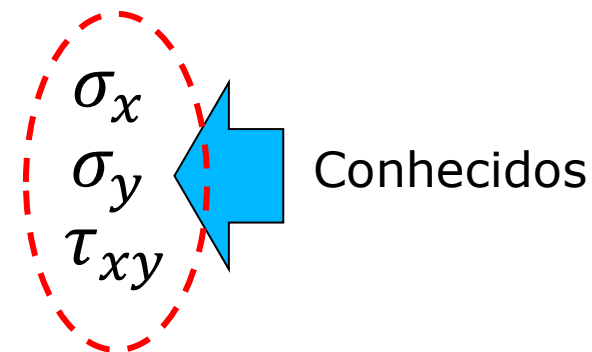


Construção do Círculo de Mohr



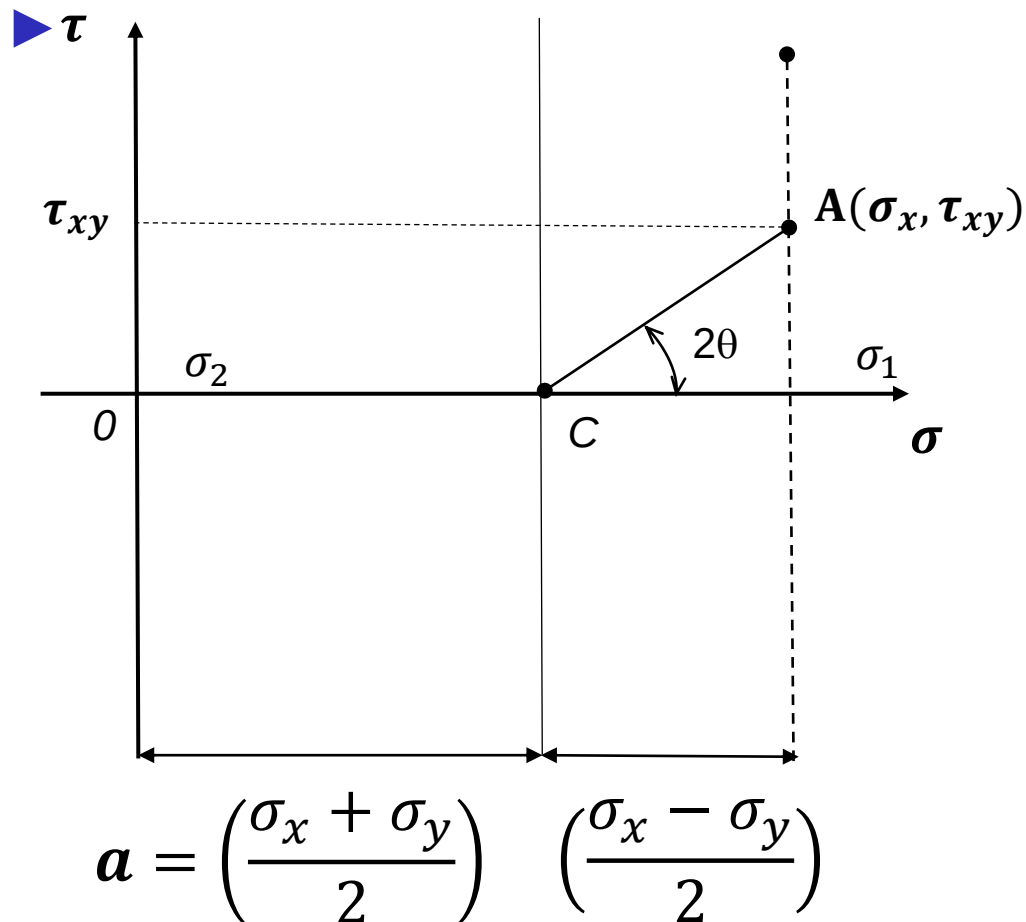
1. desenhe os eixos coordenados σ_1 como abscissa ($\rightarrow +$) e τ como ordenada ($\uparrow +$)

2. Localize o centro C do círculo





Construção do Círculo de Mohr

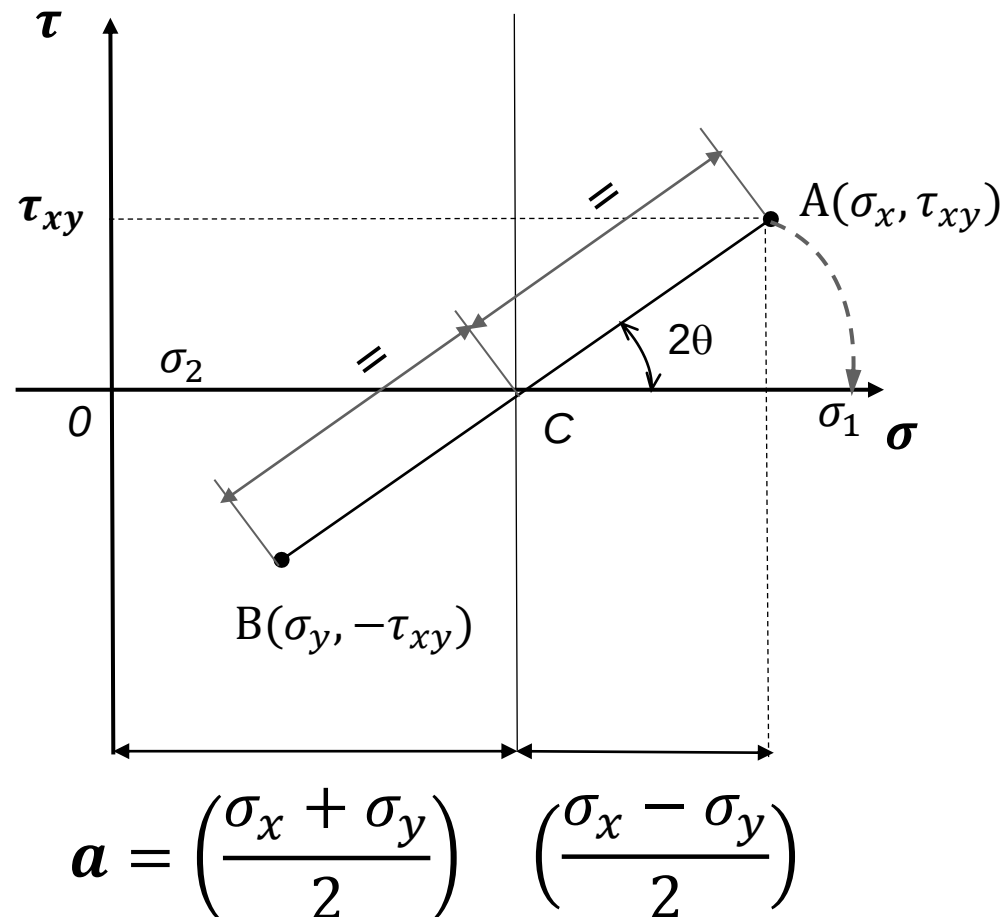


3. Localize o ponto **A**, que representa a condição de tensão na face X do elemento.

O ponto A representa a condição onde $\theta=0$.
identifique este ponto



Construção do Círculo de Mohr

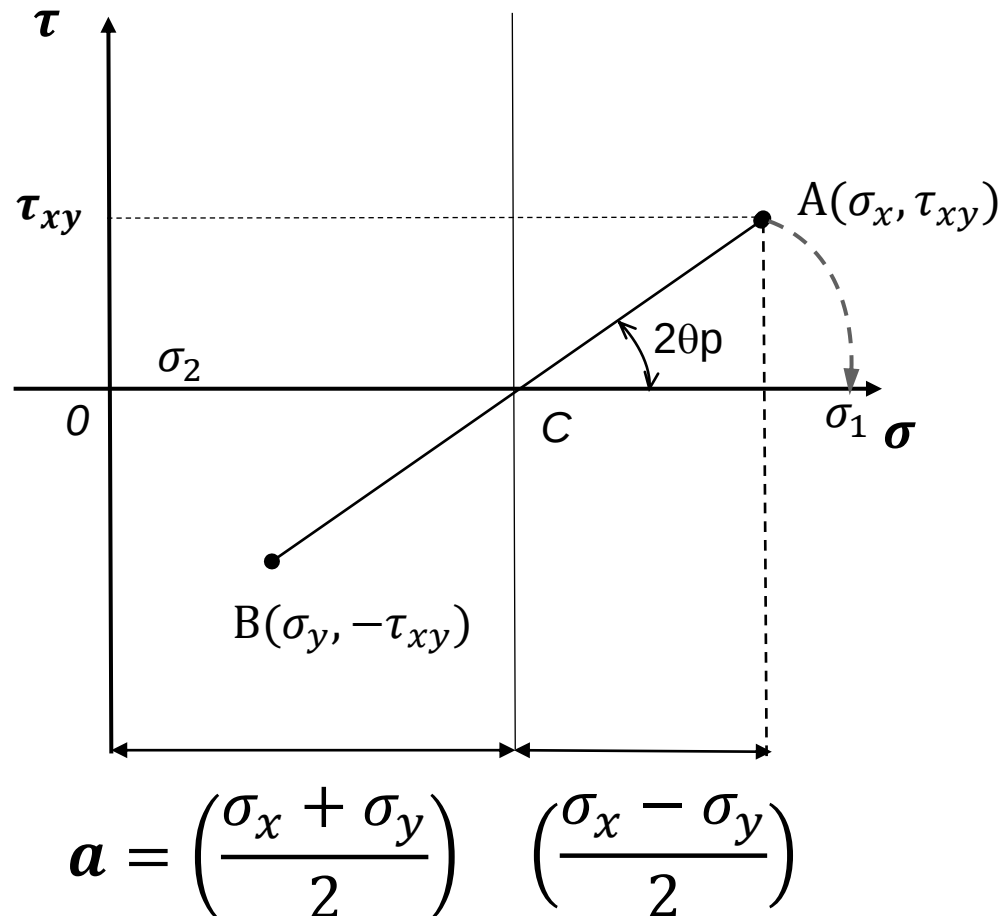


4. Localize o ponto B, que representa a condição de tensão na face Y do elemento.

O ponto B representa a condição onde $\theta=90^\circ$. identifique este ponto



Construção do Círculo de Mohr



4. Localize o ponto B, que representa a condição de tensão na face Y do elemento.

O ponto B representa a condição onde $\theta=90^\circ$. identifique este ponto

5. Trace a linha AB, que representa o diâmetro do círculo.

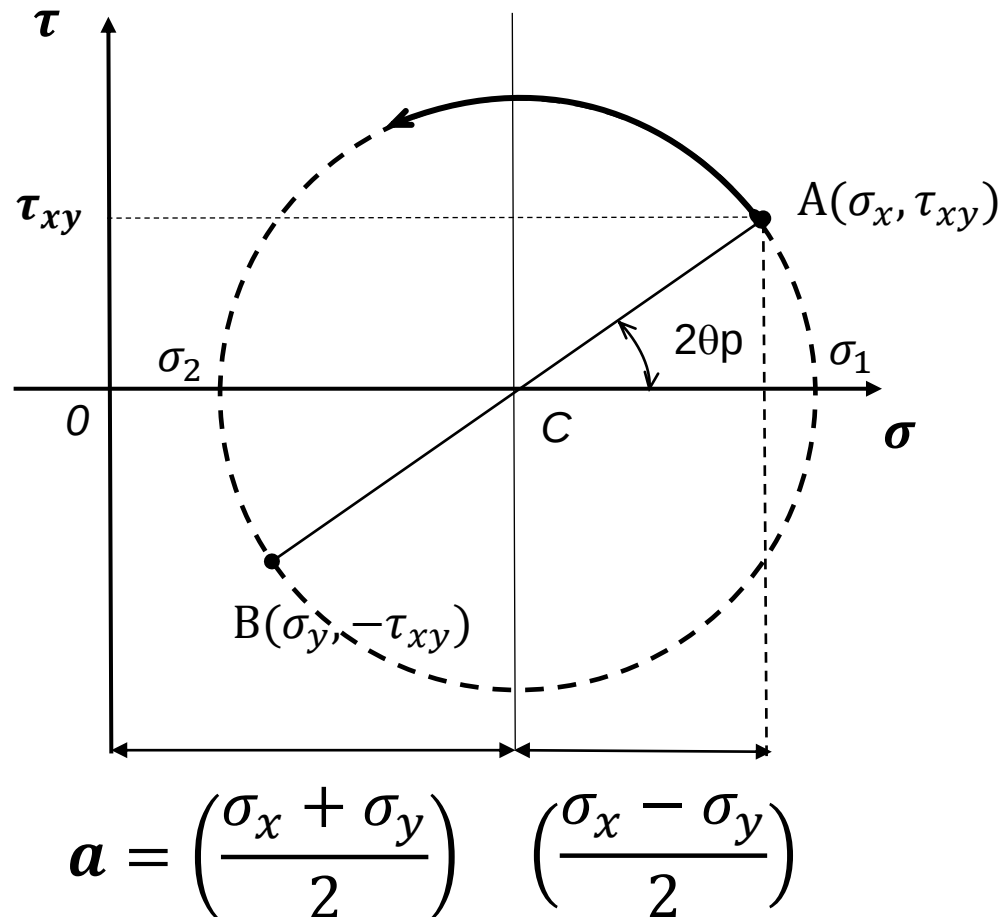
AB representa as tensões de planos a 90° (apesar de estarem a 180° no círculo)



Construção do Círculo de Mohr

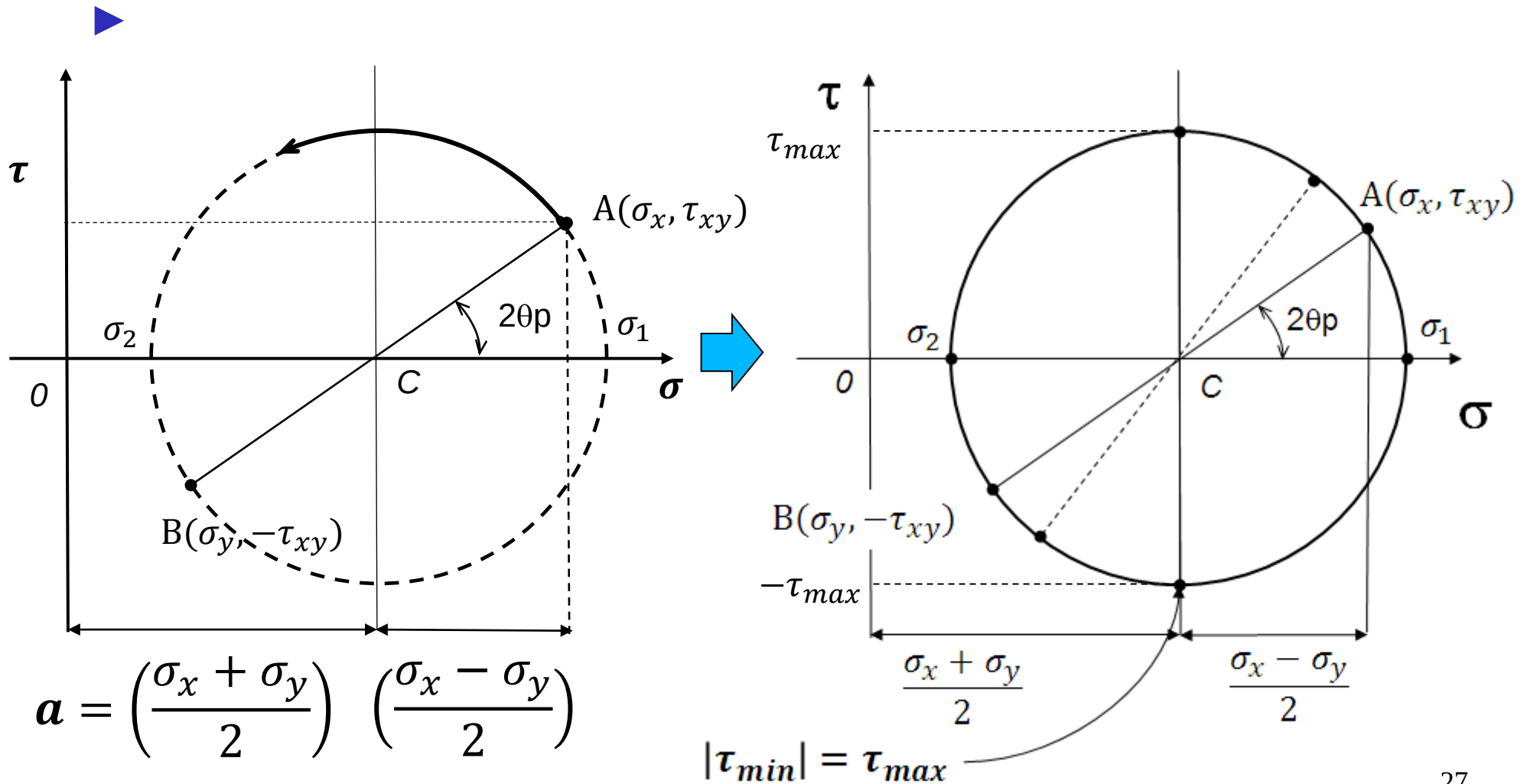


6. Trace o círculo usando o ponto C.





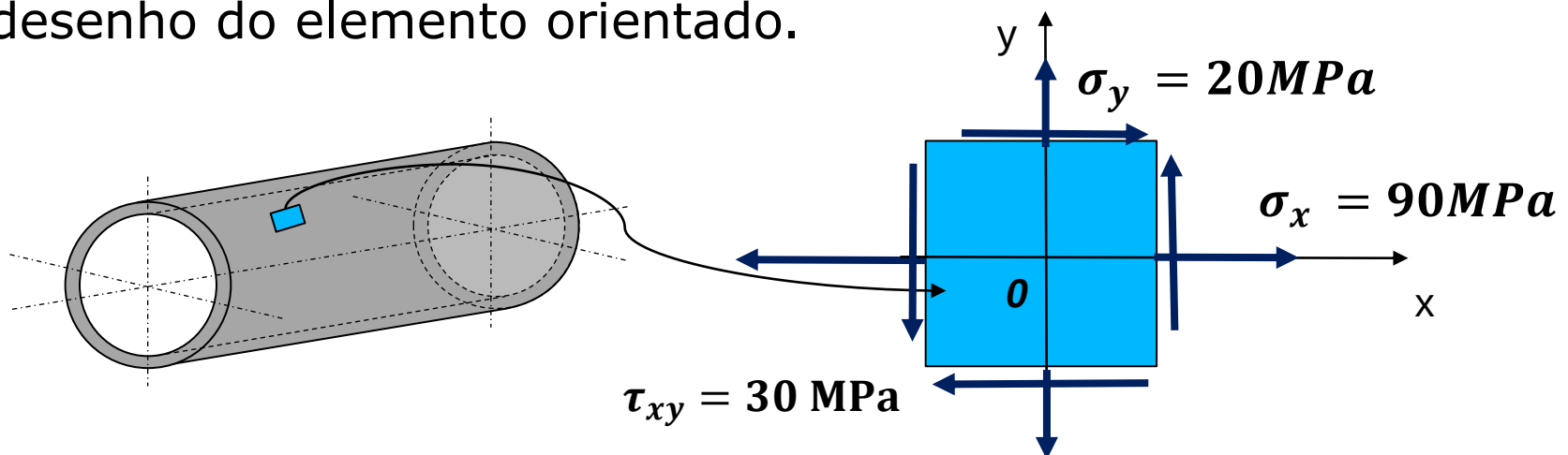
Construção do Círculo de Mohr





Exemplo 1

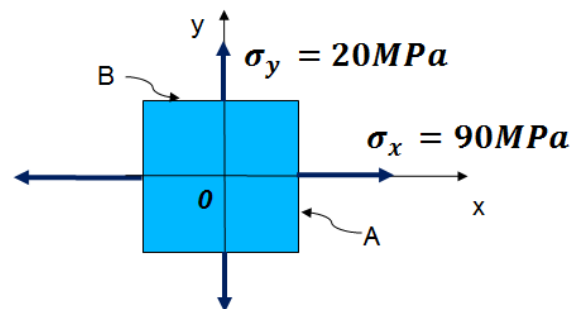
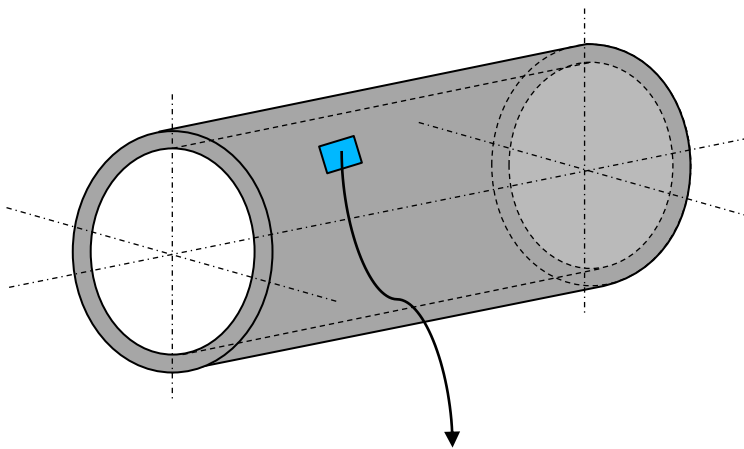
- Considere um ponto na superfície de um cilindro pressurizado. O material está sujeito a um estado biaxial de tensões $\sigma_x = 90\text{MPa}$, $\sigma_y = 20\text{MPa}$, e $\tau_{xy} = 30,3\text{MPa}$, conforme mostrado no elemento abaixo. Construa o círculo de Mohr e determine as tensões atuantes em um elemento inclinado a $\theta=30^\circ$. Considere somente o estado plano de tensões, e mostre um desenho do elemento orientado.





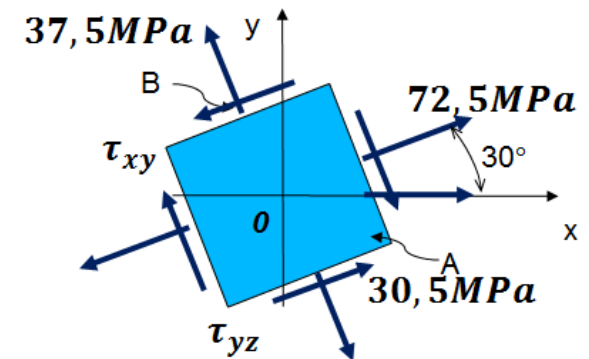
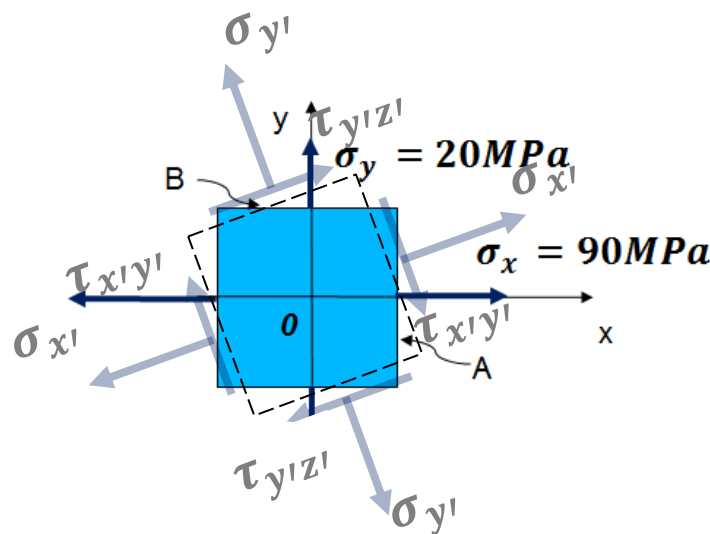
Exemplo 1

- ▶ Dados: $\sigma_x = 90\text{MPa}$, $\sigma_y = 20\text{MPa}$, e $\tau_{xy} = 30\text{MPa}$
- ▶ Determinar as tensões atuantes em um elemento inclinado a $\theta = 30^\circ$
- ▶ Considerar: estado plano de tensões.



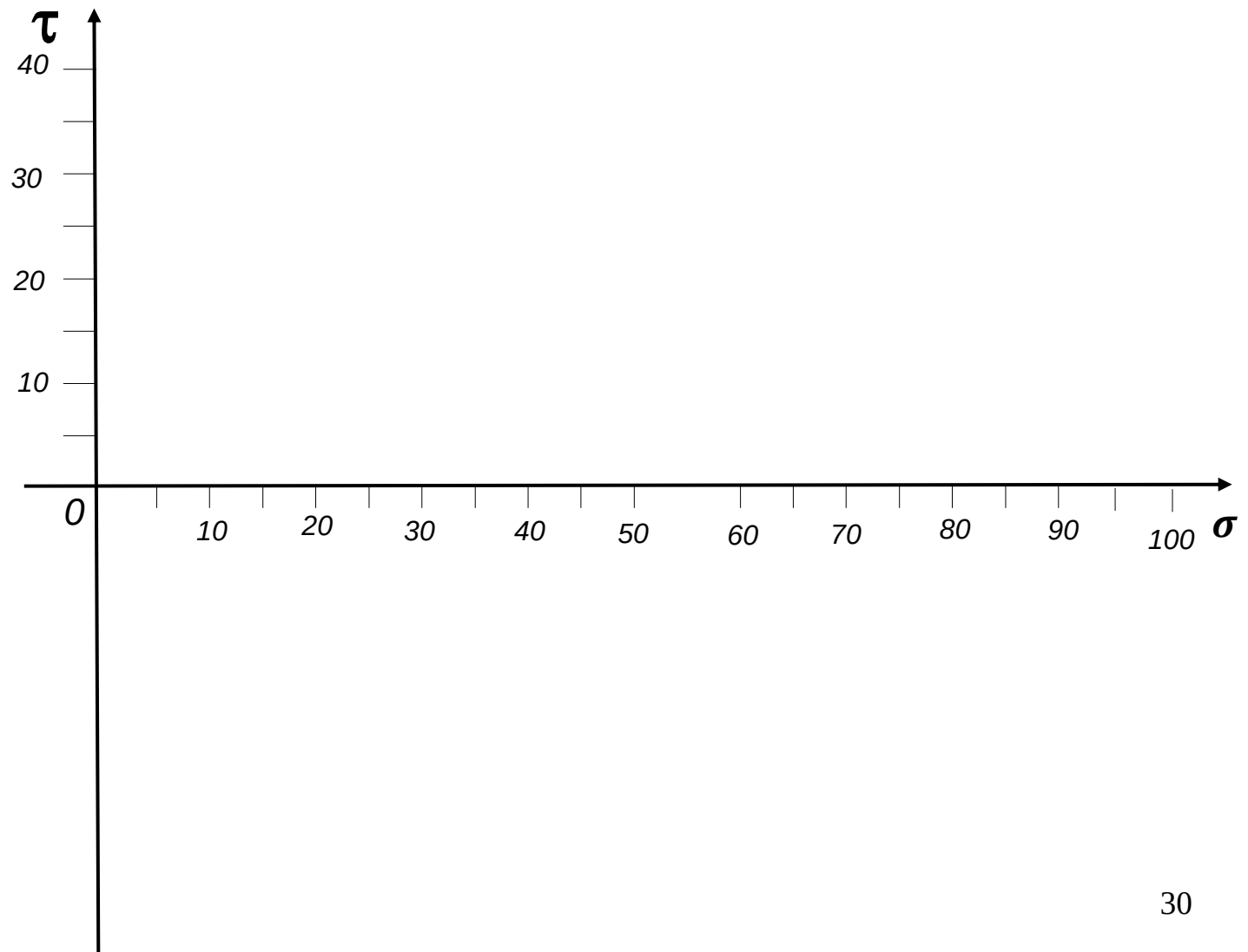
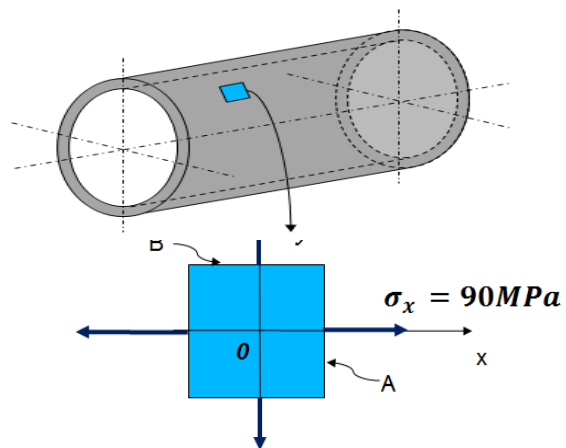
$$a = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{90 + 20}{2} = \frac{110}{2} = 55\text{MPa}$$

$$b = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = \frac{90 - 20}{2} = \frac{70}{2} = 35\text{MPa}$$



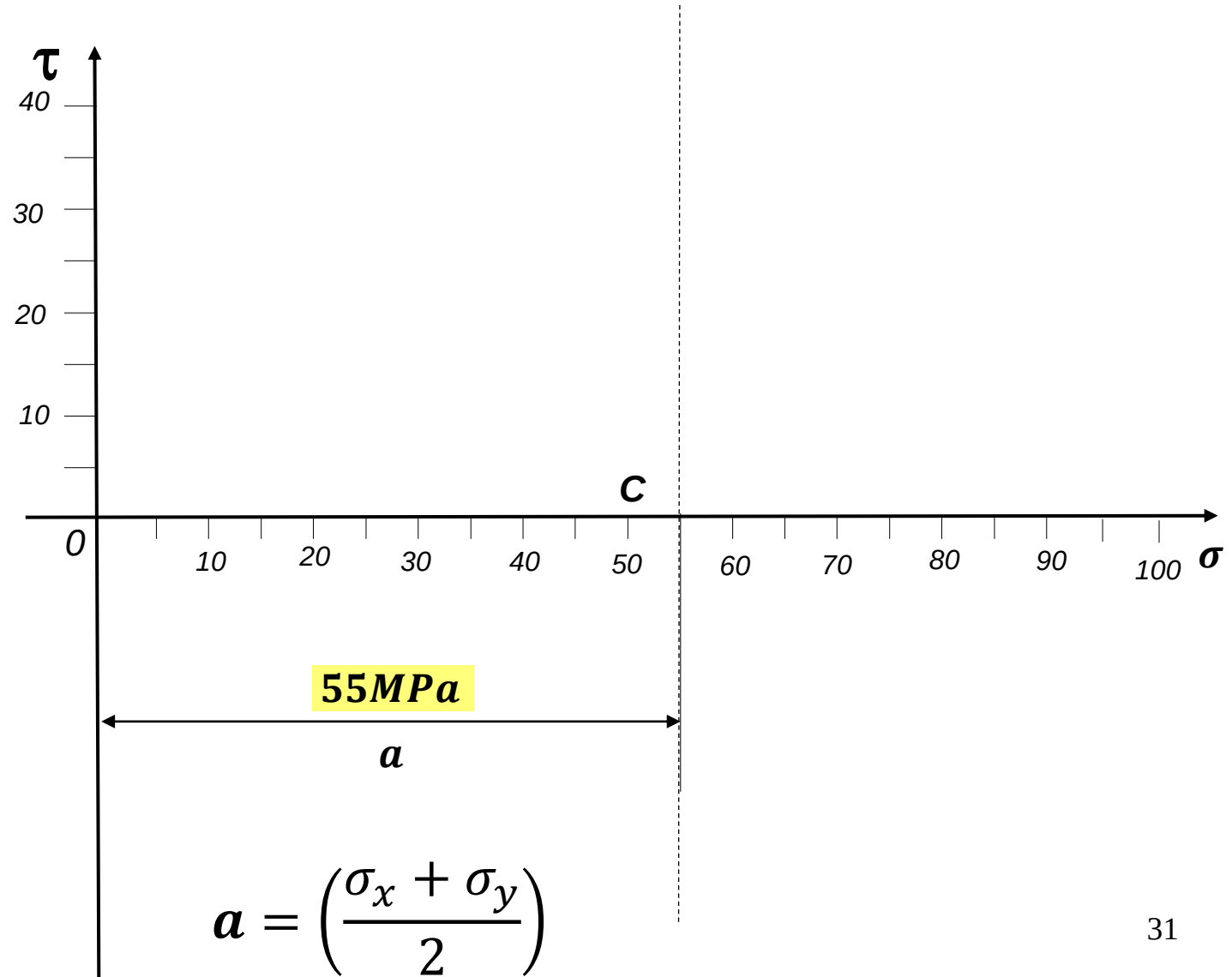
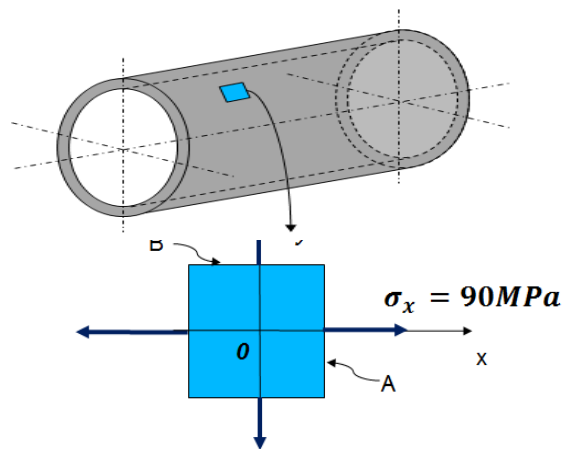


Exemplo 1



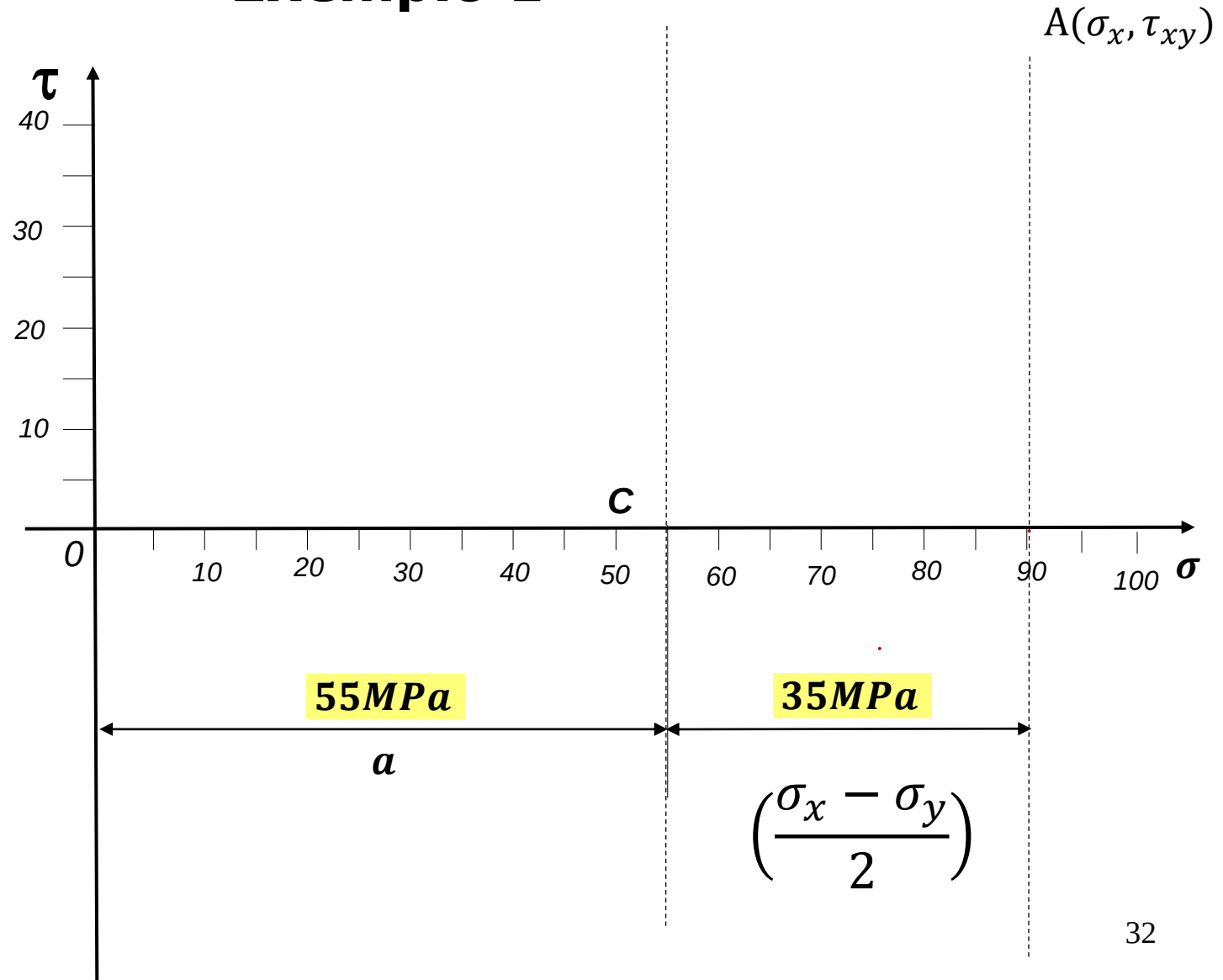
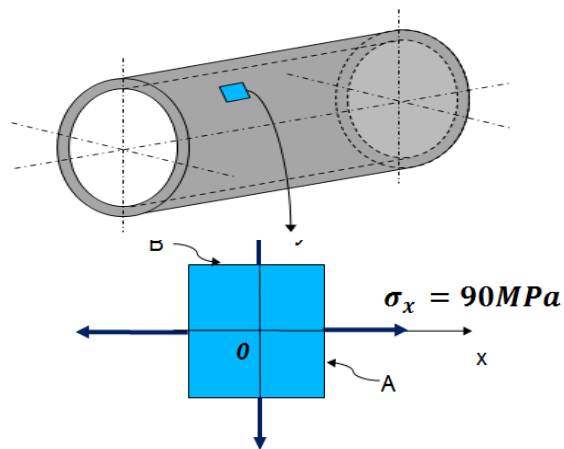


Exemplo 1





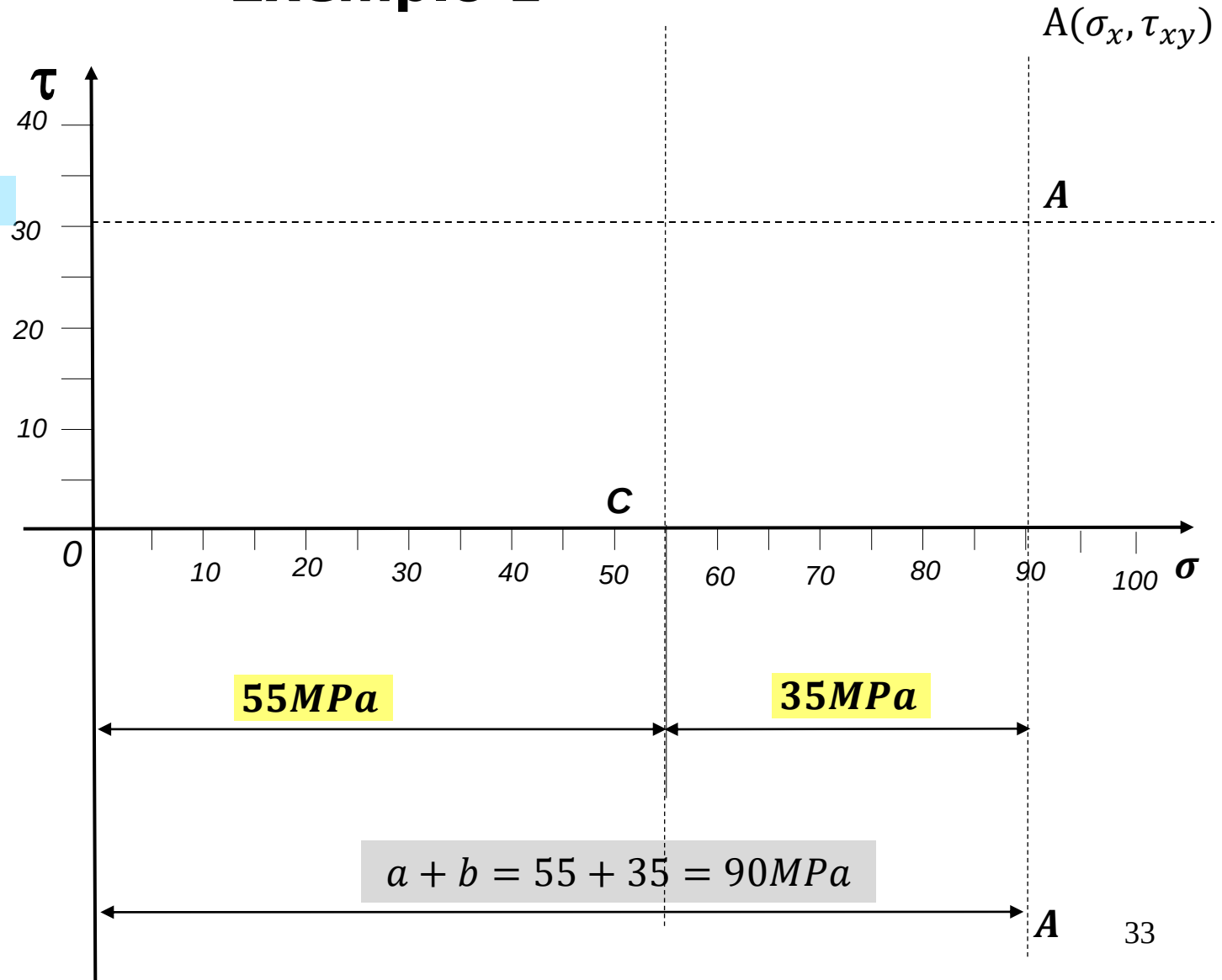
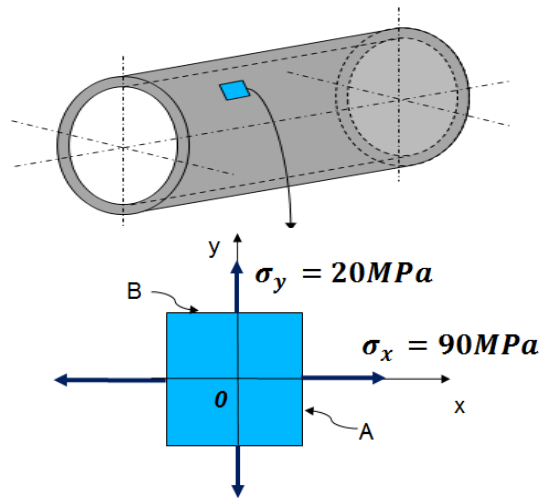
Exemplo 1





Exemplo 1

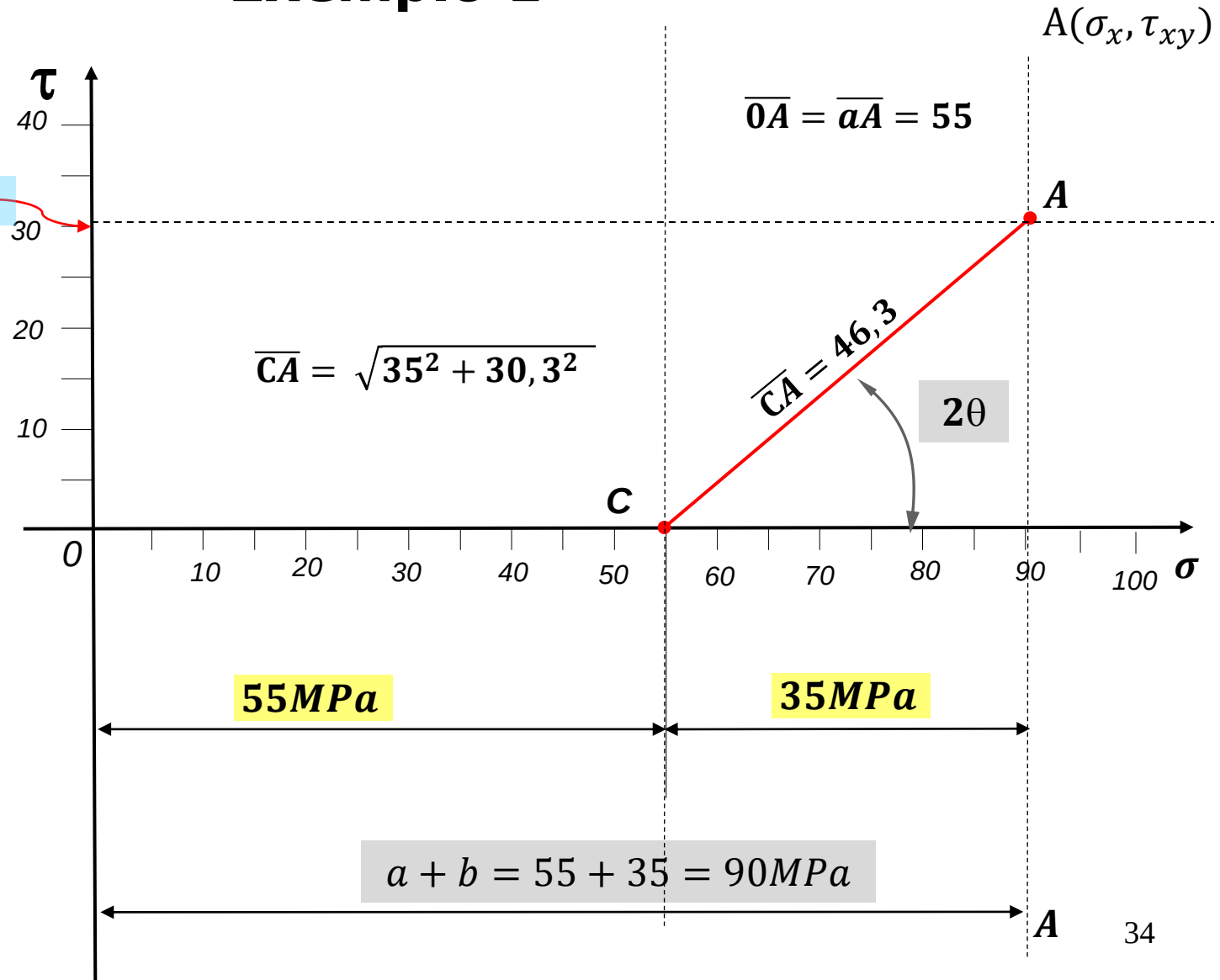
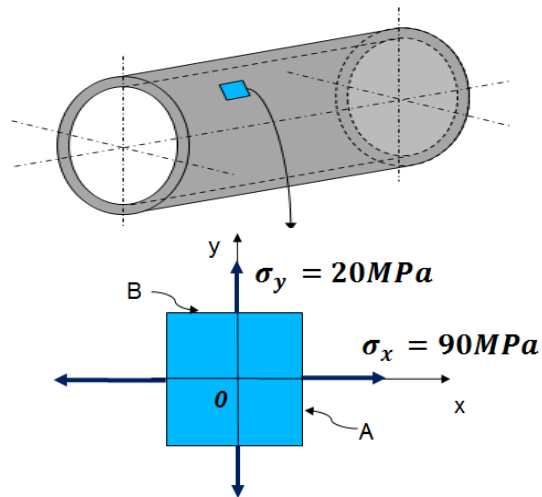
$$\tau_{xy} = 30,3 \text{ MPa}$$





Exemplo 1

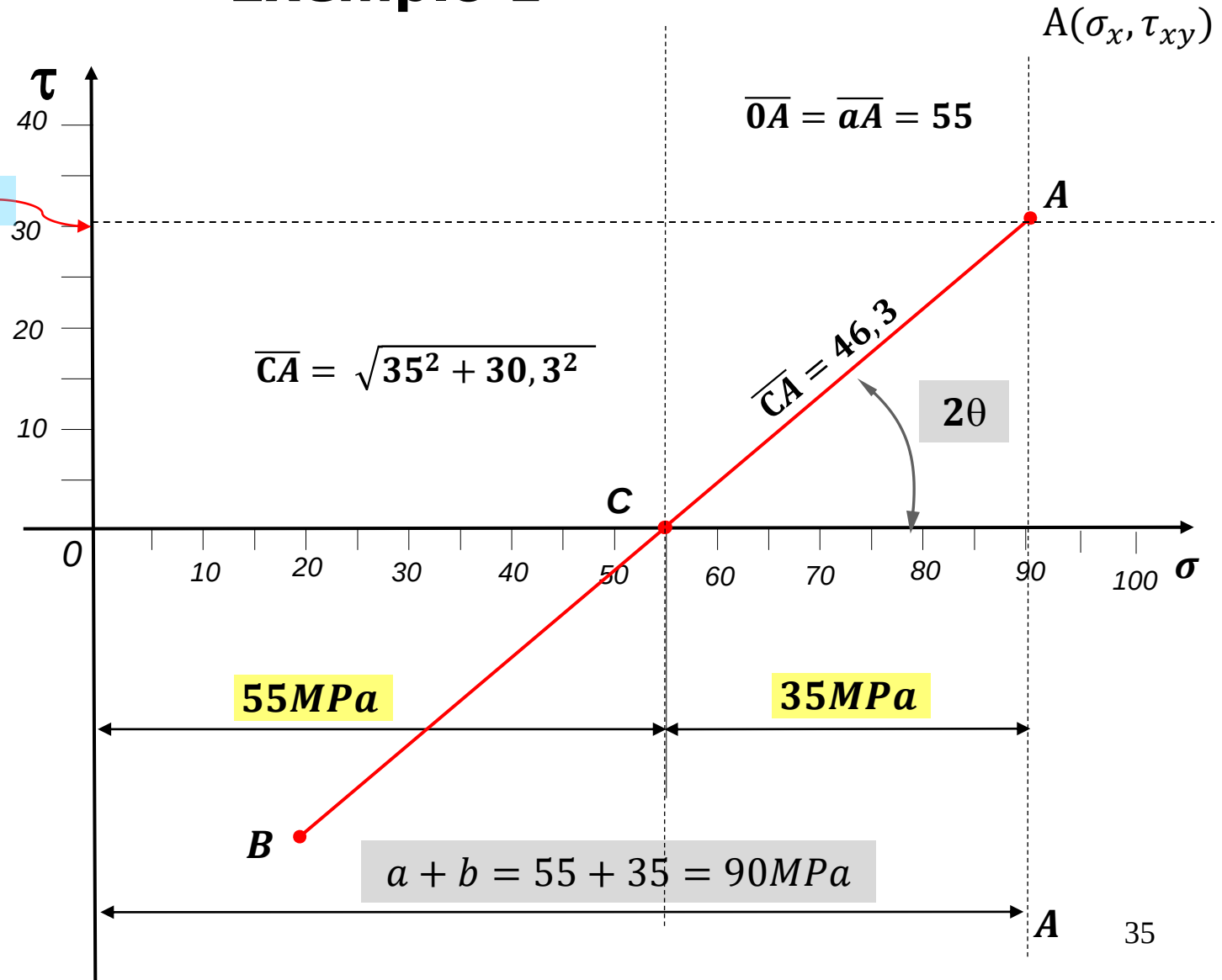
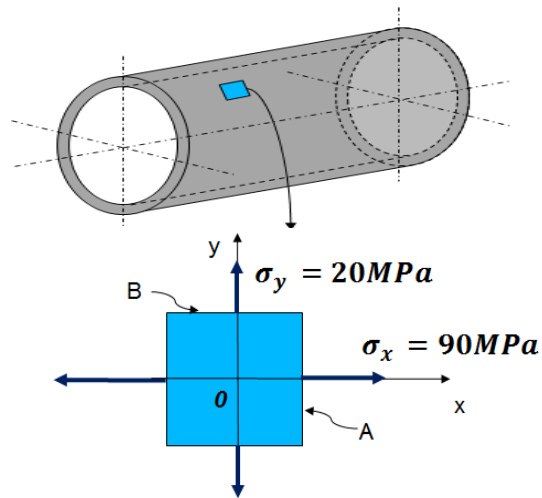
$$\tau_{xy} = 30,3 \text{ MPa}$$





Exemplo 1

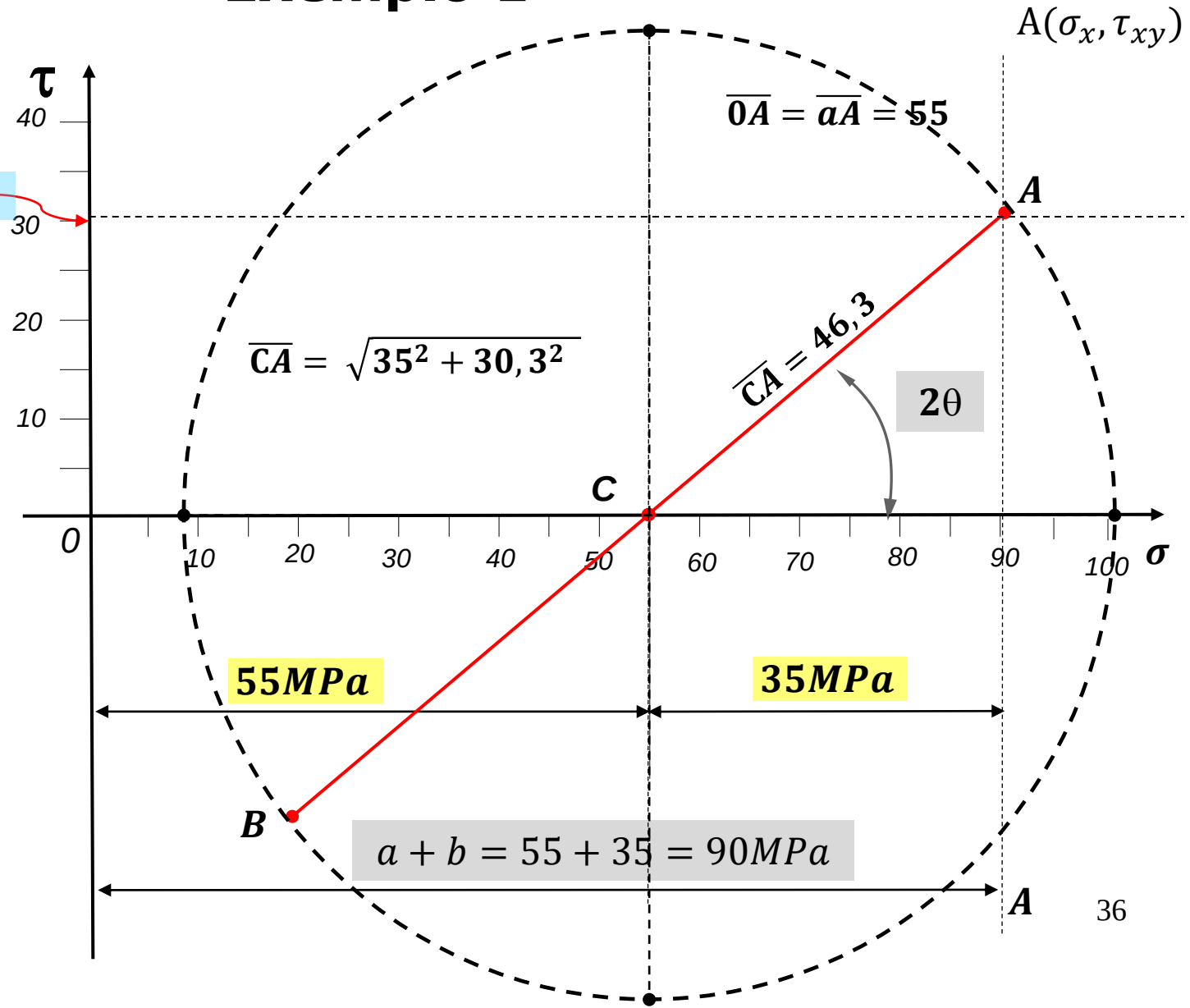
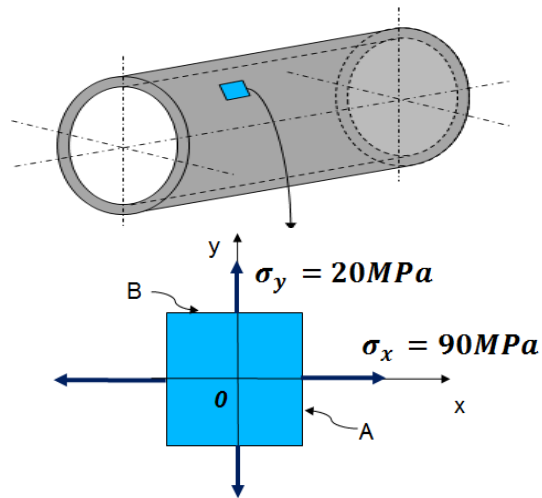
$$\tau_{xy} = 30,3 \text{ MPa}$$





Exemplo 1

$\tau_{xy} = 30,3 \text{ MPa}$

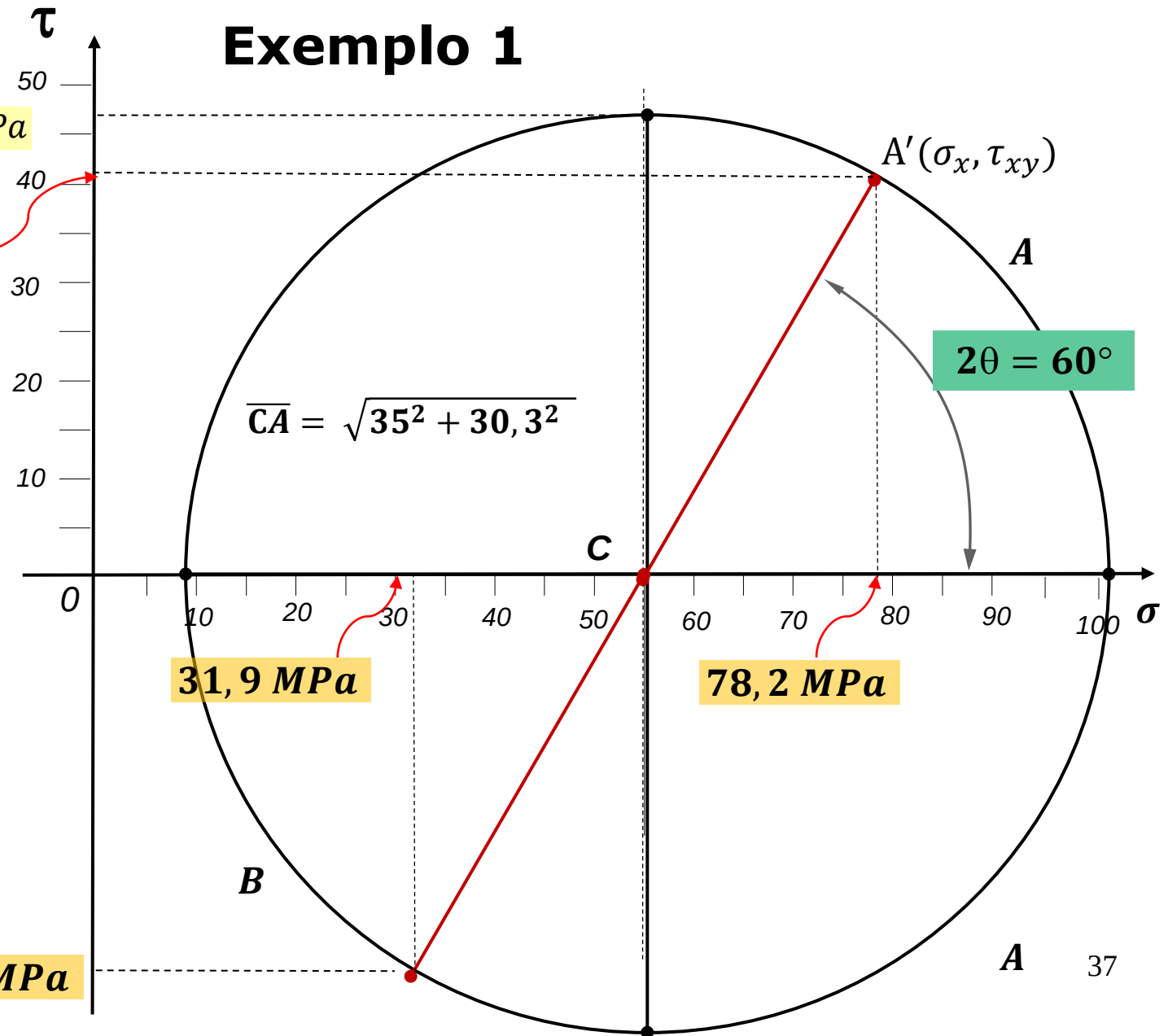
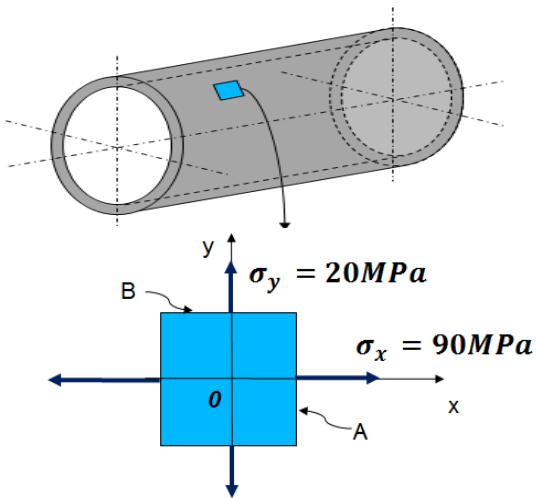




Exemplo 1

$$\tau_{max} = 46,3 \text{ MPa}$$

$$40,1 \text{ MPa}$$



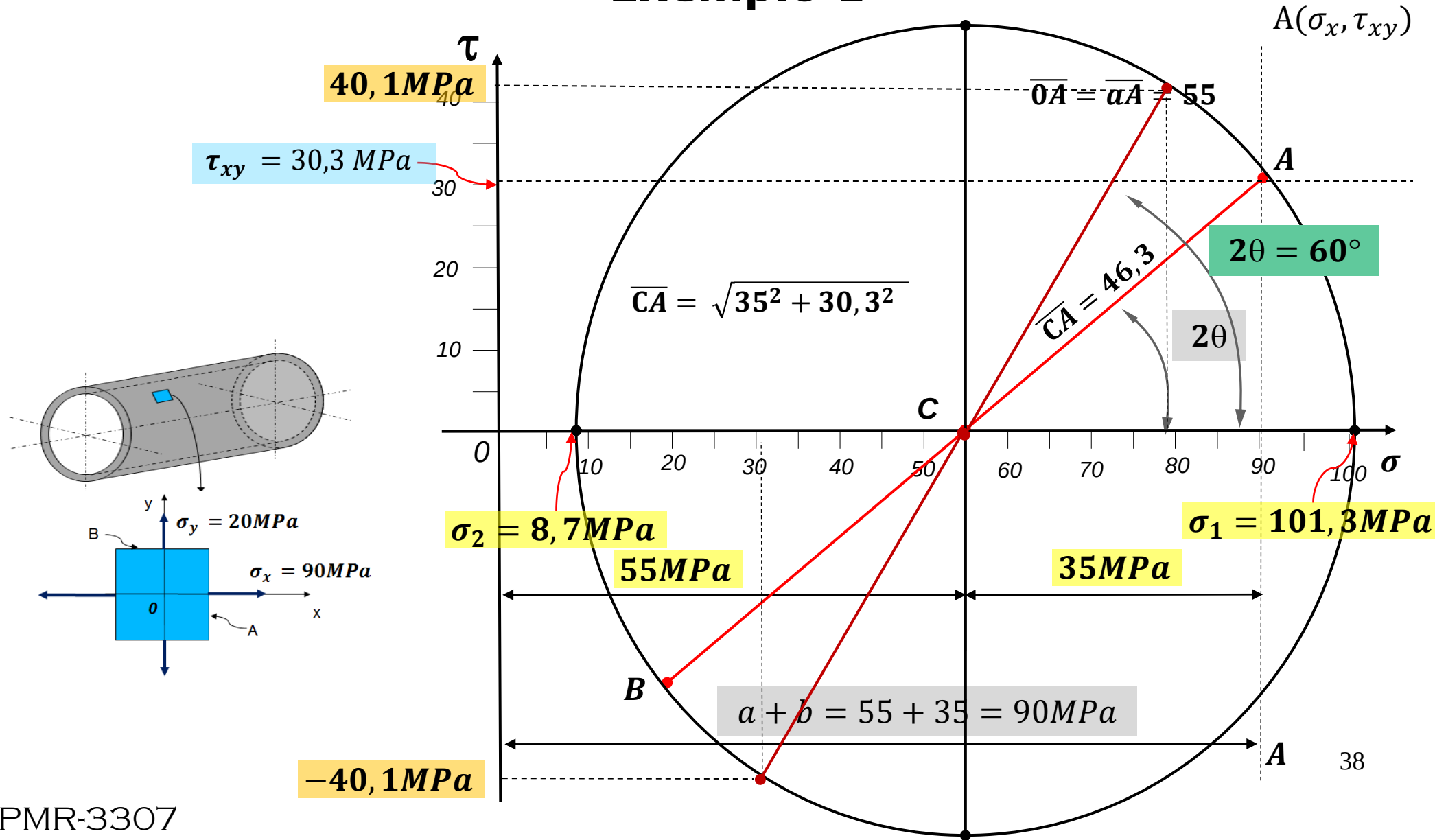
$$-40,1 \text{ MPa}$$

$$31,9 \text{ MPa}$$

$$78,2 \text{ MPa}$$



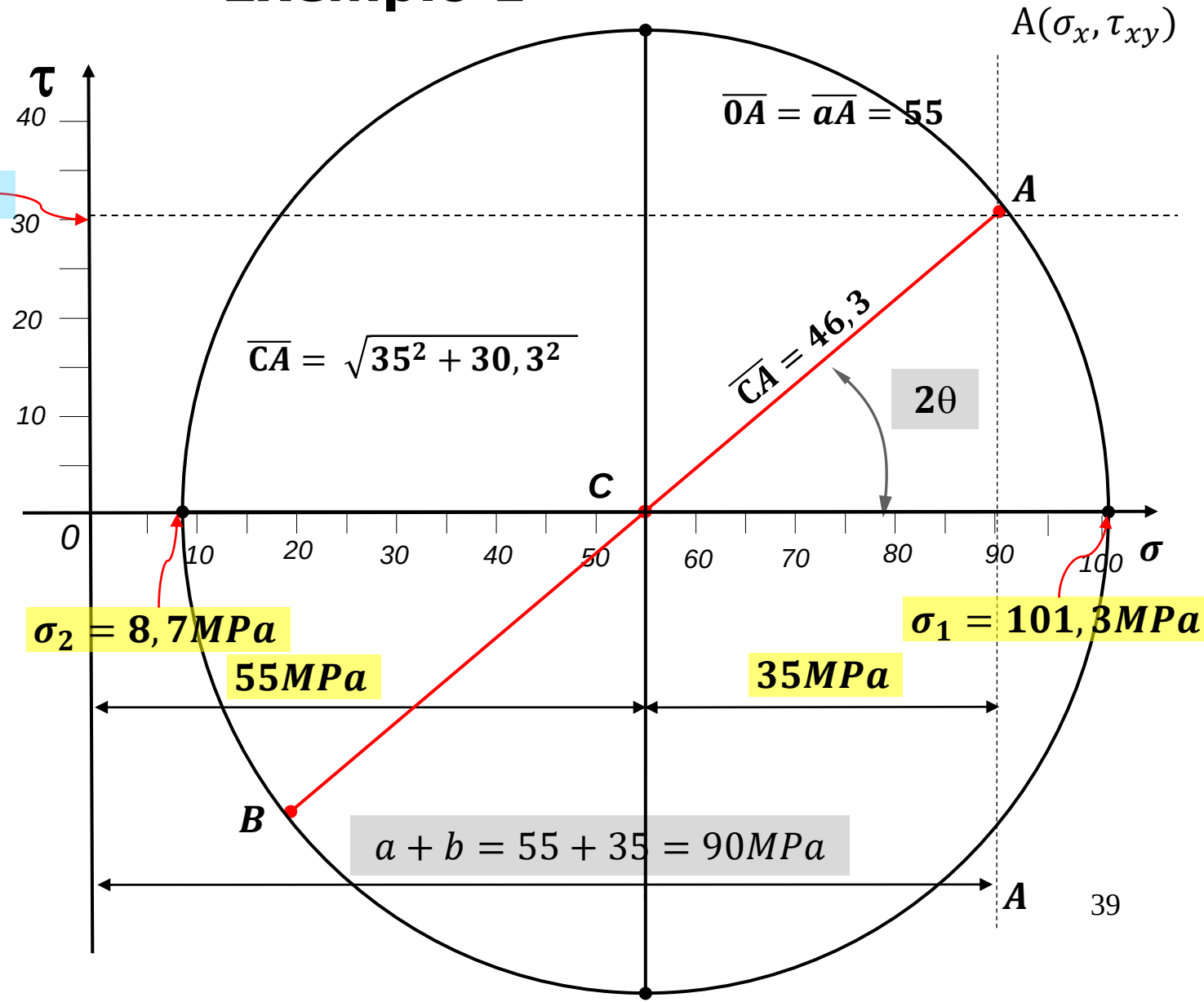
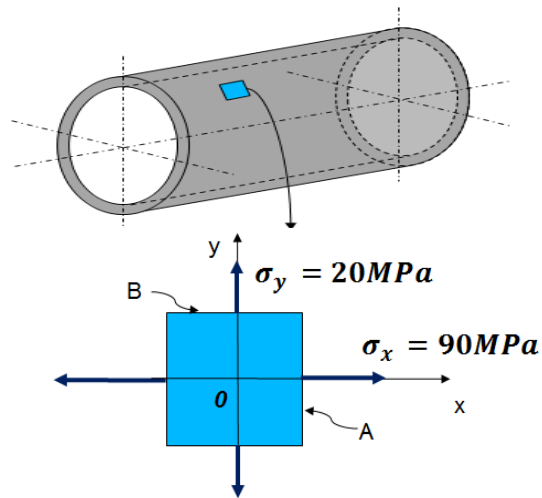
Exemplo 1





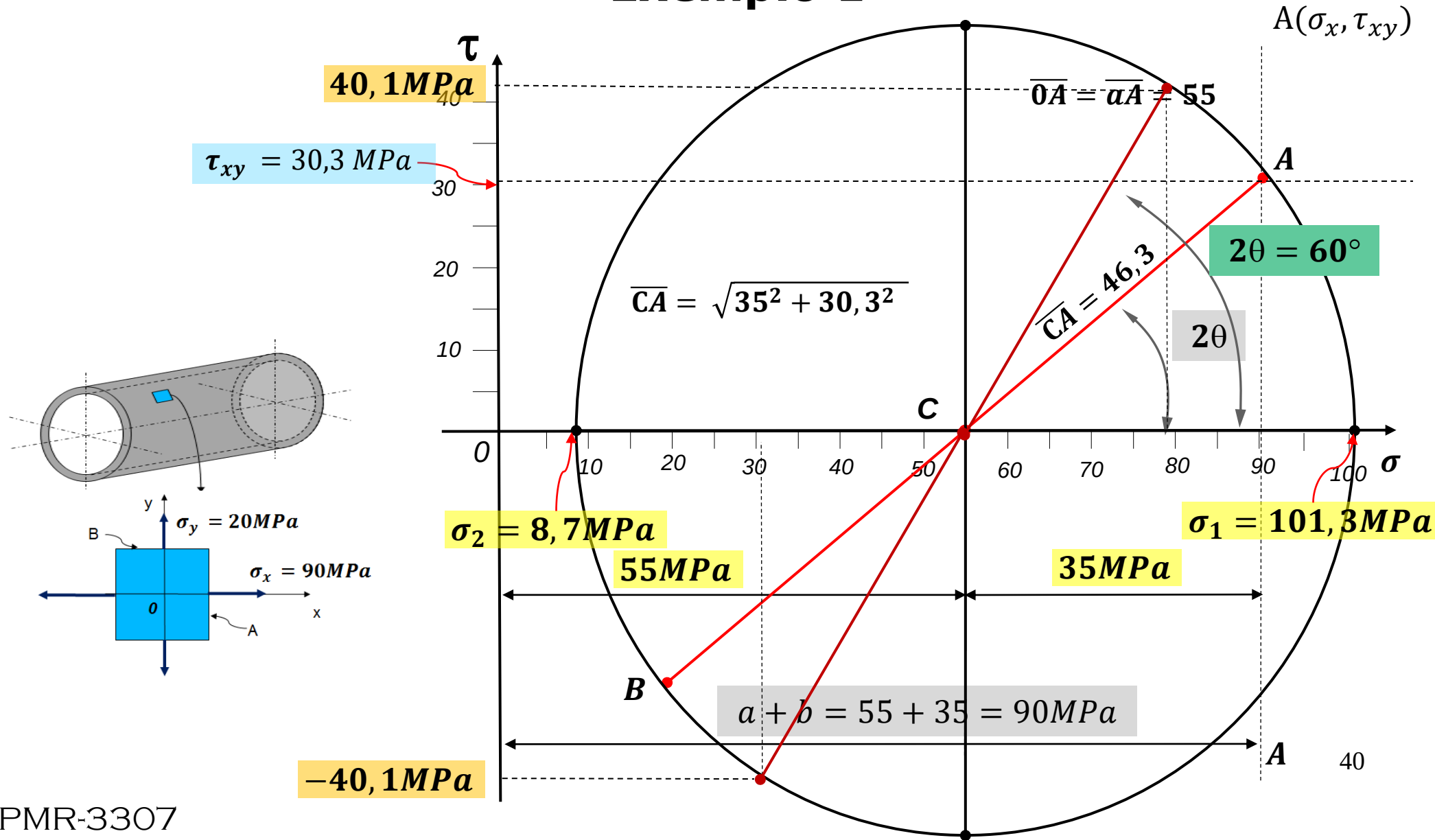
Exemplo 1

$$\tau_{xy} = 30,3 \text{ MPa}$$



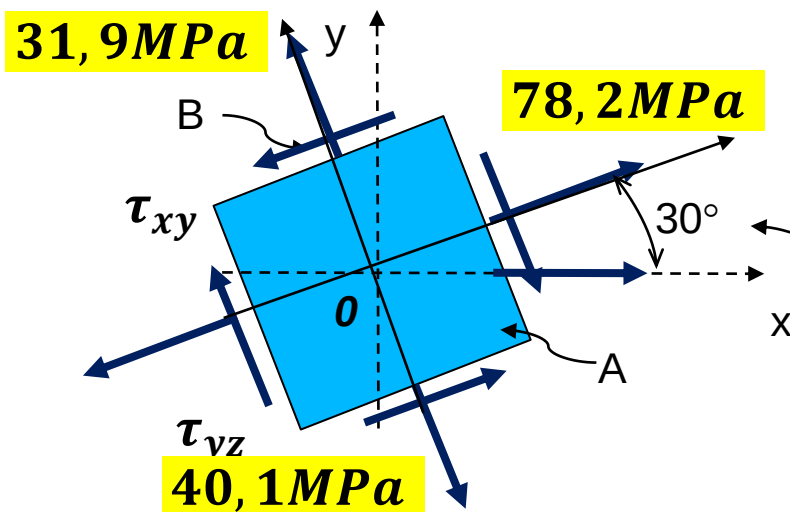
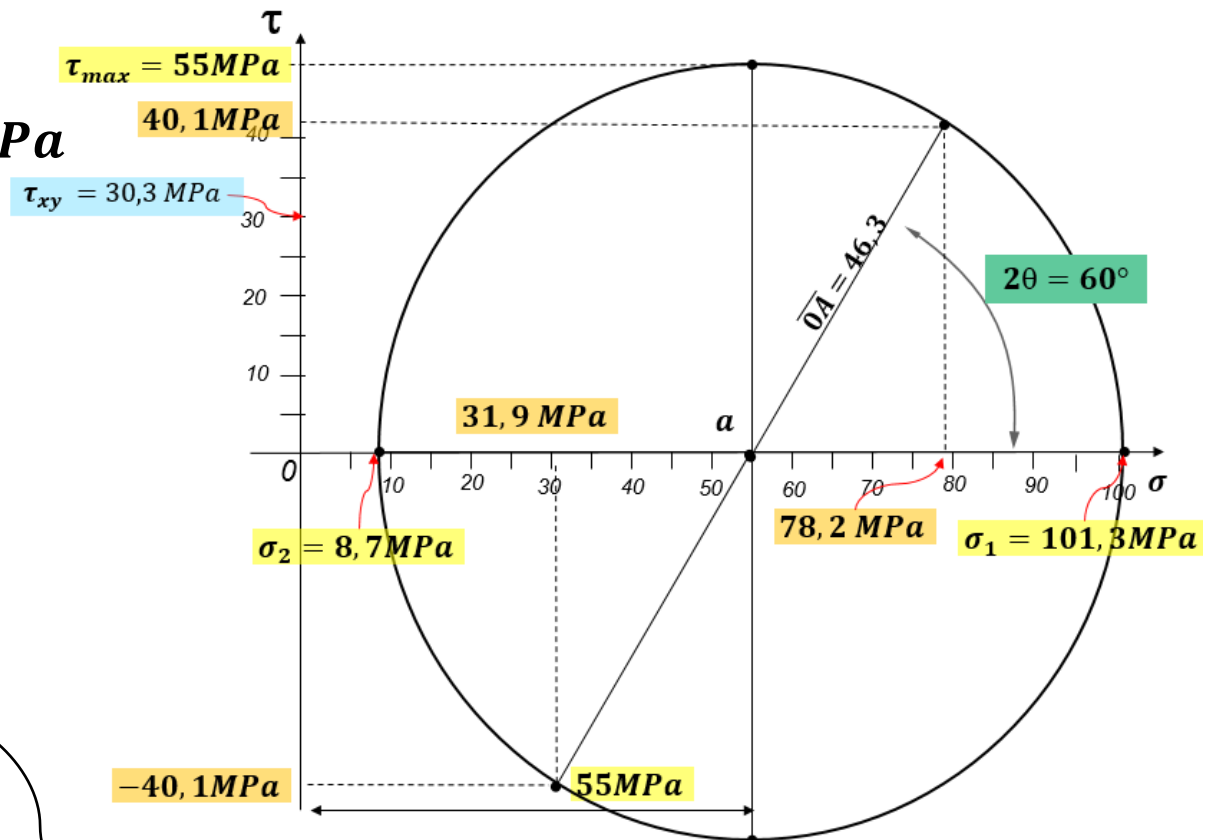
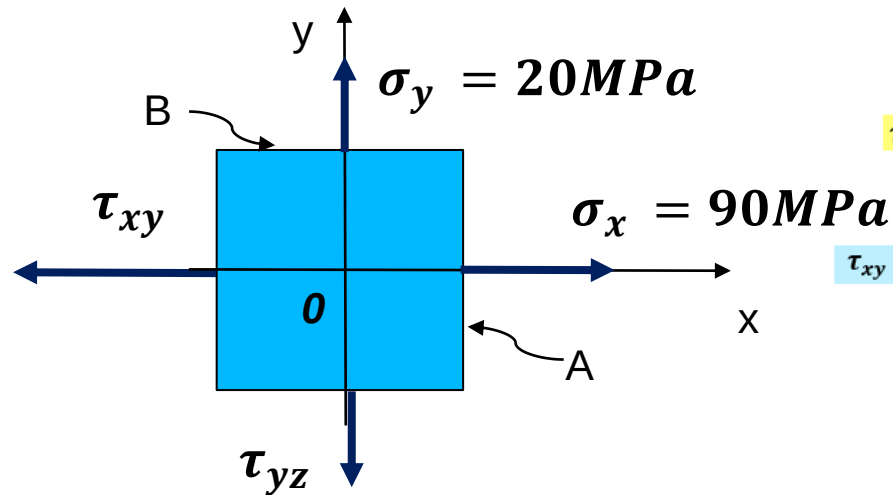


Exemplo 1





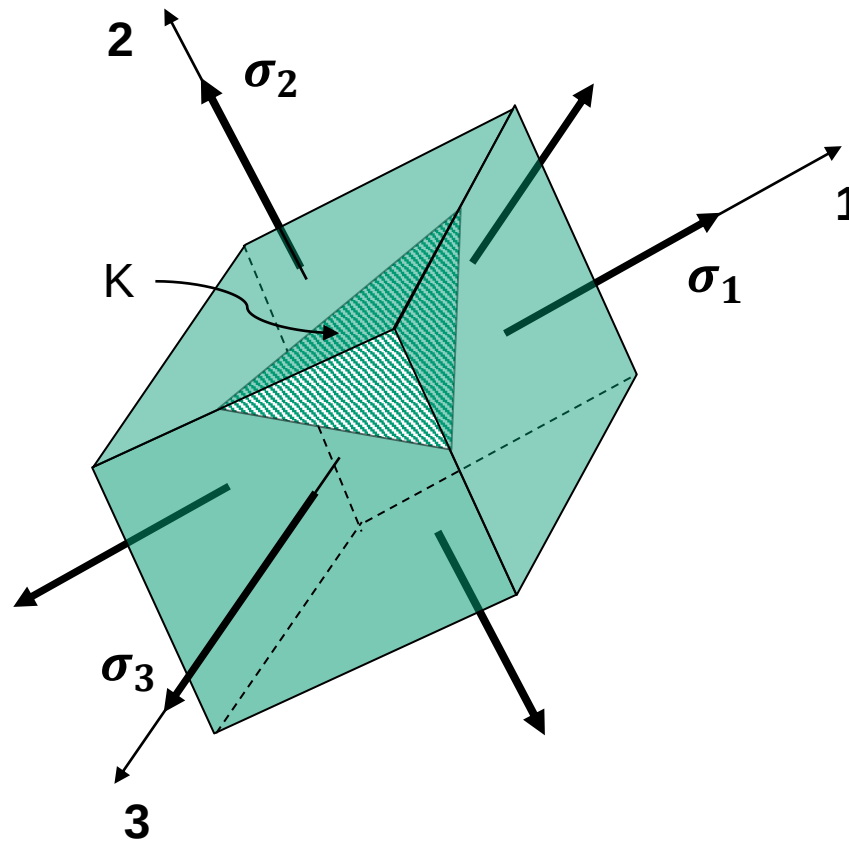
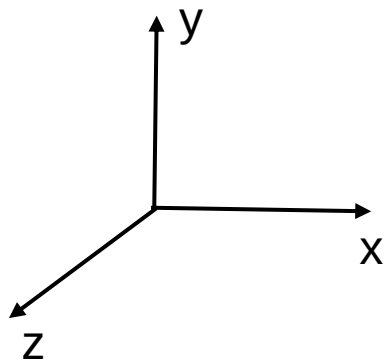
Exemplo 1



mostre um desenho do elemento orientado. 41

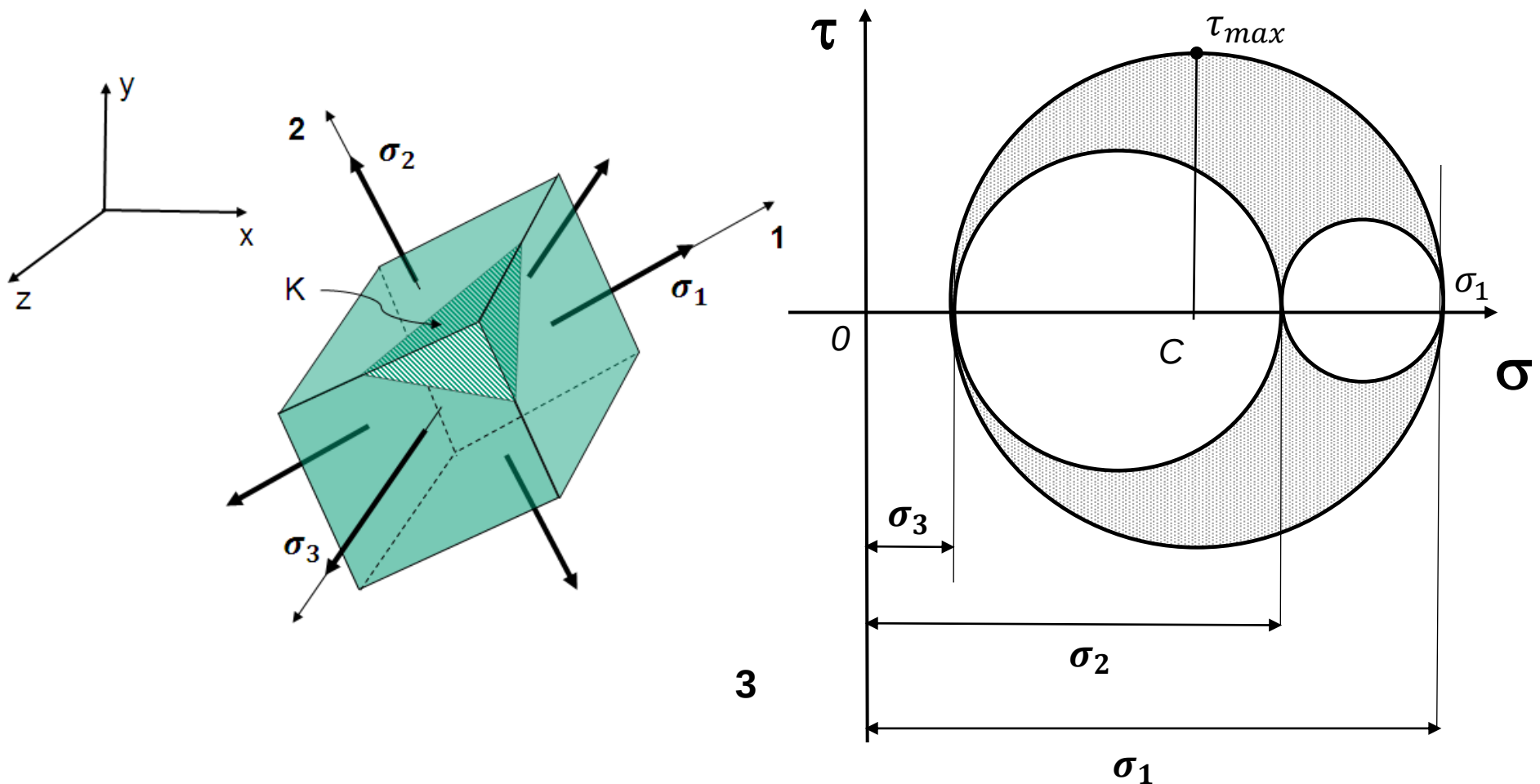


Círculo de Mohr para o estado geral de tensões





Círculo de Mohr para o estado geral de tensões

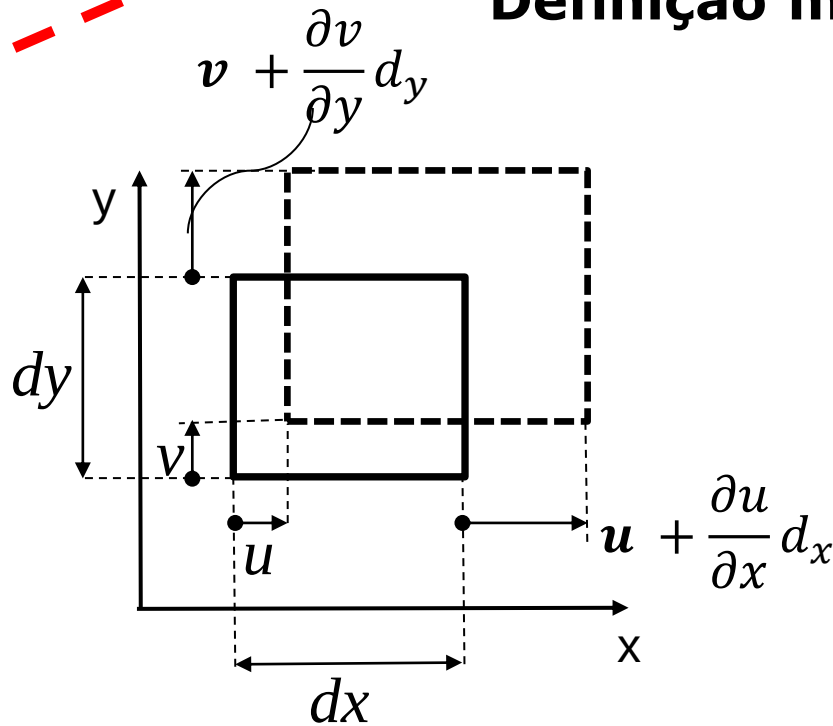




RELEMBRANDO!

Deformação

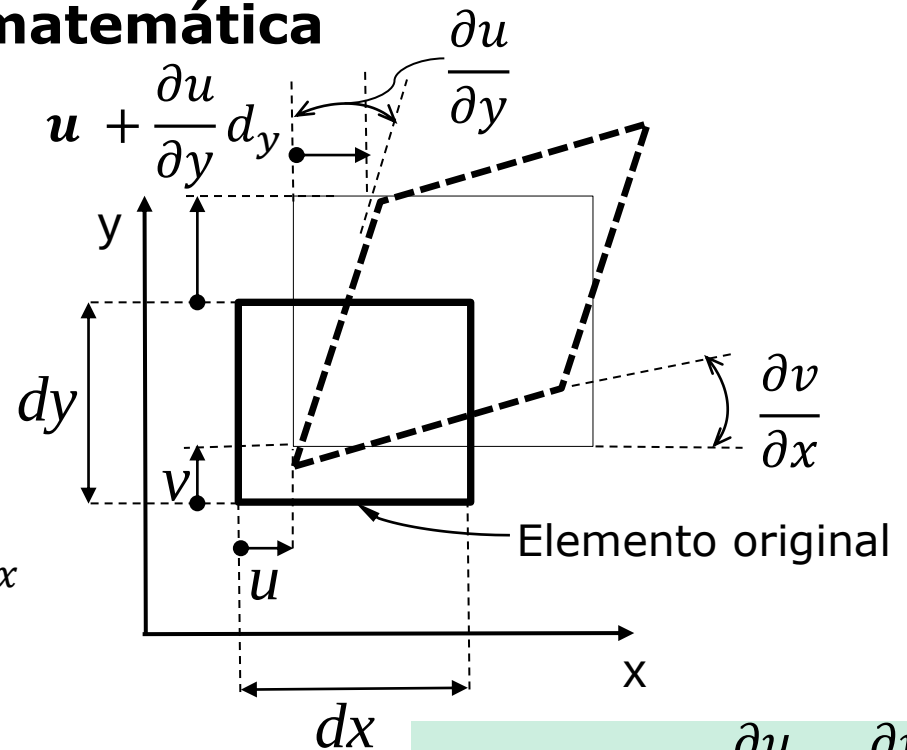
Definição matemática



$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$



$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

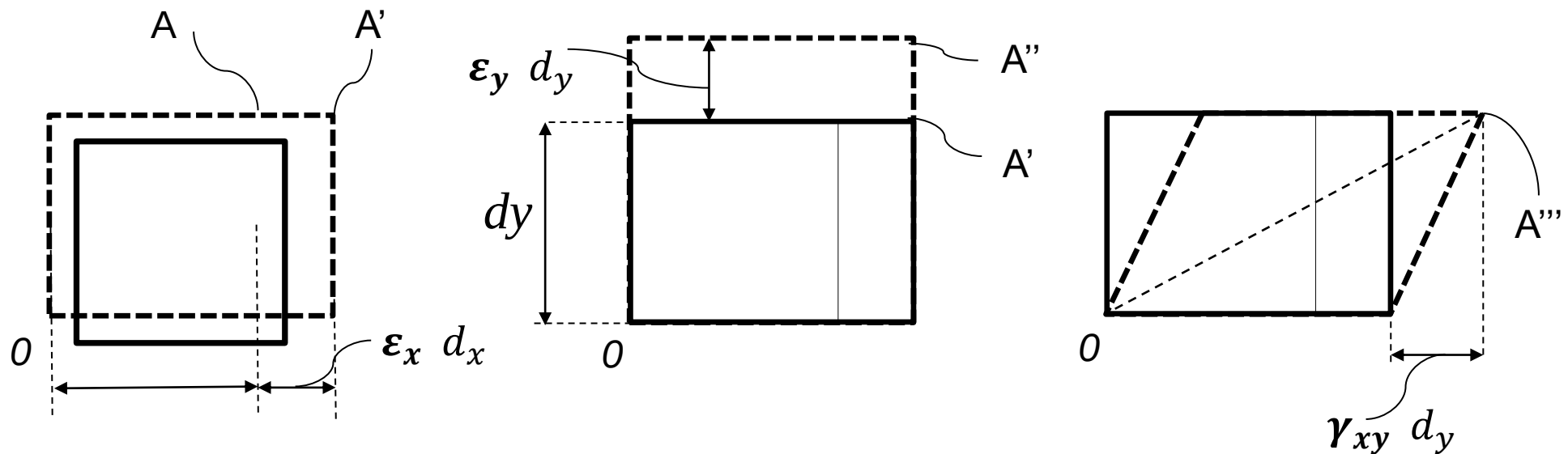
$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$



RELEMBRANDO!

Equação para transformação de Deformação Plana

Definição

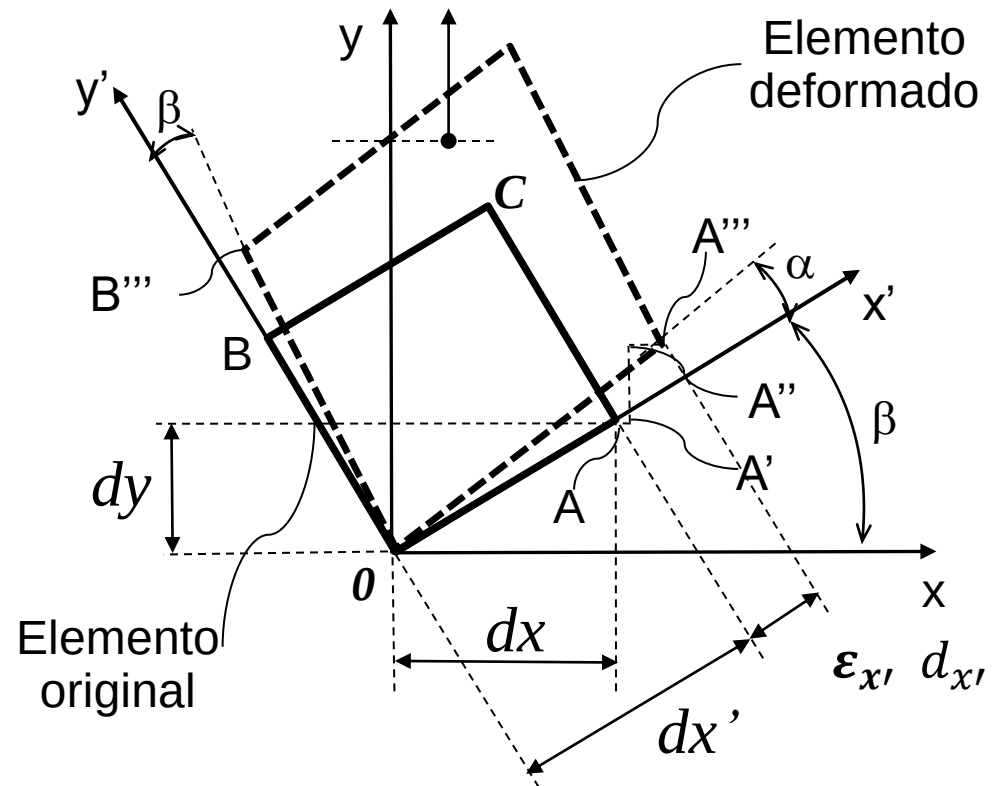
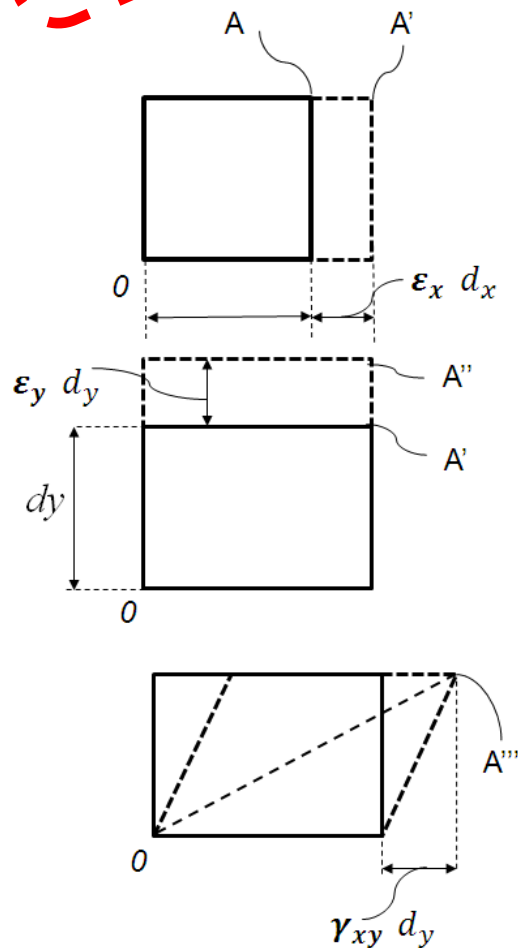




RELEMBRANDO!

Equação para transformação de Deformação Plana

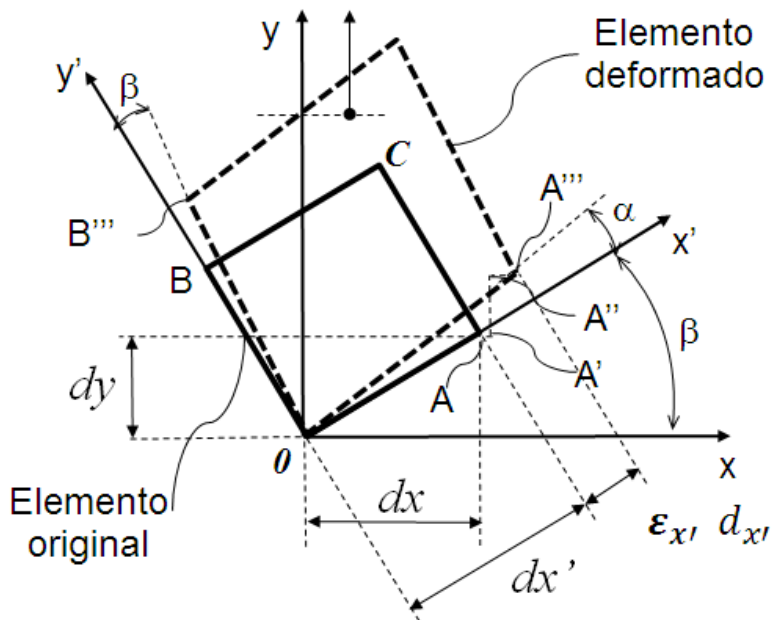
Definição





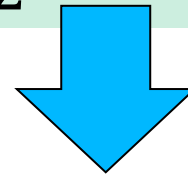
Equação para transformação de Deformação Plana

Definição



$$\epsilon_{x'} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + \frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2} \cdot \cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \sin 2\theta$$

$$\frac{\gamma_{x'y'}}{2} = \frac{-(\epsilon_x - \epsilon_y)}{2} \sin 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\theta$$

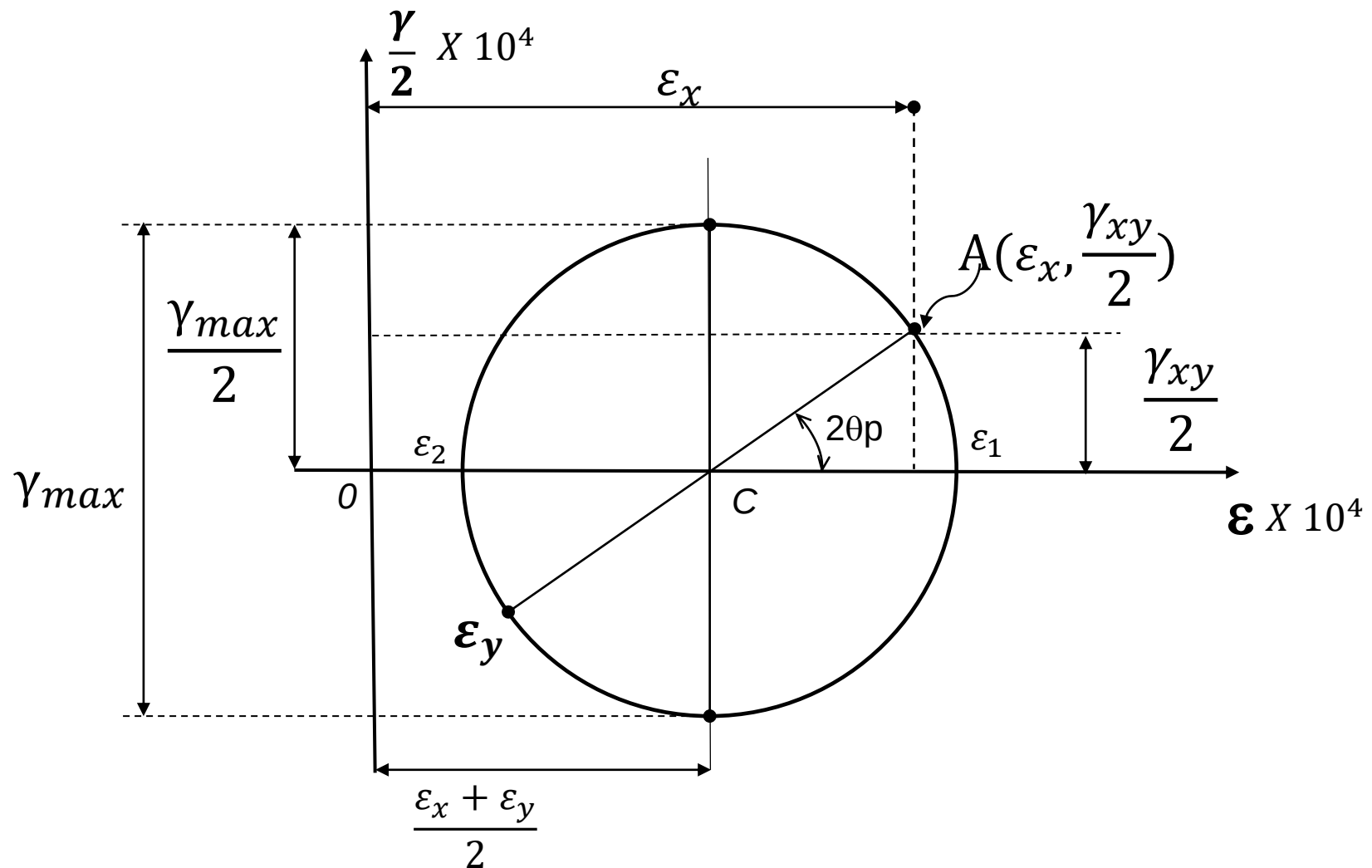


$$(\epsilon_{x'})_{\frac{min}{max}} = \epsilon_1 \text{ ou } \epsilon_2 = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

$$\tan 2\theta = \frac{\gamma_{xy}}{(\epsilon_x - \epsilon_y)}$$



Círculo de Deformação Mohr





Relações adicionais entre tensão e deformação

- Relação entre as tensões principais e deformações

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_2}{E}$$

$$\sigma_1 = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \nu \frac{\sigma_1}{E}$$

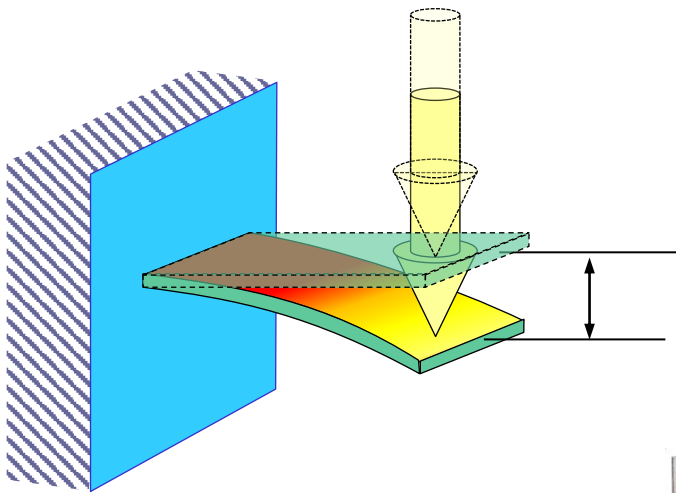
$$\sigma_2 = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1)$$



Medição de tensões e deformações

Extensometria

Em muitas situações de engenharia conhecer ou monitorar o nível de deformação, é de extrema importância, e pode ser realizado de diversas formas.



relógio comparador



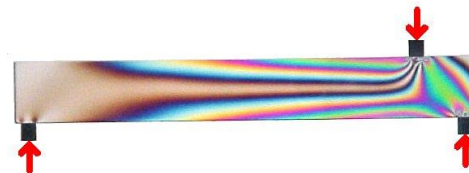
detector eletrônico



detector óptico-eletrônico



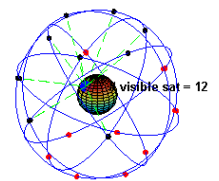
strain-gauge



fotoelasticidade



camada frágil



GPS

Tudo depende da amplitude e da precisão

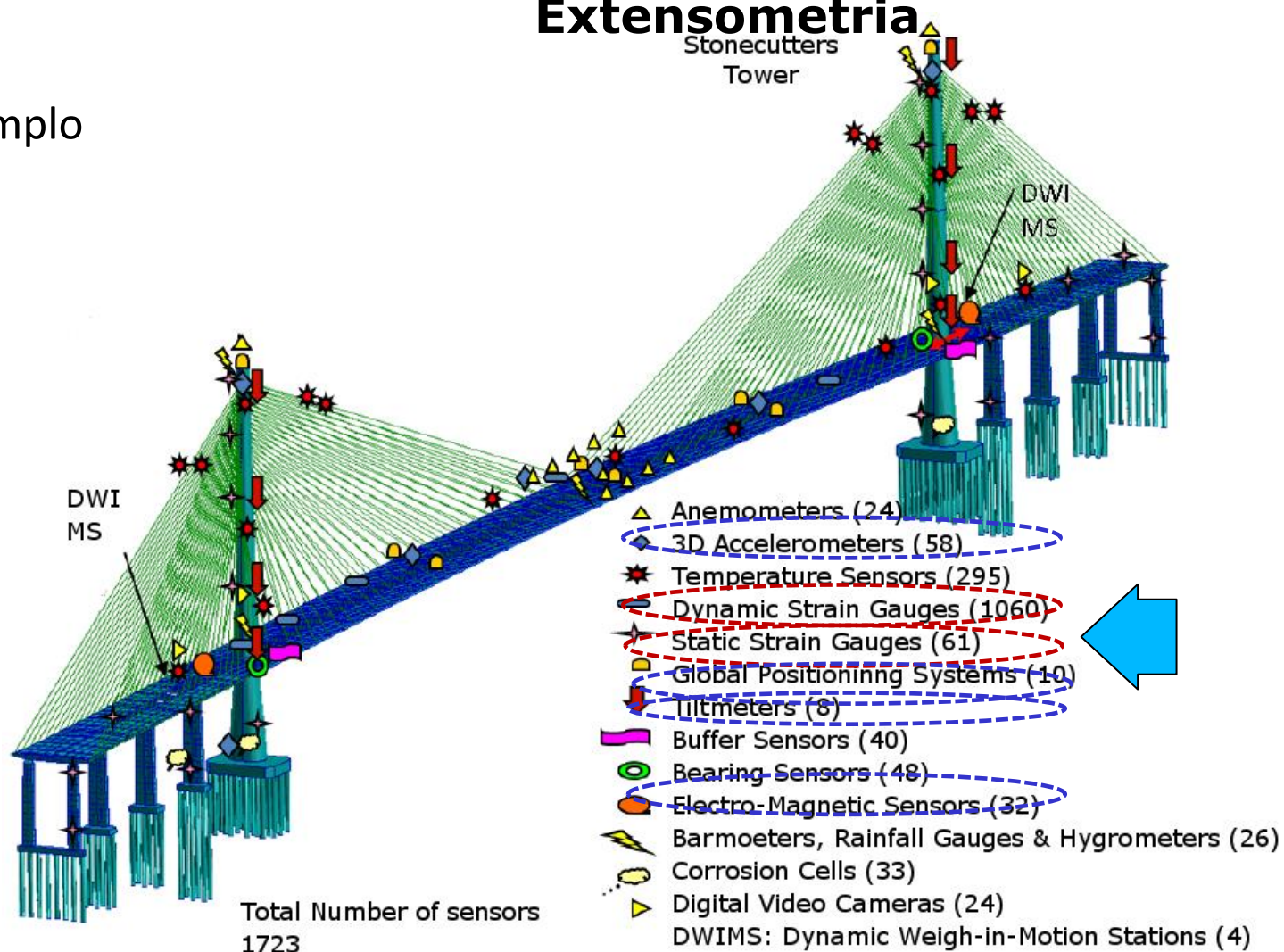


Medição de tensões e deformações

Extensometria

Stonecutters
Tower

Exemplo





Medição de tensões e deformações

Extensometria

A extensometria é uma técnica utilizada para a análise experimental de tensões e deformações em estruturas dos mais diversos tipos.



<https://www.hbm.com/en/6711/webinar-mechanical-aircraft-testing-mgcplus-new-features-june-27/>



<https://strainbond.com/applications>





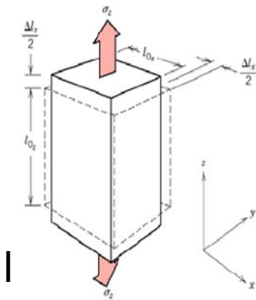
Medição de tensões e deformações

Extensômetro

Extensômetros são sensores cujo o princípio de funcionamento esta baseado na alteração da resistência elétrica de um corpo condutor geometricamente definido é proporcional ao comprimento e inversamente proporcional a área da seção transversal.

$$R = \frac{\rho L}{A}$$

Onde: R = Resistência elétrica
L = comprimento
A = área da seção transversal
 ρ = constante de resistividade do material



- O aumento da deformação aumenta do comprimento (L) e diminuição da seção transversal (A) – Lei de Hooke – levam a um aumento da resistência elétrica (R)
- Para a maioria dos materiais o aumento da deformação leva ao aumento da resistividade elétrica (ρ)
- A temperatura constante a resistência do corpo aumenta linearmente com a deformação

$$S\varepsilon_a = \frac{\delta R}{R}$$

Onde: S = fator adimensional de extensometria (*strain gage factor*)

Usualmente S = 2 para extensômetros comerciais



Medição de tensões e deformações

Extensômetro

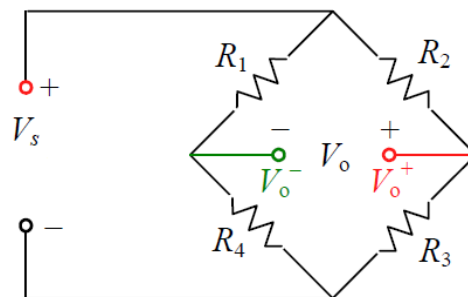
A resistência elétrica típica de Extensômetros comerciais são $120\ \Omega$ ou $350\ \Omega$, considerando que as deformações típicas em elementos de máquina na ordem de $10^{-6} < \varepsilon_a < 10^{-3}$, e o fato de extensometria de $S = 2$.

Temos:

$$S\varepsilon_a = \frac{\delta R}{R} \Rightarrow \delta R = R \cdot S\varepsilon_a \Rightarrow 0,00024\Omega < \delta R < 0,24\Omega$$

Então $\delta R/R$ é muito pequeno, o que é difícil de medir.

Ponte de Wheatstone



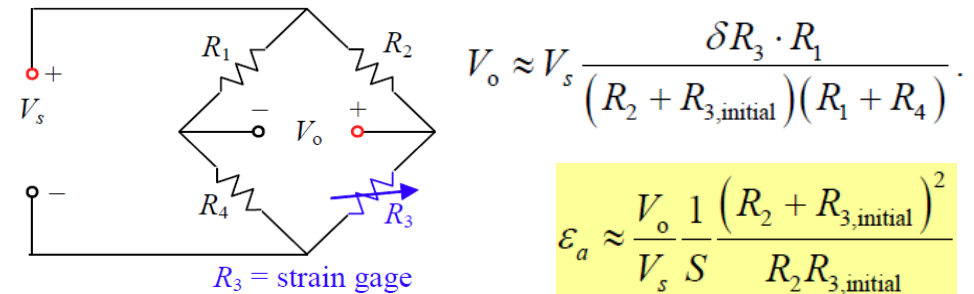
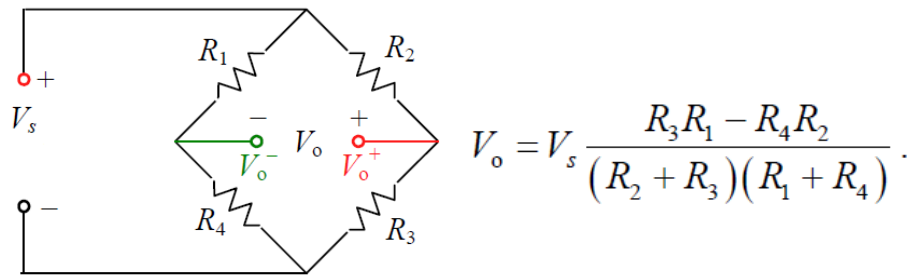
$$V_o = V_s \frac{R_3 R_1 - R_4 R_2}{(R_2 + R_3)(R_1 + R_4)}.$$



Medição de tensões e deformações

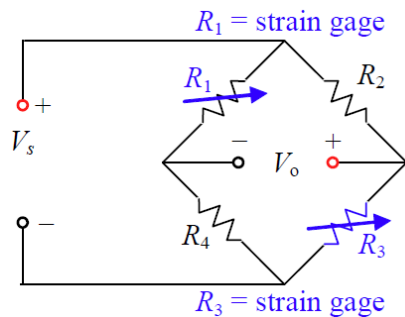
Extensômetro

Ponte de Wheatstone



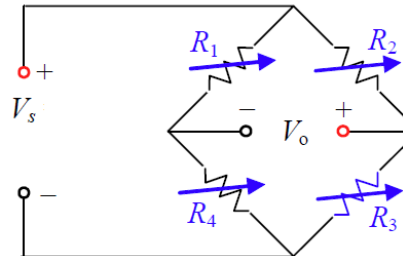
n = 1

$$\varepsilon_a \approx 4 \frac{V_o}{V_s} \frac{1}{S}$$



n = 2

$$\varepsilon_a \approx \frac{4}{n} \frac{(V_o - V_{o,reference})}{V_s} \frac{1}{S}$$



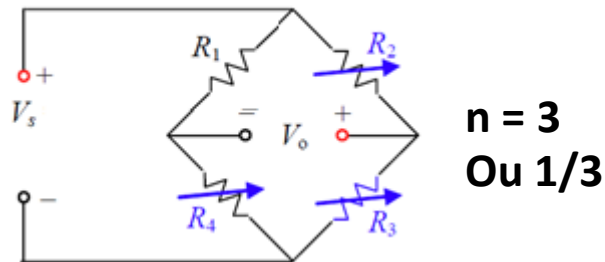
n = 4

$$V_o \approx V_{o,reference} + \frac{n}{4} \varepsilon_a S V_s$$



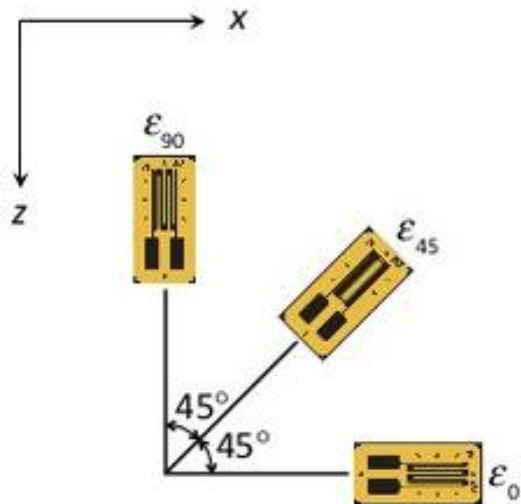
Medição de tensões e deformações

Roseta de deformação



$n = 3$
Ou $1/3$

45° ('Corner') Rosette



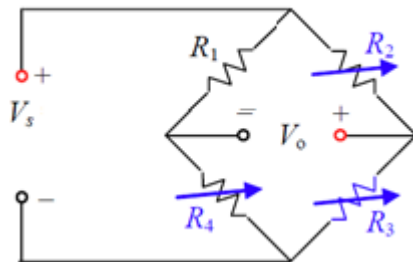
- A roseta de deformação parte do princípio que três pontos não colineares definem um, e somente um, círculo.
- Esta permite a definição dos pontos a partir das tensões normais em três direções.
- Assim o uso da roseta de deformação permite definir um único círculo de Mohr de deformação.
- Para este caso específico

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_x = \epsilon_{0^\circ} \\ \epsilon_y = \epsilon_{90^\circ} \\ \gamma_{xy} = \epsilon_{0^\circ} + \epsilon_{90^\circ} - 2 \cdot \epsilon_{45^\circ} \end{array} \right.$$



Medição de tensões e deformações

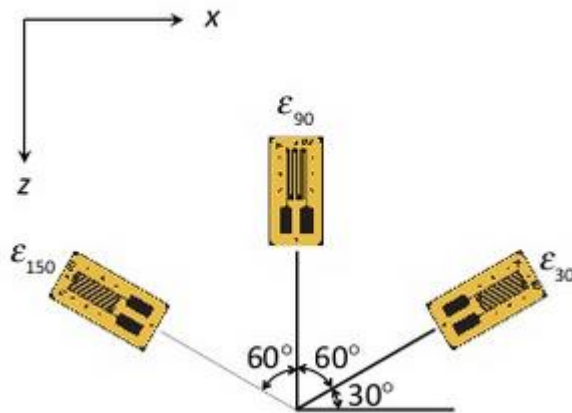
Roseta de deformação



$n = 3$
Ou $1/3$

- Outra configuração para a roseta de deformação é a de 60° ou Delta
- Para este caso específico as equações de deformação ficam:

• 60° ('Delta') Rosette



$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{2}{3} \left(\varepsilon_{30^\circ} - \frac{\varepsilon_{90^\circ}}{2} + \varepsilon_{150^\circ} \right) \\ \varepsilon_y = \varepsilon_{90^\circ} \\ \gamma_{xy} = \frac{2}{\sqrt{3}} (\varepsilon_{150^\circ} - \varepsilon_{30^\circ}) \end{array} \right.$$



FIM DA AULA