



ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

# **Introdução aos Elementos de Máquinas**

**PMR 3320 - A03**

**Teorias de falha**

**2023.2**



# ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

## PMR 3320 - Cronograma de aulas 2023.2

<del>Aula 01</del>	<del>07.08.2022</del>	<del>Introdução. Modelagem, carregamento e equilíbrio</del>
<del>Aula 02</del>	<del>14.08.2022</del>	<del>Estado plano de tensões — Círculo de Mohr</del>
Aula 03	21.08.2022	Teorias de falha
Aula 04	28.08.2022	Falha por fadiga
---	04.09.2022	<b>Recesso (Semana da Pátria)</b>
Aula 05	11.09.2022	<b>Avaliação 1 – Aulas 01 a 04</b>
Aula 06	18.09.2022	Fixação cubo eixo, pinos e rebites
Aula 07	25.09.2022	Dimensionamento Eixos
Aula 08	02.10.2022	Elementos de fixação – parafusos e fusos
Aula 09	09.10.2022	Elementos de transmissão - correias e correntes
Aula 10	16.10.2022	<b>Avaliação 2 – Aulas 06 a 09</b>
Aula 11	23.10.2022	Elementos de transmissão – introdução as engrenagens
Aula 12	30.10.2022	Elementos de transmissão – engrenagens, roteiro AGMA
Aula 13	06.11.2022	Mancais de escorregamento e a filme fluido
Aula 14	13.11.2022	Mancais de elementos rolantes
---	20.11.2022	<b>Feriado – Consciência negra</b>
Aula 15	27.11.2022	<b>Avaliação 3 – Aulas 11 a 14</b>
Aula 16	04.12.2022	Guias, Molas e acoplamentos
Aula 17	11.12.2022	<b>Avaliação substitutiva</b>
Aula 18	18.12.2022	





## Tópicos

- ▶ Introdução a teorias de falha
- ▶ Critérios de escoamento e de fratura
- ▶ Teoria da Máxima Tensão Cisalhante
- ▶ Teoria da Máxima Energia de Distorção
- ▶ Teoria de Coulomb-Mohr para materiais dúcteis
- ▶ Teoria da Máxima Tensão Normal
- ▶ Teoria da Falha frágil Coulomb-Mohr
- ▶ Teoria de Mohr modificada para materiais frágeis



## Introdução a teoria de Falha

UmSábadoQualquer

CarlosRuas



O 4º LIVRO JÁ ESTÁ NO [catarse](#) LINK NA DESCRIÇÃO



## Introdução a teoria de Falha





## Introdução a teoria de Falha





## Introdução a teoria de Falha



**Era para considerar flexão?**





## **Introdução a teoria de falha**



**Espero que o  
assento ejetor  
tenha sido bem  
projetado**







## Introdução a teoria de falha





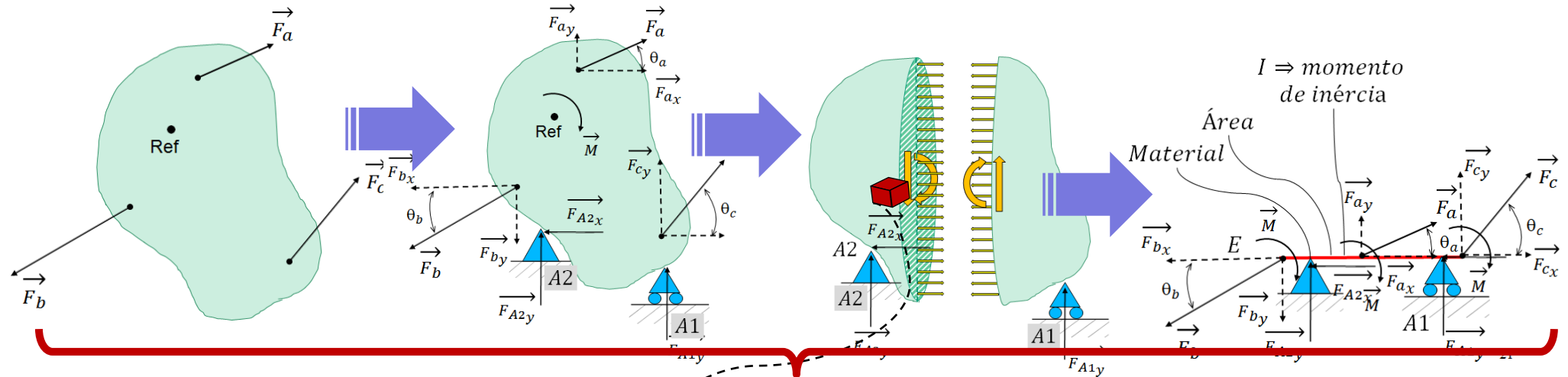
## Introdução a teoria de falha

**Será que foi o  
conteúdo  
daquela aula  
que eu dormi?**

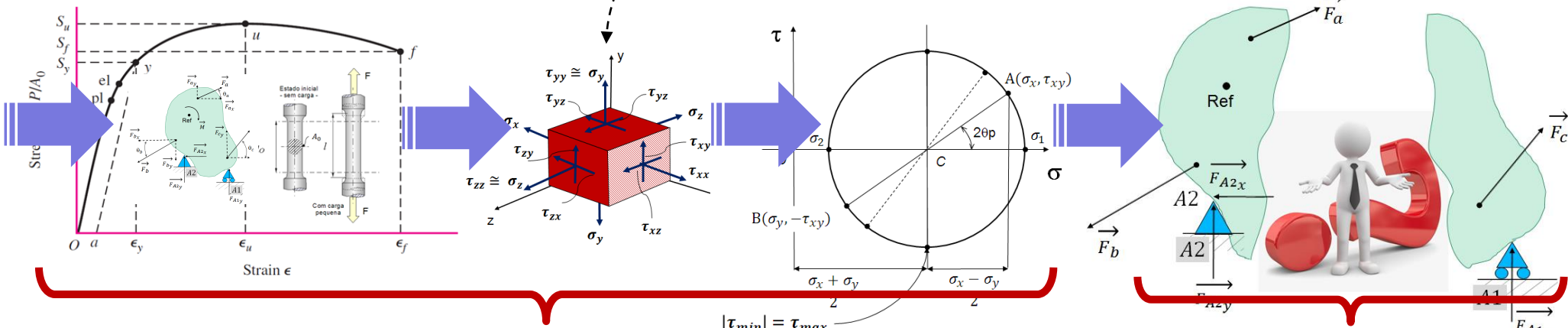




# Introdução a teoria de Falha



Aula 01



Aula 02

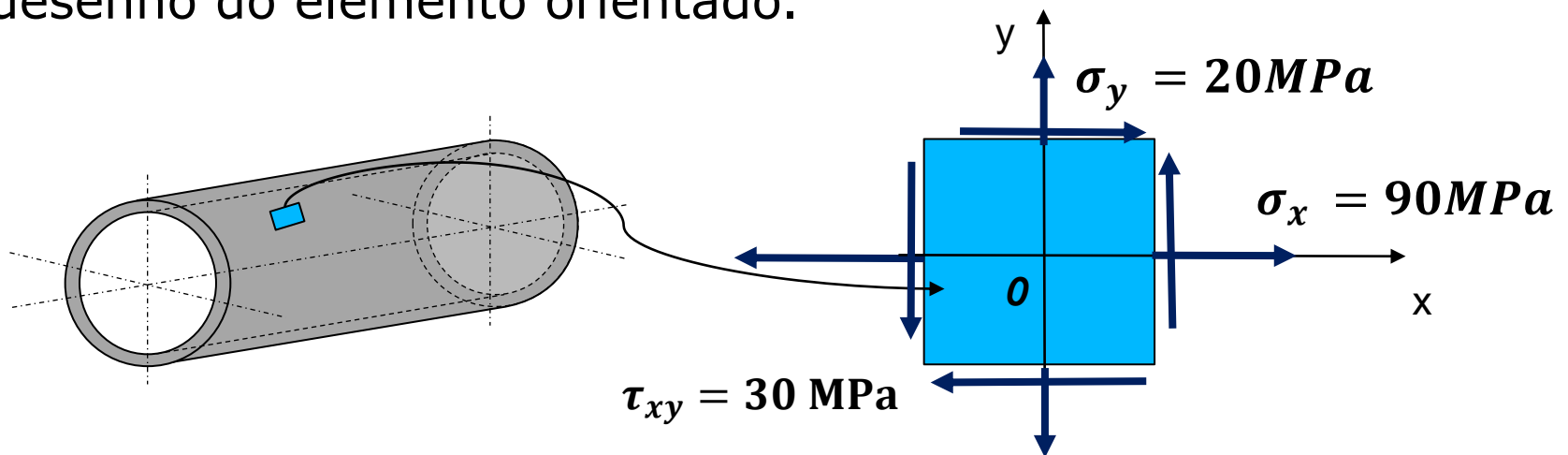
Aula 03  
HOJE!!!



**RELEMBRANDO!**

## Exemplo da aula 2

- ▶ Considere um ponto na superfície de um cilindro pressurizado. O material está sujeito a um estado biaxial de tensões  $\sigma_x = 90\text{MPa}$ ,  $\sigma_y = 20\text{MPa}$ , e  $\tau_{xy} = 30,3\text{MPa}$ , conforme mostrado no elemento abaixo. Construa o círculo de Mohr e determine as tensões atuantes em um elemento inclinado a  $\theta=30^\circ$ . Considere somente o estado plano de tensões, e mostre um desenho do elemento orientado.

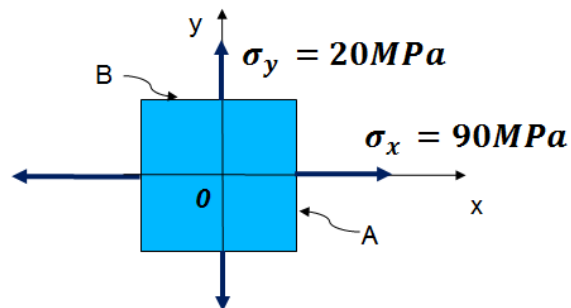
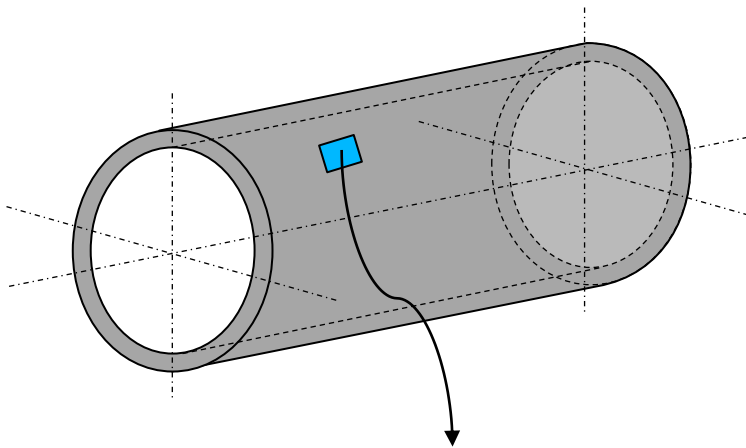




**RELEMBRANDO!**

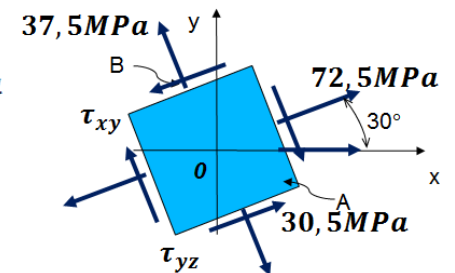
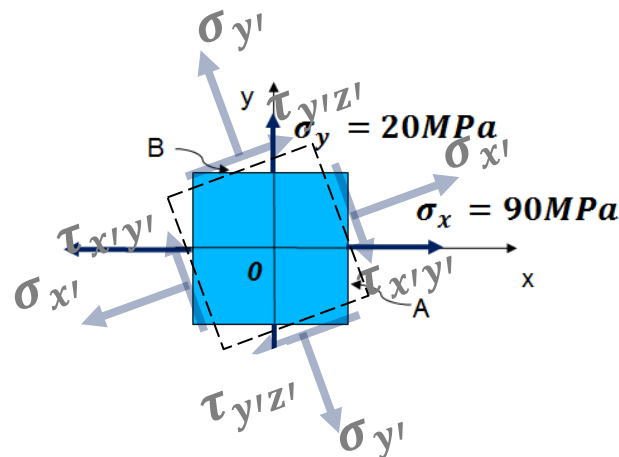
## Exemplo da aula 2

- ▶ Dados:  $\sigma_x = 90\text{MPa}$ ,  $\sigma_y = 20\text{MPa}$ , e  $\tau_{xy} = 30\text{MPa}$
- ▶ Determinar as tensões atuantes em um elemento inclinado a  $\theta = 30^\circ$
- ▶ Considerar: estado plano de tensões.



$$a = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{90 + 20}{2} = \frac{110}{2} = 55\text{MPa}$$

$$b = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = \frac{90 - 20}{2} = \frac{70}{2} = 35\text{MPa}$$





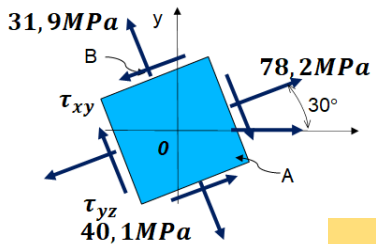
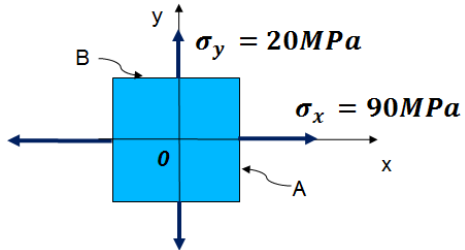
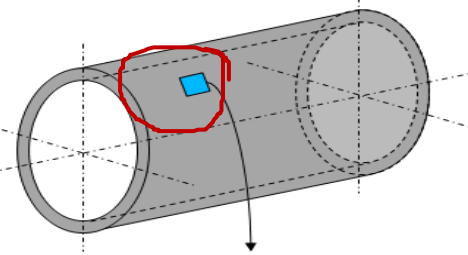
**RELEMBRANDO!**

### Exemplo da Aula 2

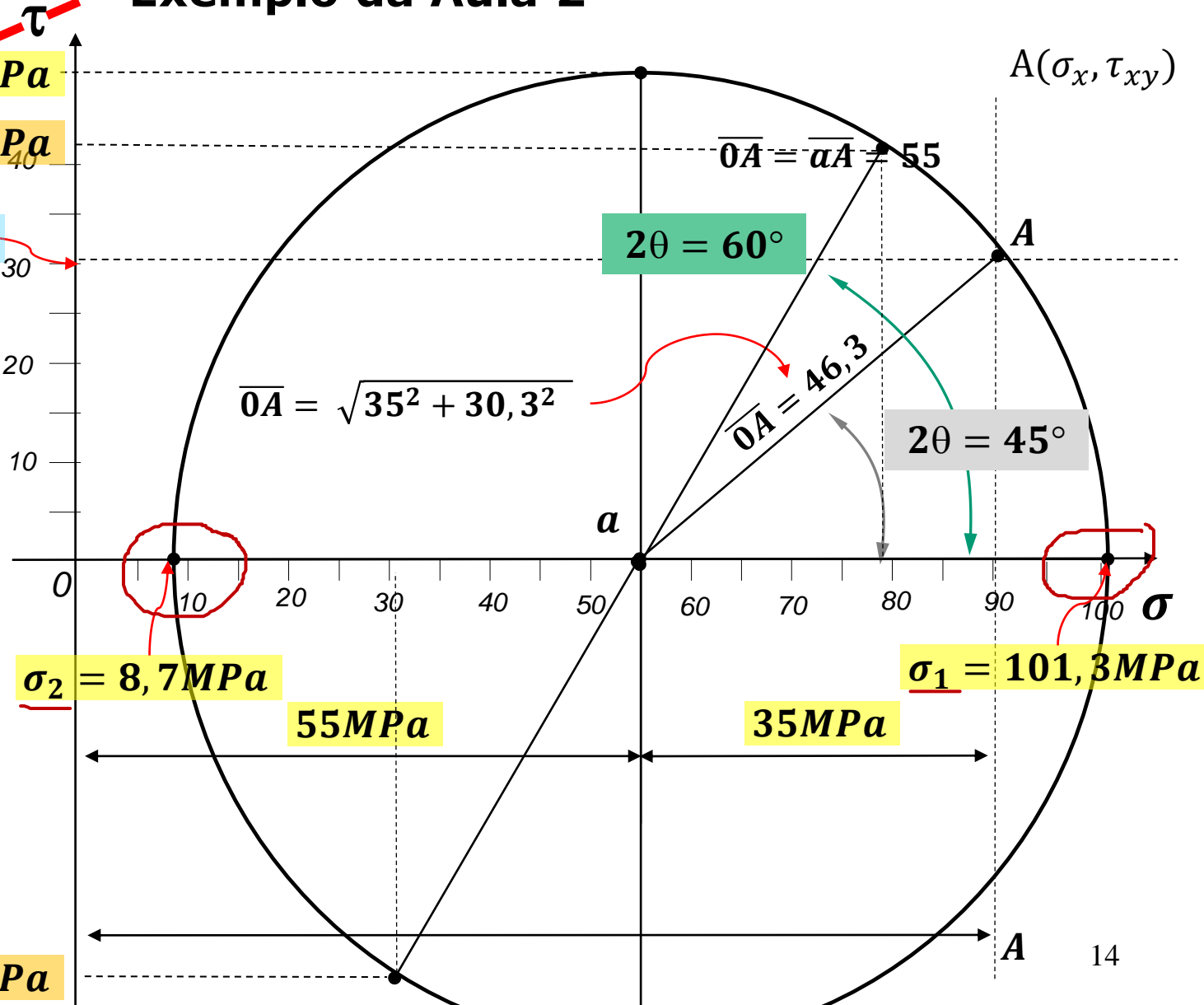
$\tau_{max} = 55 MPa$

$40,1 MPa$

$\tau_{xy} = 30,3 MPa$



$-40,1 MPa$



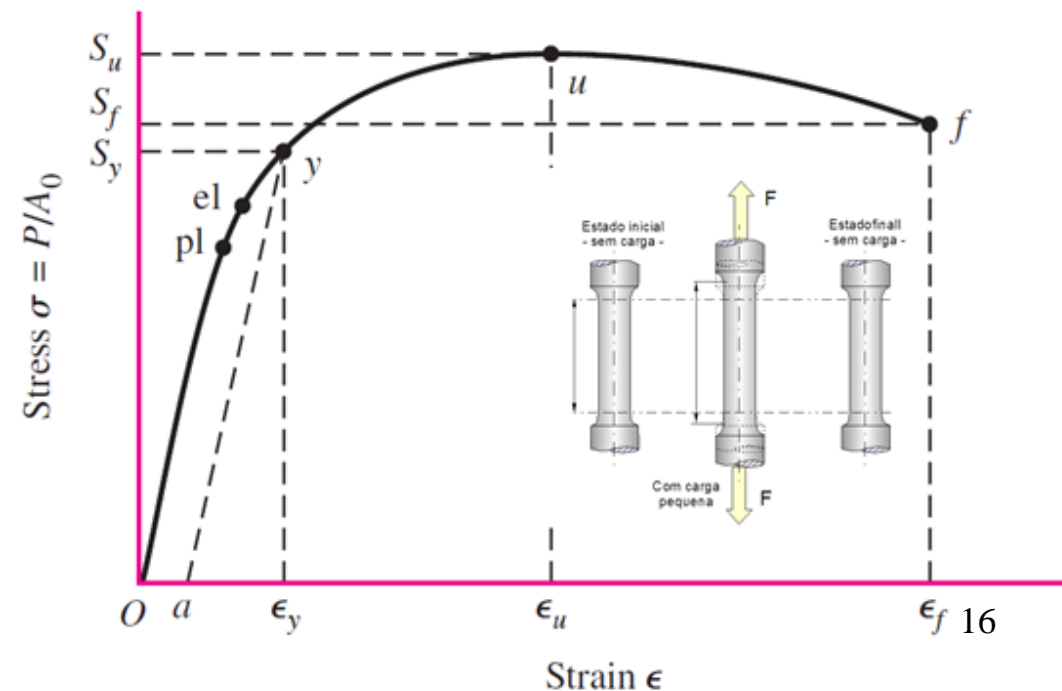


## **Crítérios de escoamento e de fratura**



## Critérios de escoamento e de fratura

- ▶ Quando um elemento de máquina está submetido a carregamentos axiais ou torcionais puros, as tensões calculadas podem ser associadas a um resultado experimental análogo para o mesmo material.
- ▶ Isto permite prever com alto grau de precisão o comportamento com relação ao escoamento e a fratura







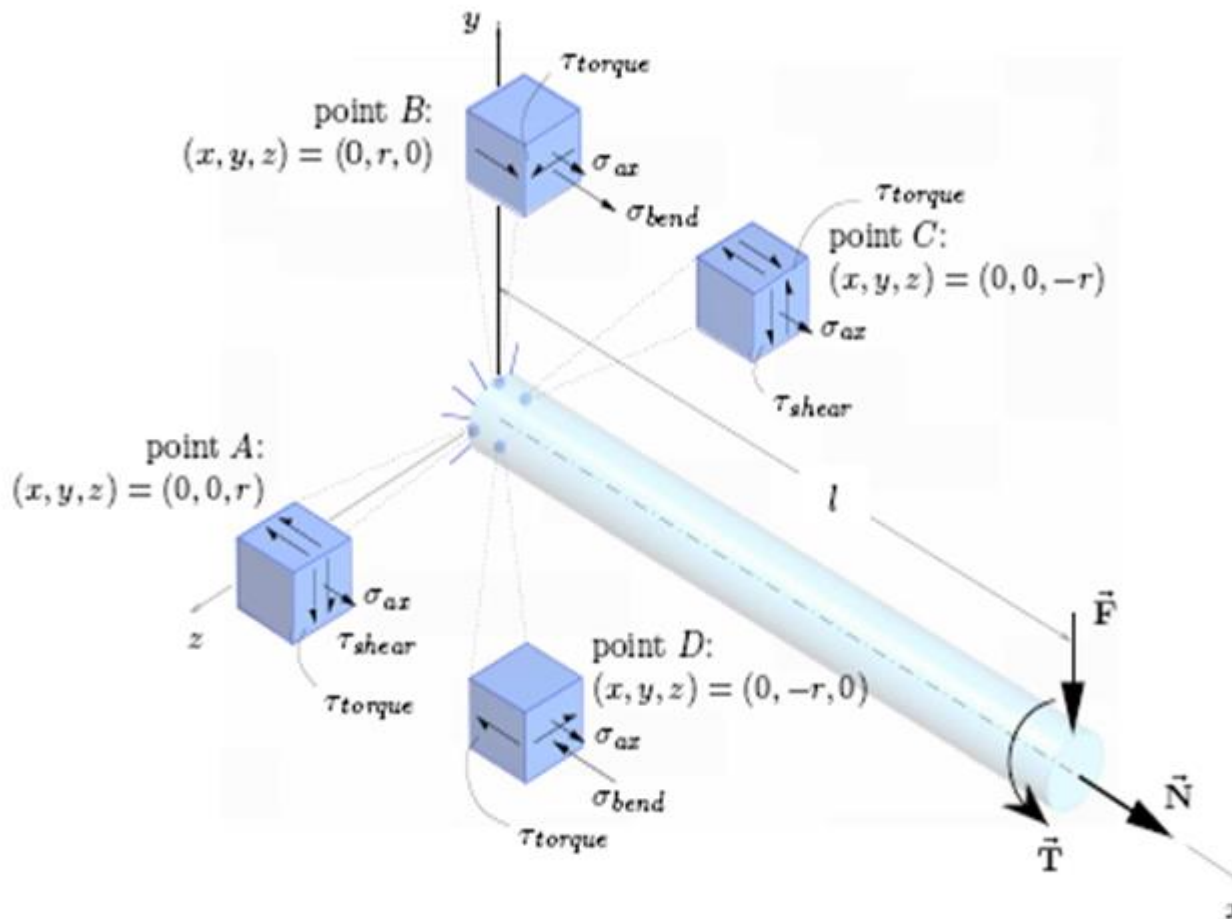
## **Critérios de escoamento e de fratura**

- ▶ Para estados de tensões complexos, comuns aos elementos de máquinas, as aproximações para estado puro de tensão não são mais possíveis
- ▶ Desta forma é necessário estabelecer critérios para comportamento dos materiais com estados de tensões combinados
- ▶ Ainda não existe um critério quantitativo perfeito para determinar o escoamento e a fratura de materiais em estado tensão multiaxiais.



## Tensão? Em que ponto?

### Onde realizar a análise em um elemento?



point A:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_{ax} = \frac{N}{A} \\ \tau_{xy} &= -\tau_{torque} - \tau_{shear} = -\frac{T_r}{J} - \frac{4F}{3A} \\ \sigma_y &= \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0\end{aligned}$$

point C:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_{ax} = \frac{N}{A} \\ \tau_{xy} &= \tau_{torque} - \tau_{shear} = \frac{T_r}{J} - \frac{4F}{3A} \\ \sigma_y &= \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0\end{aligned}$$

point B:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_{ax} + \sigma_{bend} = \frac{N}{A} + \frac{Flr}{I_z} \\ \tau_{xz} &= \tau_{torque} = \frac{T_r}{J} \\ \sigma_y &= \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0\end{aligned}$$

point D:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_{ax} - \sigma_{bend} = \frac{N}{A} - \frac{Flr}{I_z} \\ \tau_{xz} &= -\tau_{torque} = -\frac{T_r}{J} \\ \sigma_y &= \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0\end{aligned}$$

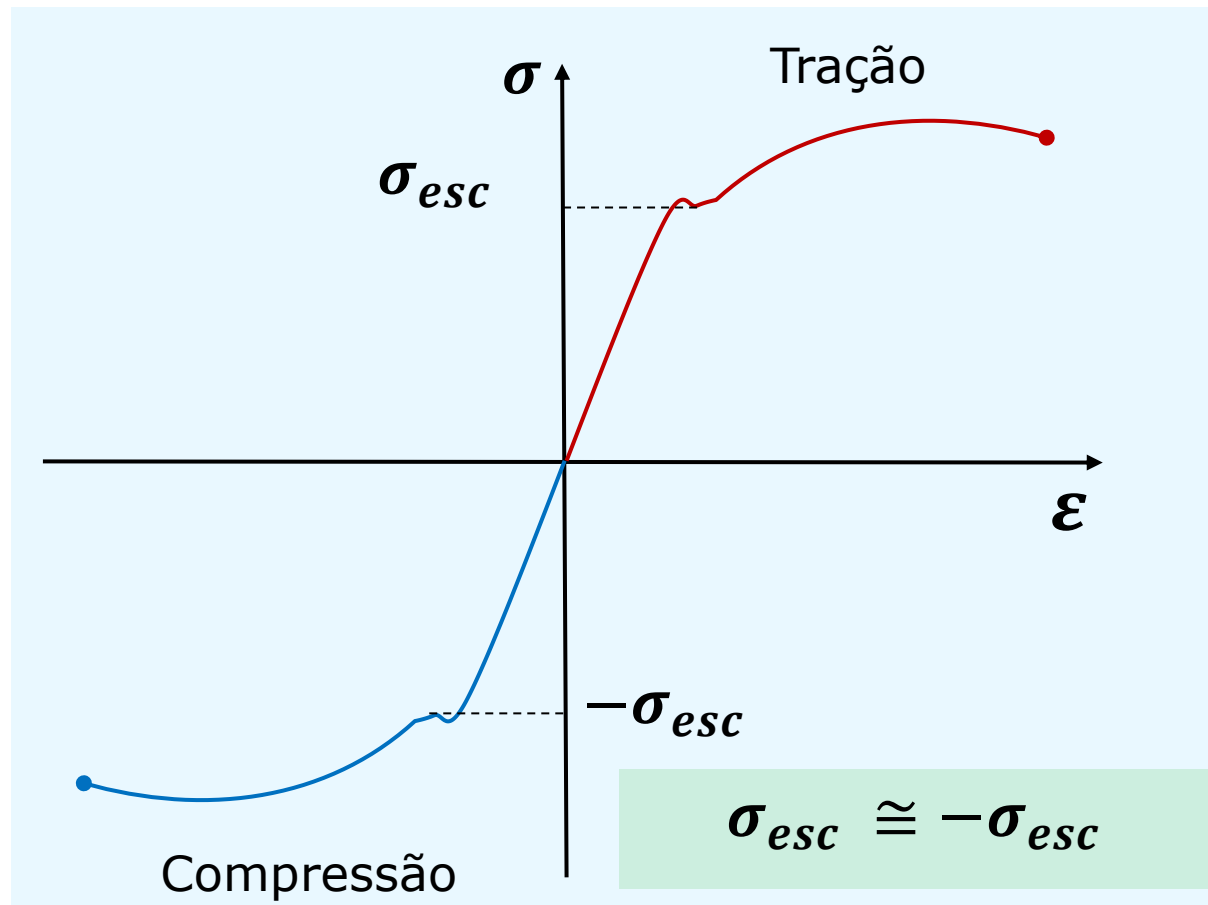


## **Crítérios de Falha para Materiais Dúcteis**



## Critérios de escoamento e de fratura

### ► Para materiais dúcteis – Considerações gerais



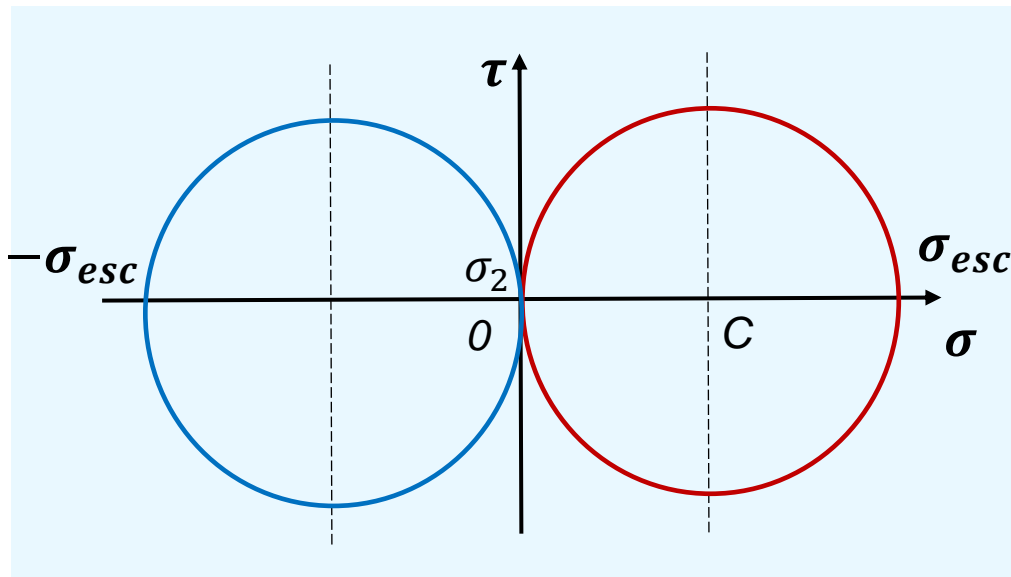
Sobreposição dos resultados dos ensaios de tração e compressão



## Critérios de escoamento e de fratura

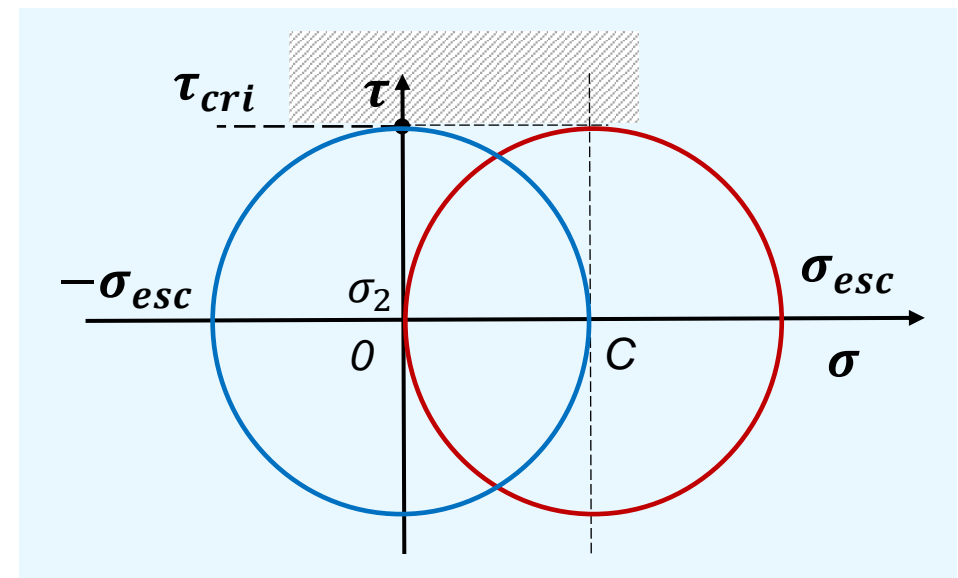
### ► Para materiais dúcteis – Considerações gerais

#### Tensões Normais Críticas



Sobreposição dos círculos de Mohr para tração e compressão

#### Tensões Cisalhantes Críticas



Sobreposição dos círculos de Mohr para ensaios de tração e torção

$$0,5 < \frac{\tau_{cri}}{\sigma_{esc}} < 0,6$$



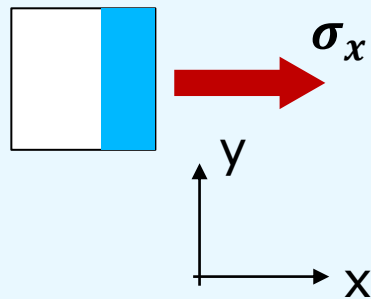
## Critérios de escoamento e de fratura

### ► Para materiais dúcteis – Considerações gerais

#### Modos de falha

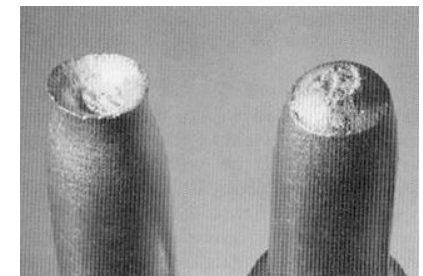
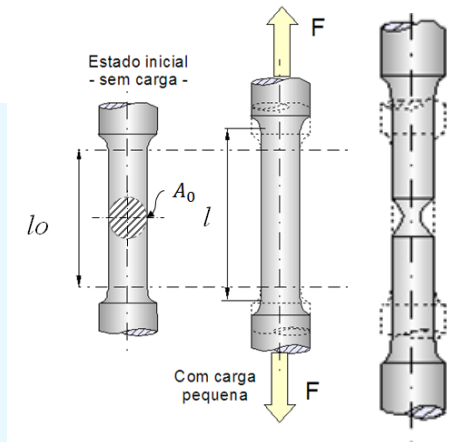
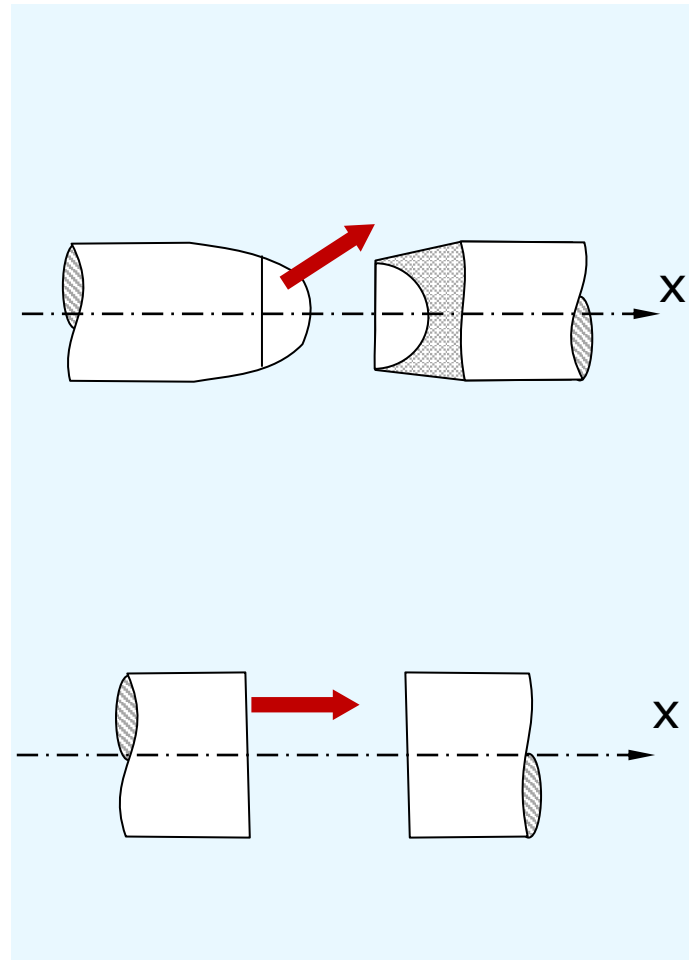
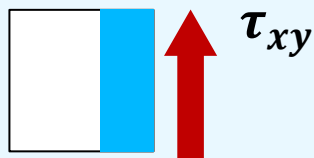
##### Tração

##### ► Tensões Normais



##### Torção

##### ► Tensões Cisalhantes



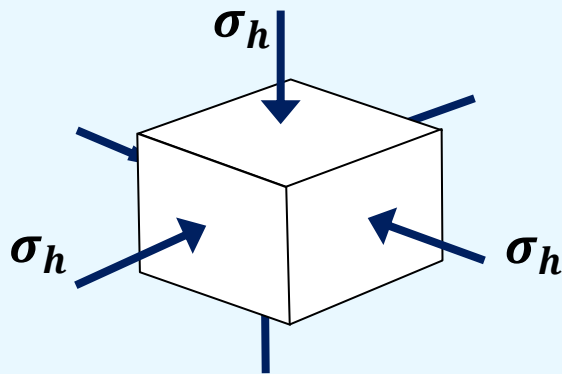


## Critérios de escoamento e de fratura

### ► Para materiais dúcteis – Considerações gerais

#### Modos de falha

#### Hidroestática



$$\sigma_{esc} \gg \sigma_h$$

#### Teorias de falha

- Máxima tensão cisalhante - *Maximum shear stress*
- Máxima energia de distorção - *Maximum distortion energy*
- Teoria Coulomb-Mohr para materiais dúcteis



## Teoria da Máxima Tensão Cisalhante

- ▶ Proposta por Coulumb em 1773
- ▶ 1886, Tresca apresenta o trabalho sobre escoamento de metais sob grande pressões
- ▶ A Teoria da Máxima Tensão Cisalhante é usualmente chamada de critério de falha de Tresca, ou simplesmente de critério de Tresca





## Teoria da Máxima Tensão Cisalhante

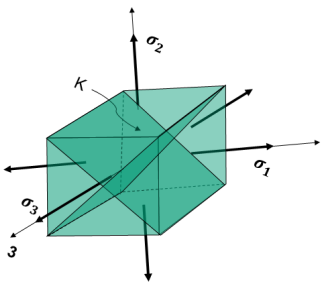
- ▶ Um material dúctil ocorre deslizamento durante escoamento dos planos criticamente orientados.
- ▶ Isto sugere que a tensão cisalhante é dominante
- ▶ O escoamento depende apenas da máxima tensão de cisalhamento alcançada no interior do elemento.
- ▶ Sempre que um valor crítico  $\tau_{cri}$  é atingido tem-se início o escoamento.



## Teoria da Máxima Tensão Cisalhante

- ▶ Assim da equação das tensões cisalhantes máximas (A-08) temos, para um estado de tensão biaxial

$$\tau_{max} = \tau_{cri} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



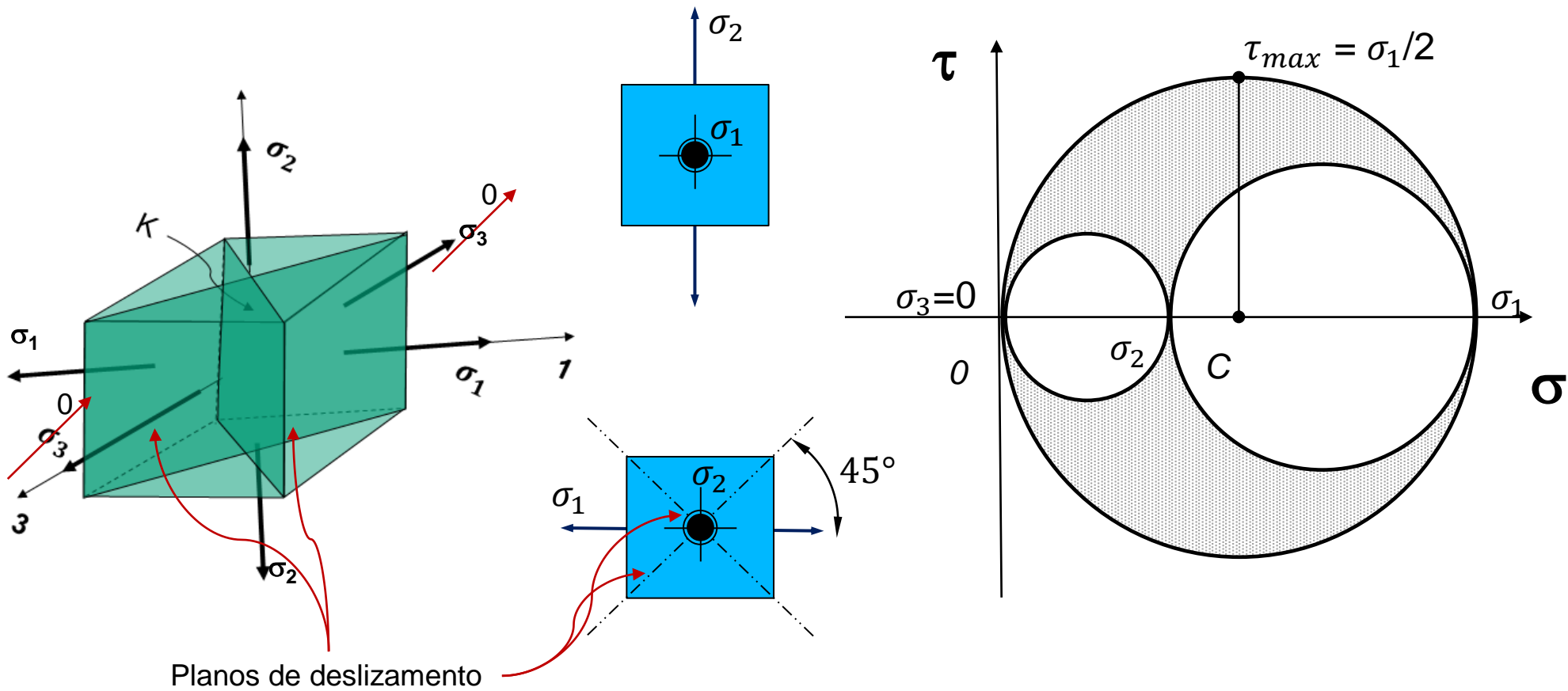
$$\tau_{cri} = \left| \pm \frac{\sigma_1}{2} \right| = \frac{\sigma_{esc}}{2}$$

- ▶ No estado de tensão biaxial devem ser considerados três casos:
  - ▶  $\sigma_A \geq \sigma_B \geq 0$ ,  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  tem os mesmos sinais (+),  $\sigma_3=0$
  - ▶  $\sigma_A \geq 0 \geq \sigma_B$ ,  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  tem sinais opostos,  $\sigma_3=0$
  - ▶  $0 \geq \sigma_A \geq \sigma_B$ ,  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  tem os mesmos sinal (-),  $\sigma_3=0$



## Teoria da Máxima Tensão Cisalhante

- ▶ Caso onde  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  tem os mesmos sinais

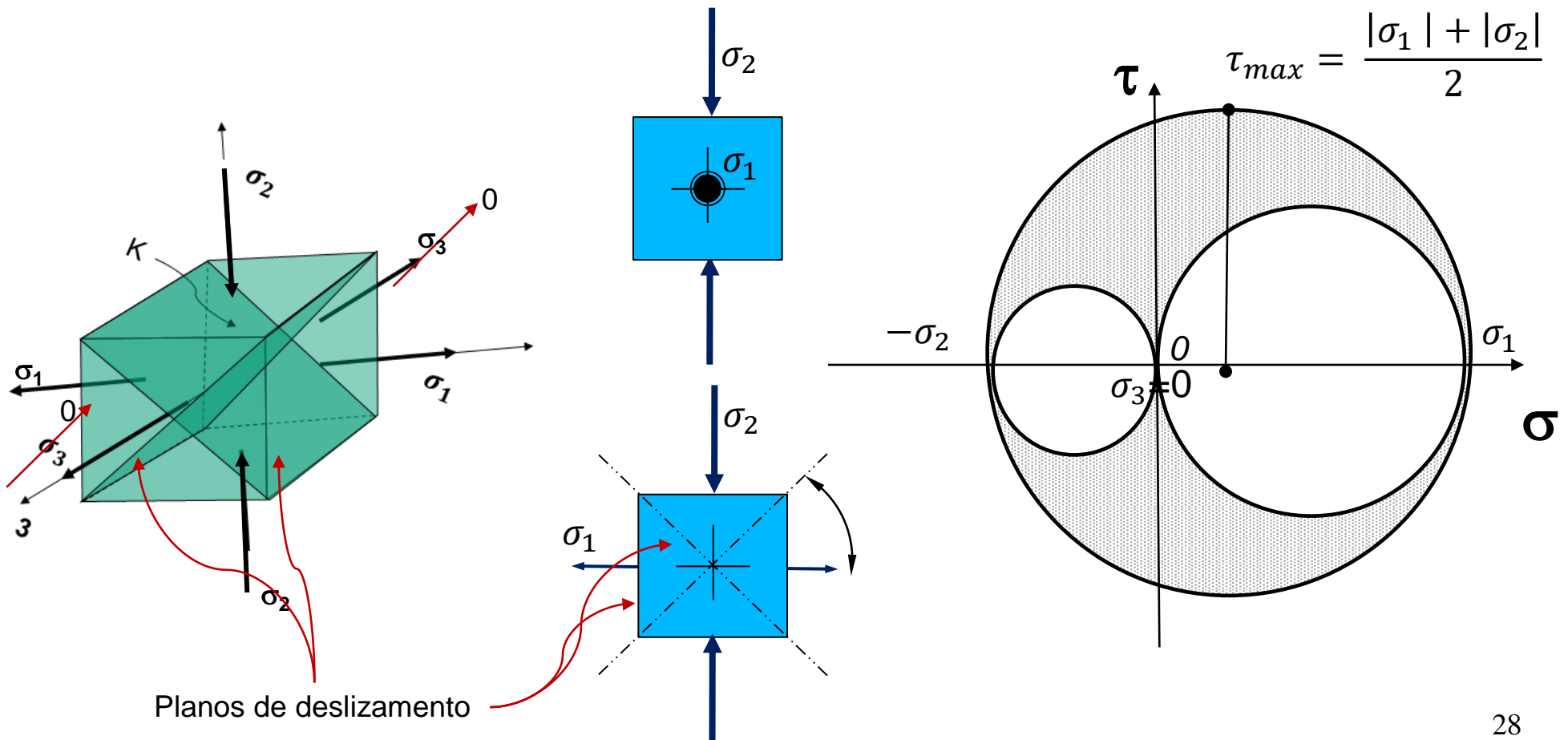


➤ **Considerando materiais isotrópicos**



## Teoria da Máxima Tensão Cisalhante

- ▶ Caso onde  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  tem sinais opostos

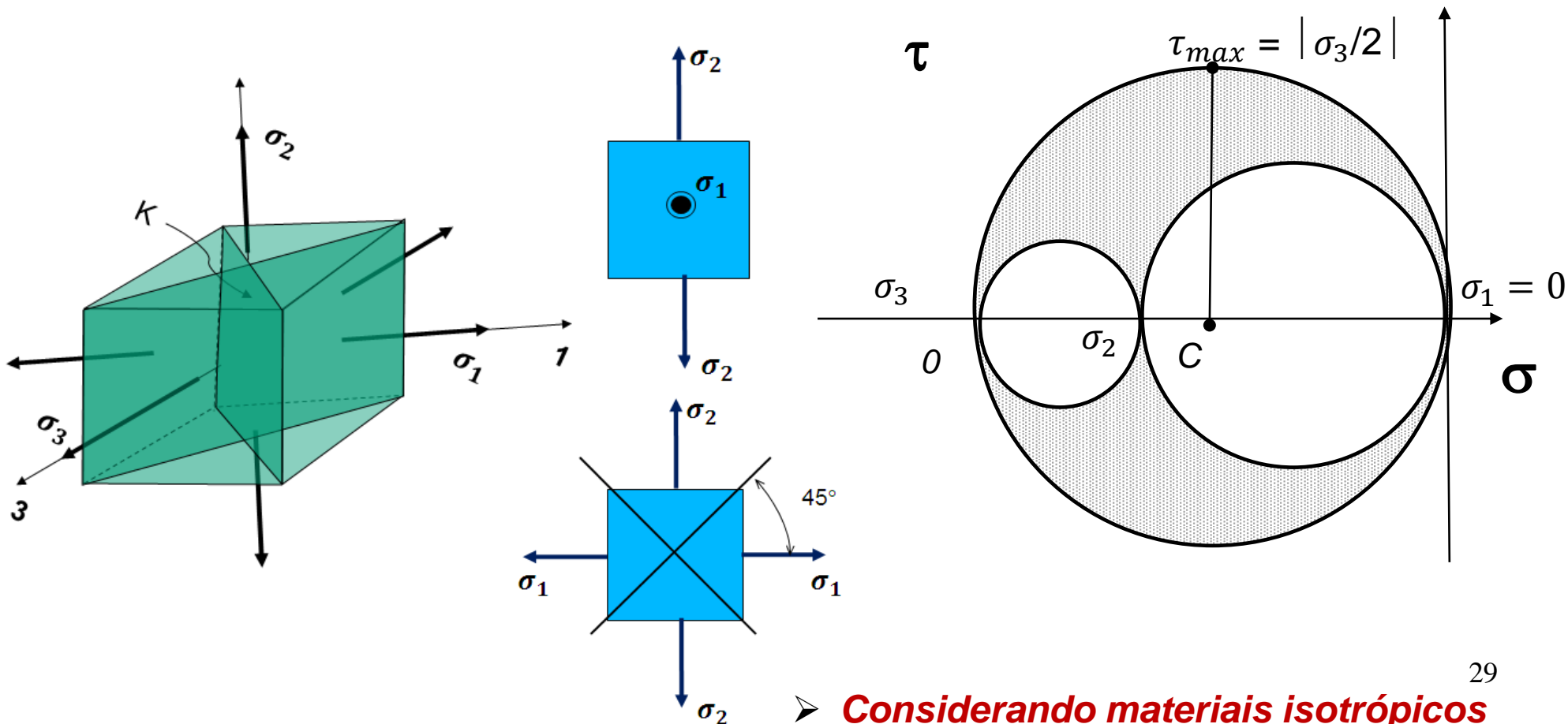


▶ **Considerando materiais isotrópicos**



## Teoria da Máxima Tensão Cisalhante

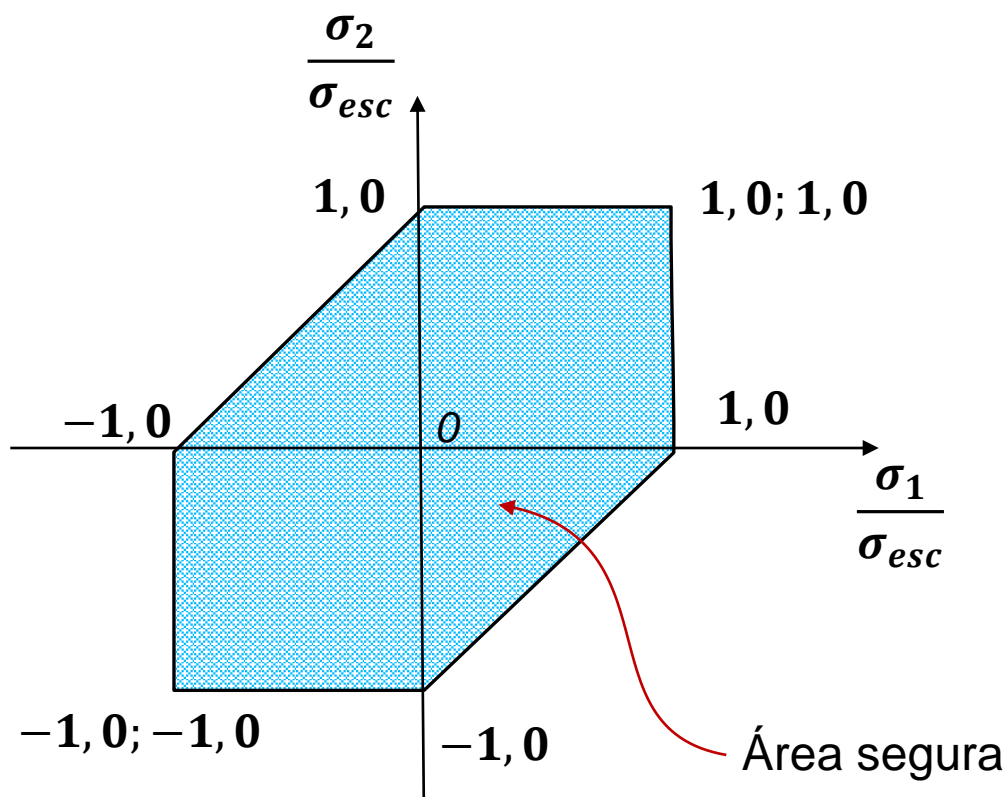
- ▶ Caso onde  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  tem os mesmos sinais.  $0 \geq \sigma_A \geq \sigma_B$ ,  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  tem os mesmos sinal (-),  $\sigma_3 = 0$





## Teoria da Máxima Tensão Cisalhante

- ▶ Para o caso de escoamento iminente



$$\left| \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right| \leq \frac{\sigma_{esc}}{2}$$

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_{esc}} - \frac{\sigma_2}{\sigma_{esc}} = \pm 1$$

escoamento iminente



## Teoria da Máxima Tensão Cisalhante

- ▶ Observem que de acordo com a teoria de Tresca, se forem adicionadas tensões de compressão ou tração hidrostáticas, de tal forma que  $\sigma'1 = \sigma'2 = \sigma'3$ , nenhuma variação é prevista na resposta do material



## Teoria da Máxima Energia de Distorção

- ▶ A Teoria da Máxima Energia de Distorção foi proposta inicialmente por Beltrami em 1885 (primeira tentativa)
- ▶ Huber a apresentou em sua forma atual em 1904.
- ▶ Foi aperfeiçoada e aplicada por von Mises (1913) e Hencky (1925)
- ▶ Usualmente é conhecido como critério de falha de von Mises
- ▶ Usualmente aplicada a materiais plásticos

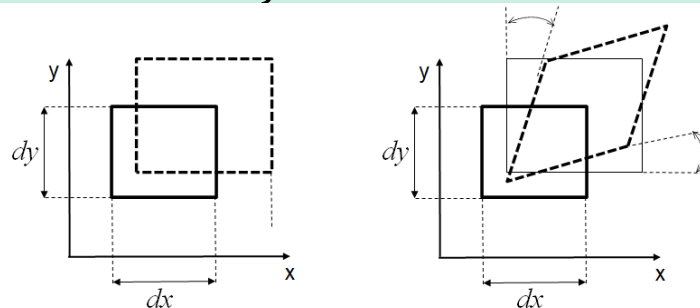




## Teoria da Máxima Energia de Distorção

- ▶ A Teoria da Máxima Energia de Distorção também é outro critério de escoamento amplamente utilizada na previsão de falha de materiais dúcteis.
- ▶ Neste método a energia elástica total é dividida em duas partes:
  - Uma associada as mudanças volumétricas do material
  - E outra causando distorções de cisalhamento

$$U_{total} = U_{dilatação} + U_{distorção}$$





## Teoria da Máxima Energia de Distorção

- ▶ Nesta iguala-se a energia de distorção de cisalhamento no ponto de escoamento à tração simples, aquela sob tensão combinada, estabelecendo-se um critério de escoamento para tensão combinada

$$U_{dilatação} = \frac{3(1-2\nu)}{2E} p^2 = \frac{(1-2\nu)}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

$$U_{distorção} = \frac{1}{12G} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

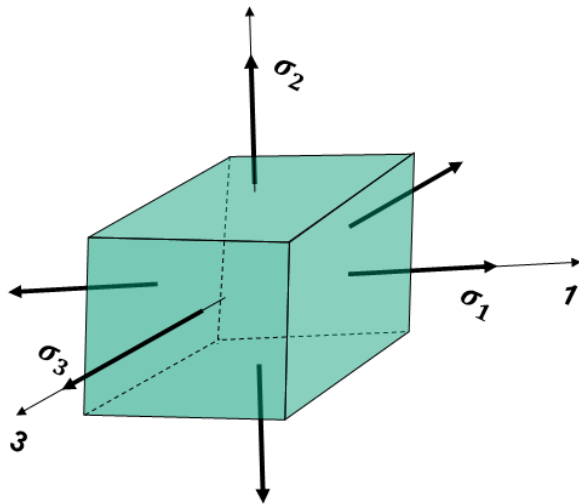
$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$U_{total} = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1)$$



## Teoria da Máxima Energia de Distorção

- Considerando o estado geral de tensões temos:



$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_1 - \bar{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \bar{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \bar{\sigma} \end{pmatrix}$$

$$U_{total} = U_d + U_h$$

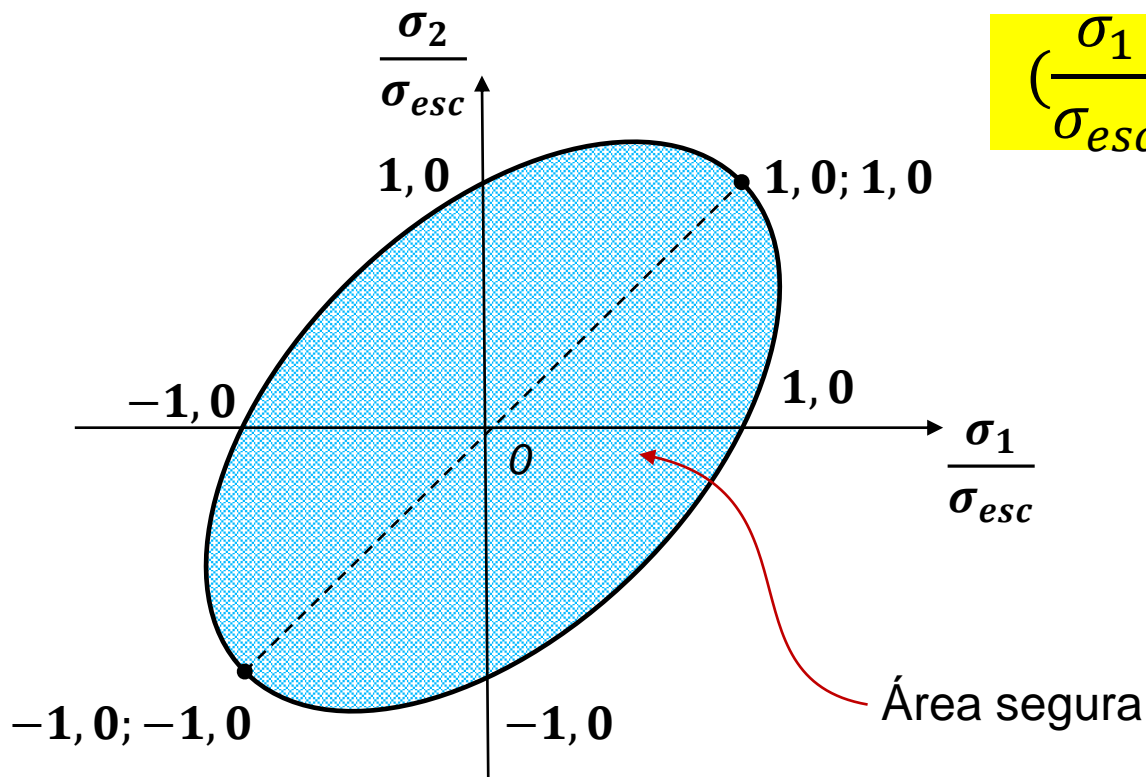
$$U_{total} = \frac{1}{2E}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1)$$

Considerando material plástico ideal =>  $(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_{esc}^2$



## Teoria da Máxima Energia de Distorção

- ▶ Critério de escoamento baseado na máxima energia de distorção
- ▶ Para o estado plano de tensão  $\sigma_3 = 0$ , temos:



$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{esc}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{esc}} - \frac{\sigma_2}{\sigma_{esc}}\right) + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_{esc}}\right)^2 = 1$$

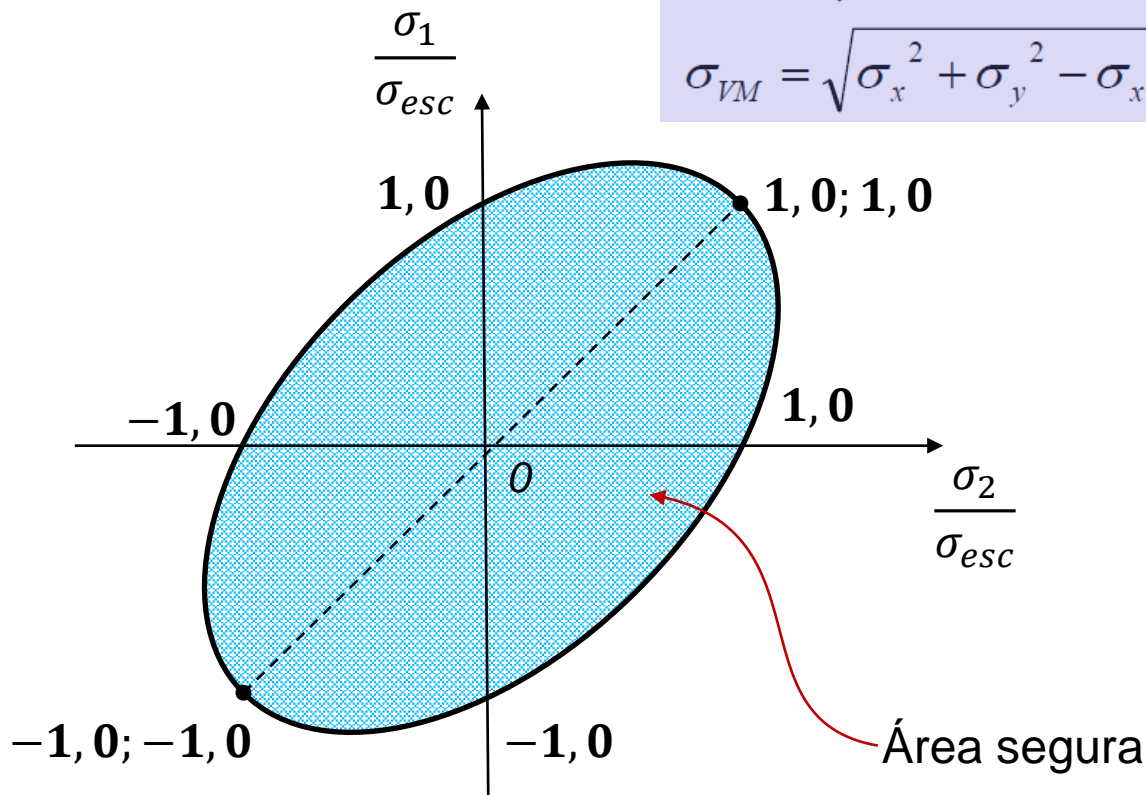
Equação da elipse



## Teoria da Máxima Energia de Distorção

- ▶ Critério de escoamento baseado na máxima energia de distorção

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}{2}}$$
$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \quad \text{2D}$$



$$\sigma_{VM} \geq S_y$$

$$n = \frac{S_y}{\sigma_{VM}}$$

Onde **n** = fator de segurança



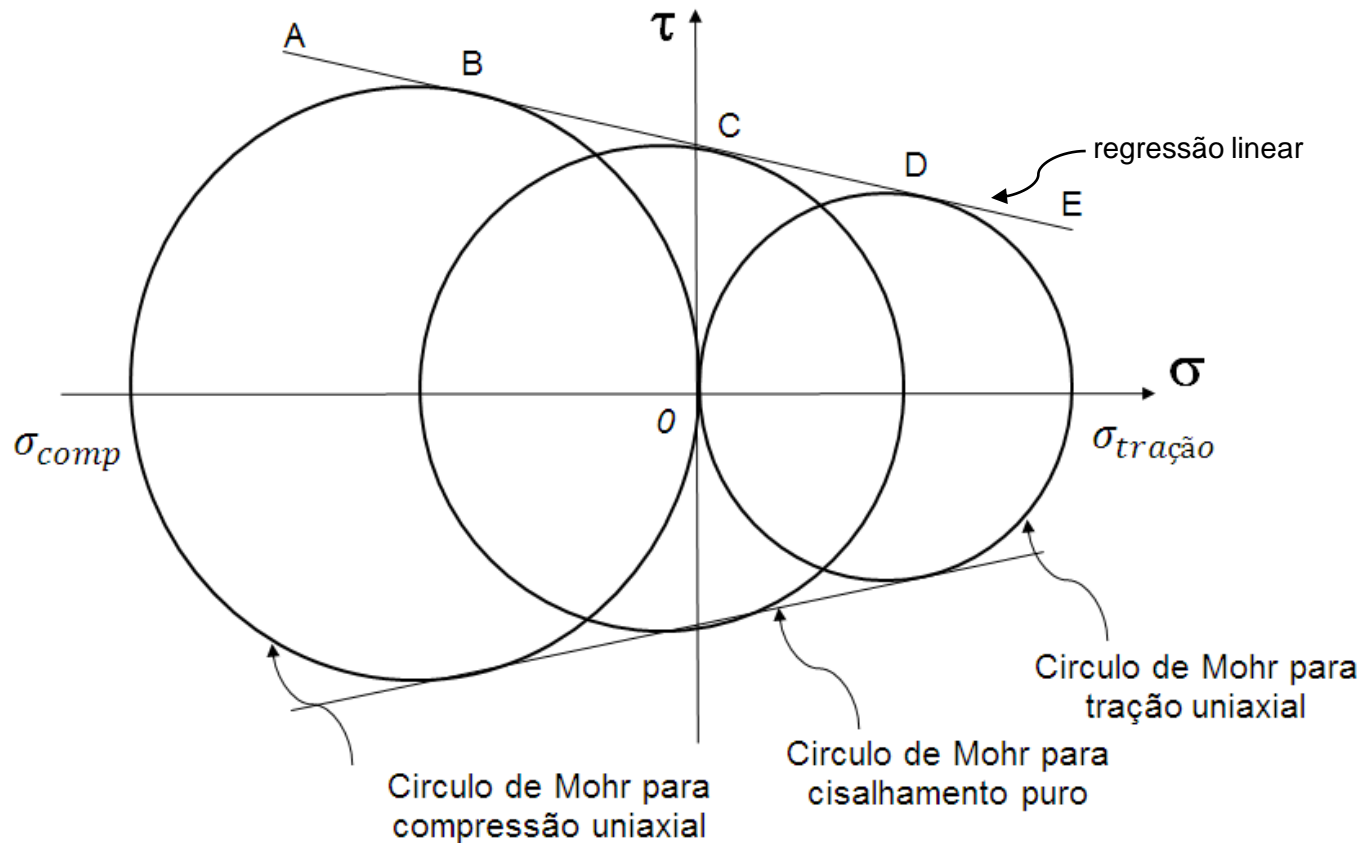
## Teoria da Máxima Energia de Distorção

- ▶ Critério de von Mises não prevê mudanças na resposta do material quando se adicionam as tensões de tração e compressão hidrostática.



## Teoria de Coulomb-Mohr para materiais dúcteis

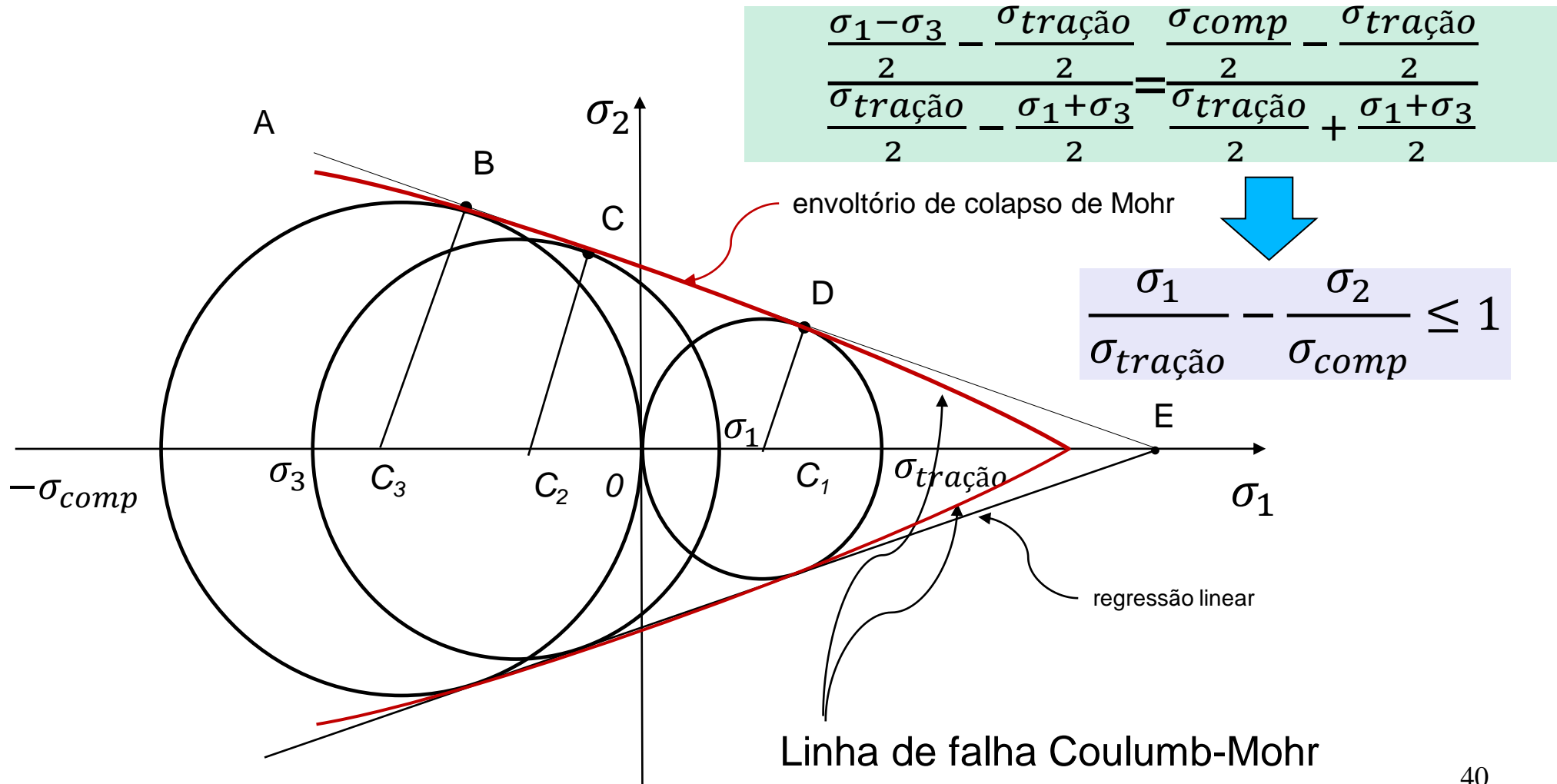
- ▶ Ou teoria do atrito interno
- ▶  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$





## Teoria de Coulomb-Mohr para materiais dúcteis

- ▶ Ou teoria do atrito interno

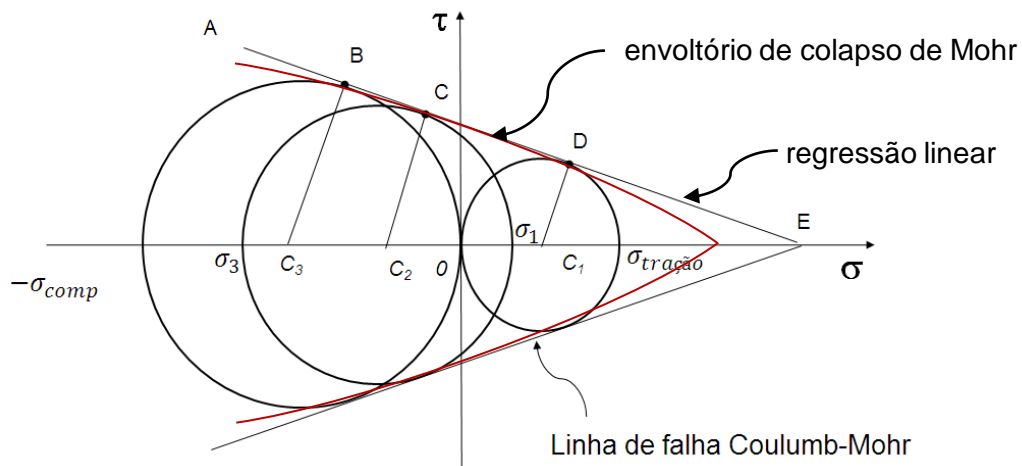




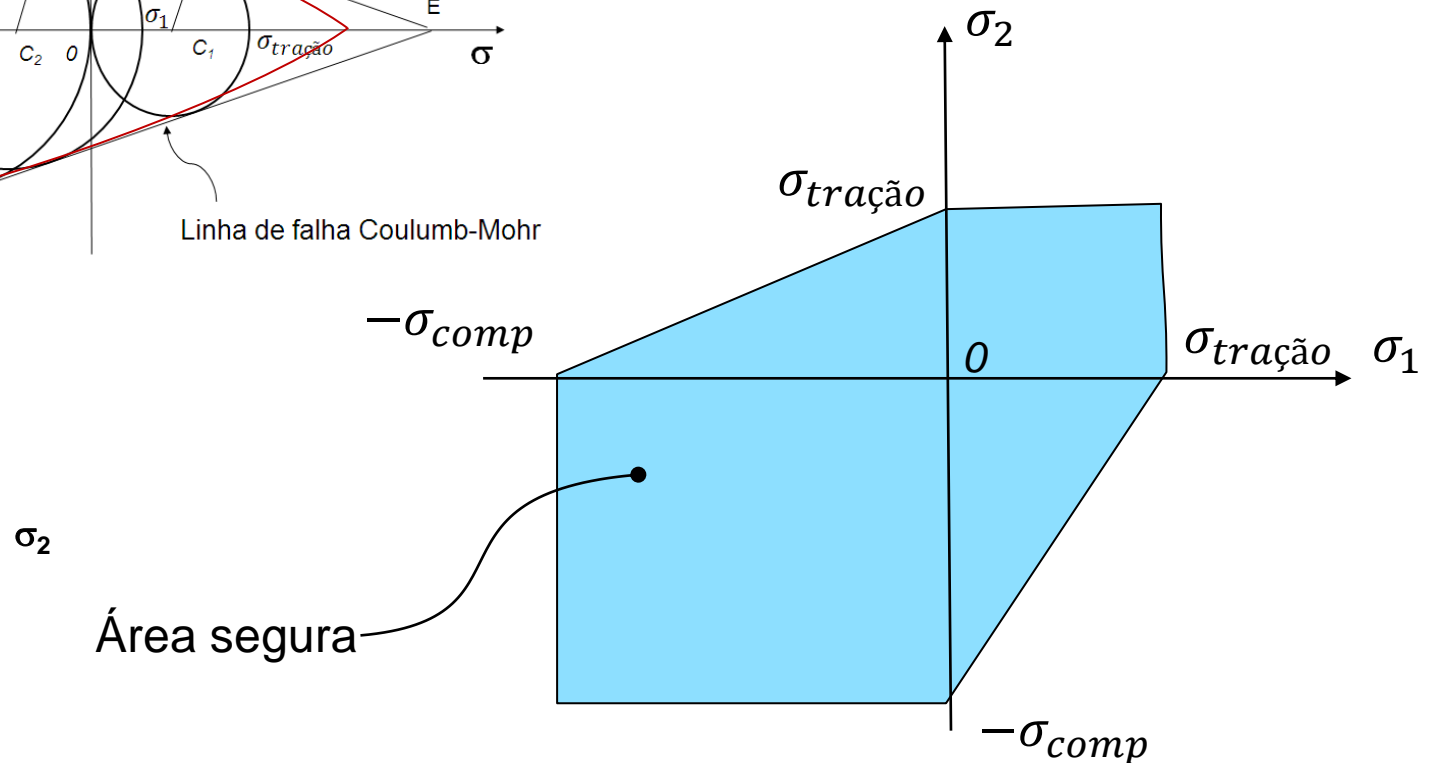


## Teoria de Coulomb-Mohr para materiais dúcteis

- ▶ Ou teoria do atrito interno



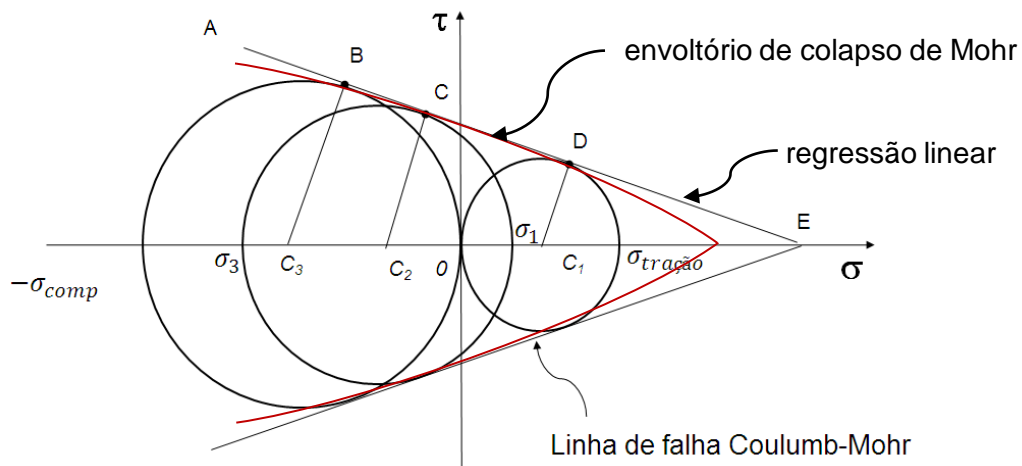
$$\frac{\sigma_1}{\sigma_{tração}} - \frac{\sigma_2}{\sigma_{comp}} \leq 1$$



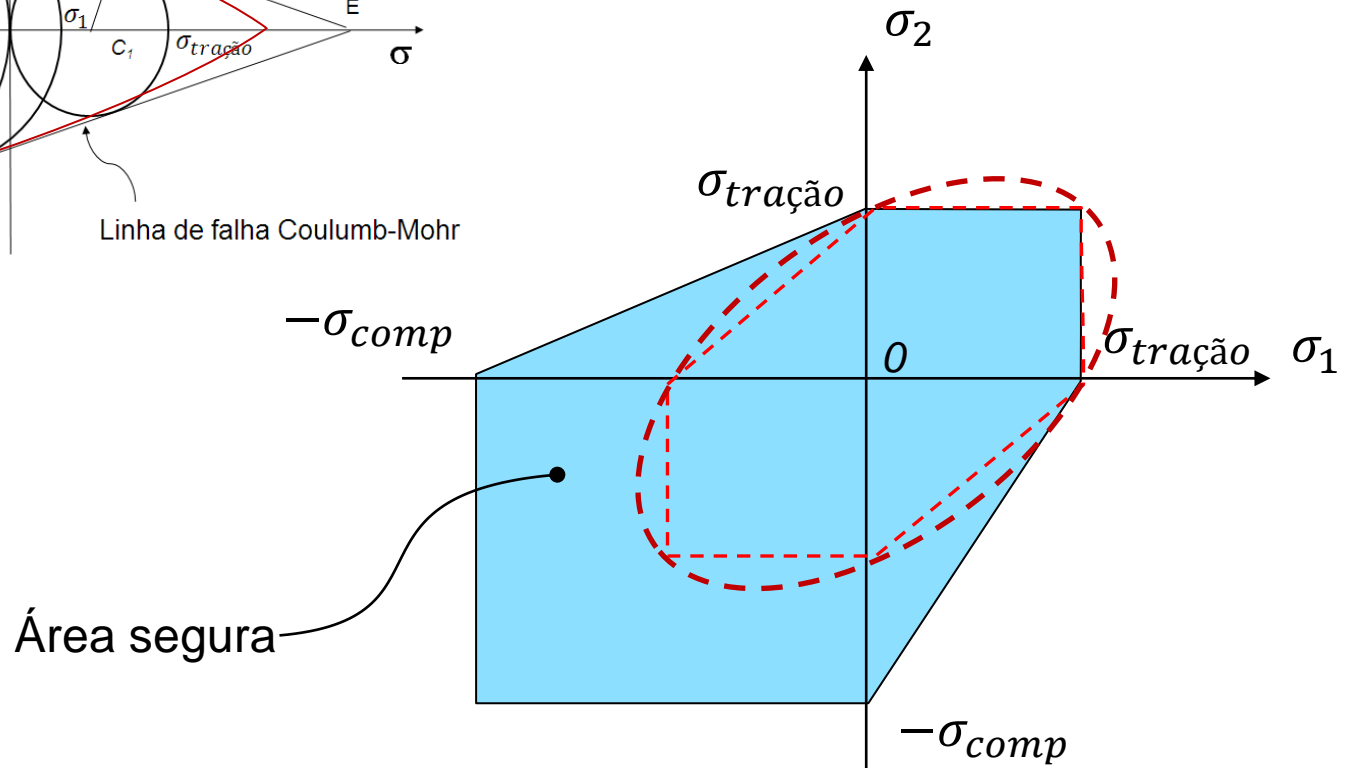


## Teoria de Coulomb-Mohr para materiais dúcteis

- ▶ Ou teoria do atrito interno



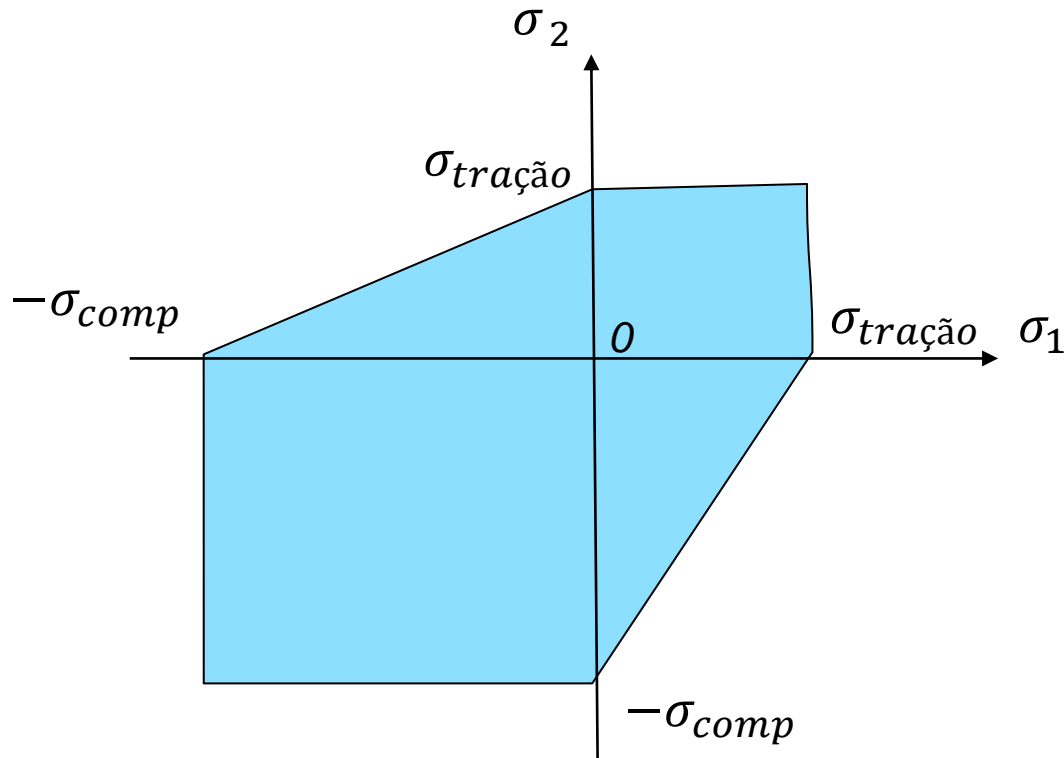
$$\frac{\sigma_1}{\sigma_{tração}} - \frac{\sigma_2}{\sigma_{comp}} \leq 1$$





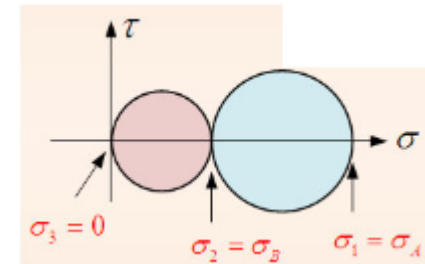
## Teoria de Coulomb-Mohr para materiais dúcteis

- ▶ Ou teoria do atrito interno

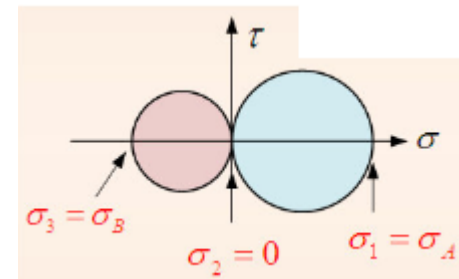


$$\frac{\sigma_1}{\sigma_{tração}} - \frac{\sigma_2}{\sigma_{comp}} \leq 1$$

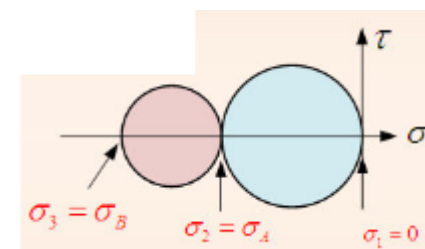
- Caso 1 :  $\sigma_A \geq \sigma_R \geq 0$



- Caso 2 :  $\sigma_A \geq 0 \geq \sigma_B$



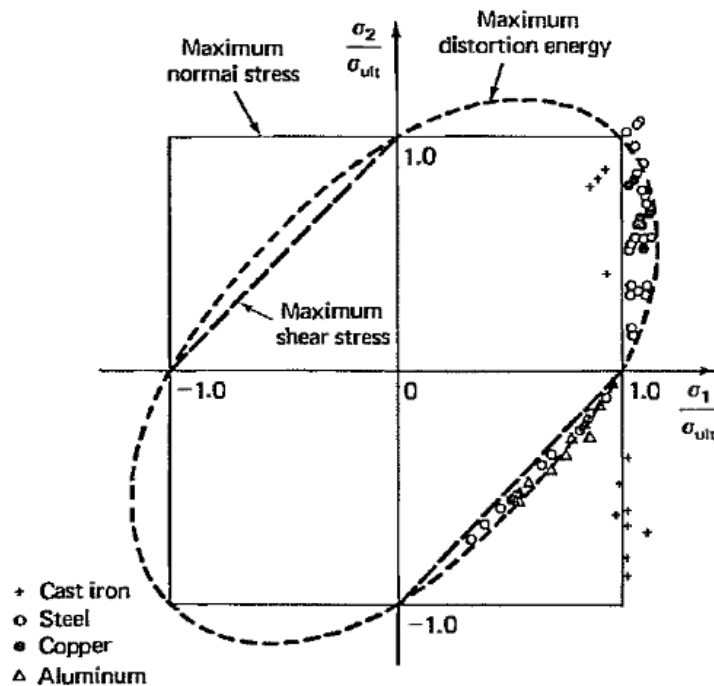
- Caso 3 :  $0 \geq \sigma_A \geq \sigma_B$



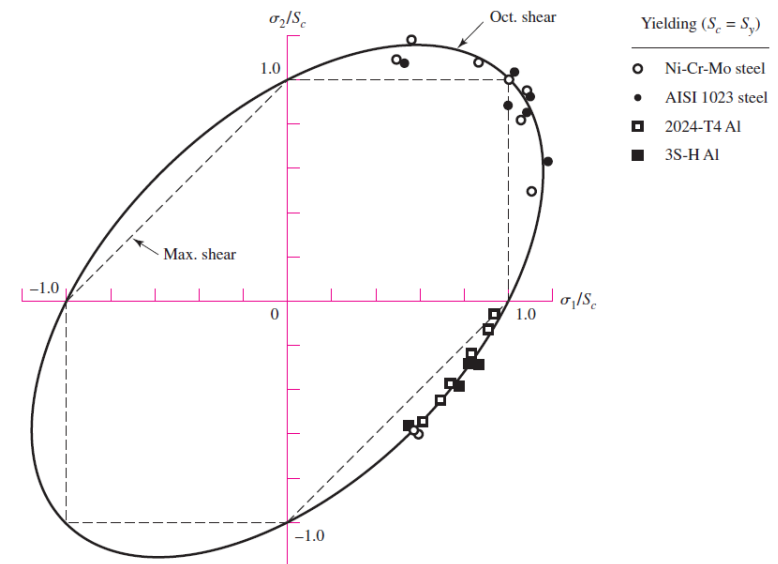


## Validade para materiais dúcteis

Dados experimentais sobrepostos as teorias de Tresca e von Mises



Popov, E. P. (Egor Paul)  
Engineering mechanics of solids / Egor P. Popov.  
p. cm. — (Prentice-Hall international series in civil engineering and engineering mechanics)

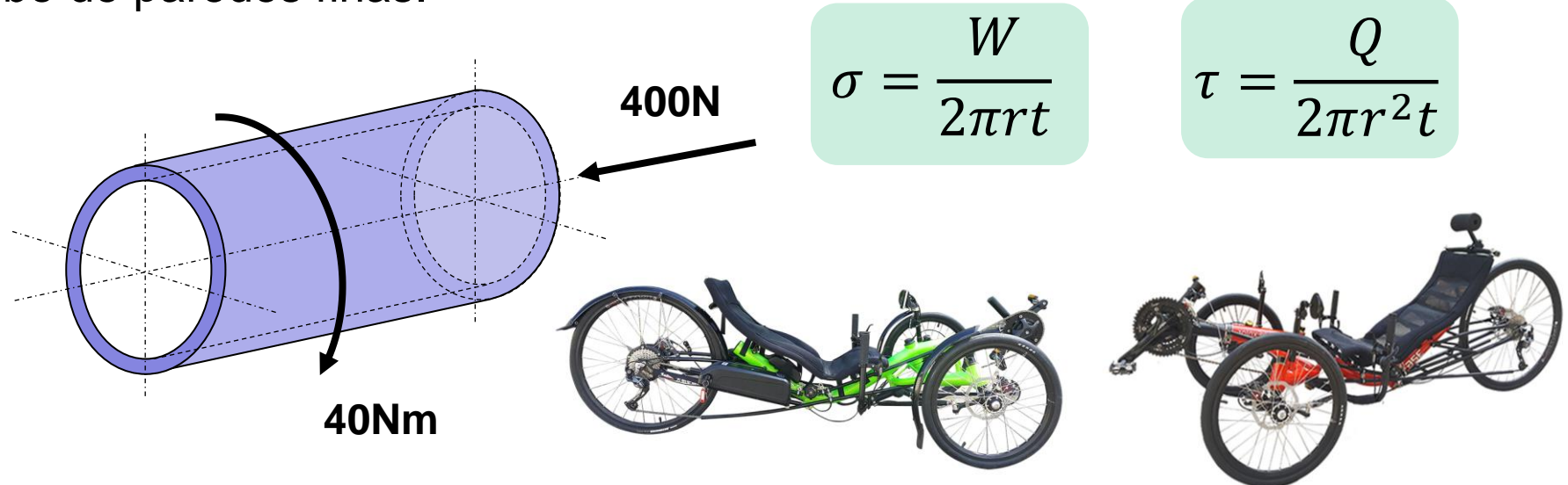


(Shigley, E. Mechanical Engineering Design, 8th Edition, MacGrawHill, 2008)



## Exemplo de aplicação

Um eixo para um veículo de propulsão humana é proposto para ser fabricado em tubo de alumínio com tensão de escoamento de 400MPa, e 20mm de diâmetro. Em operação o eixo estará sujeito a um torque de 40Nm e uma força compressiva de 400N. Usando o critério de Tresca determine a espessura mínima de parede necessária ao eixo. Assumir tubo de paredes finas.

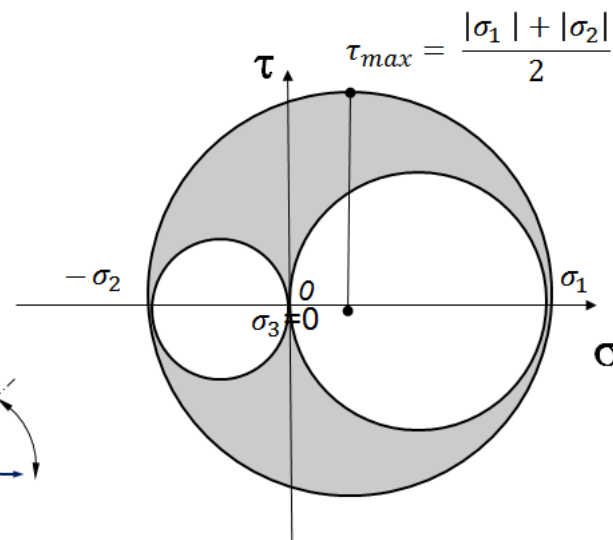
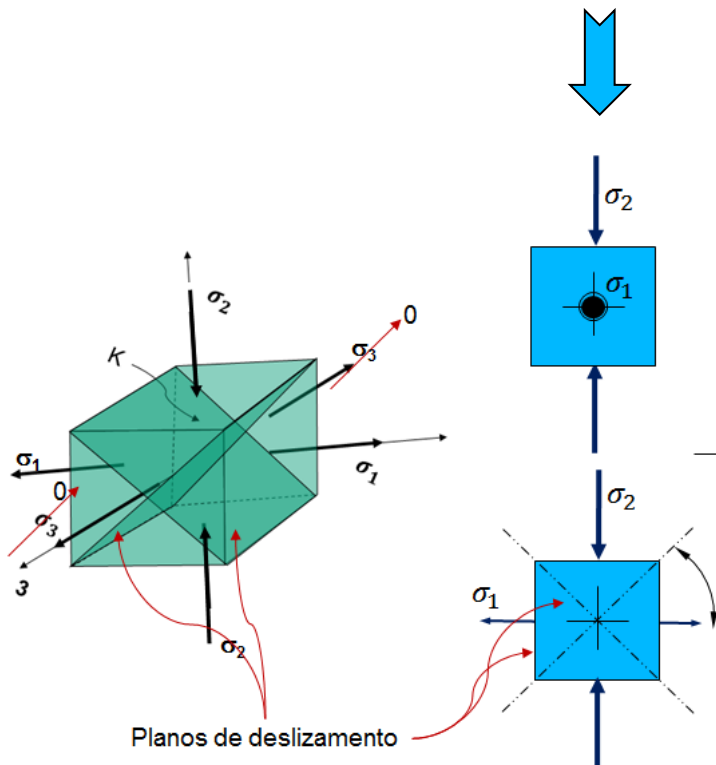
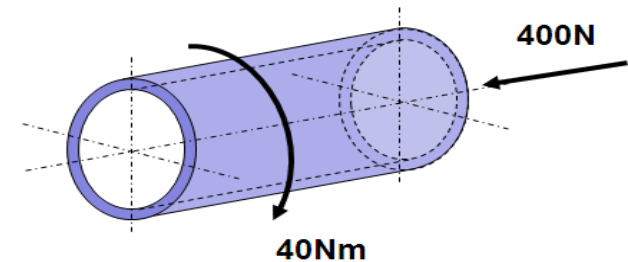




## Exemplo de aplicação

Dados:  $\sigma_{esc} = 400\text{MPa}$ ;  $W = 400\text{N}$ ;  $Q = 40\text{Nm}$ ;  $D = 20\text{ mm}$  ( $r = 10\text{ mm}$ ),  $t = \text{espessura}$

Assumindo tubo de paredes finas  $\rightarrow \sigma_3 = 0$ .





## Exemplo de aplicação

Dados:  $\sigma_{esc} = 400\text{MPa}$ ;  $W=400\text{N}$ ;  $Q= 40\text{Nm}$ ;  $D= 20\text{ mm}$  ( $r=10\text{ mm}$ ),  $t = \text{espessura}$

$$\sigma = \frac{W}{2\pi r t}$$

$$\tau = \frac{Q}{2\pi r^2 t} \rightarrow \tau = \frac{Q}{2\pi r t r}$$



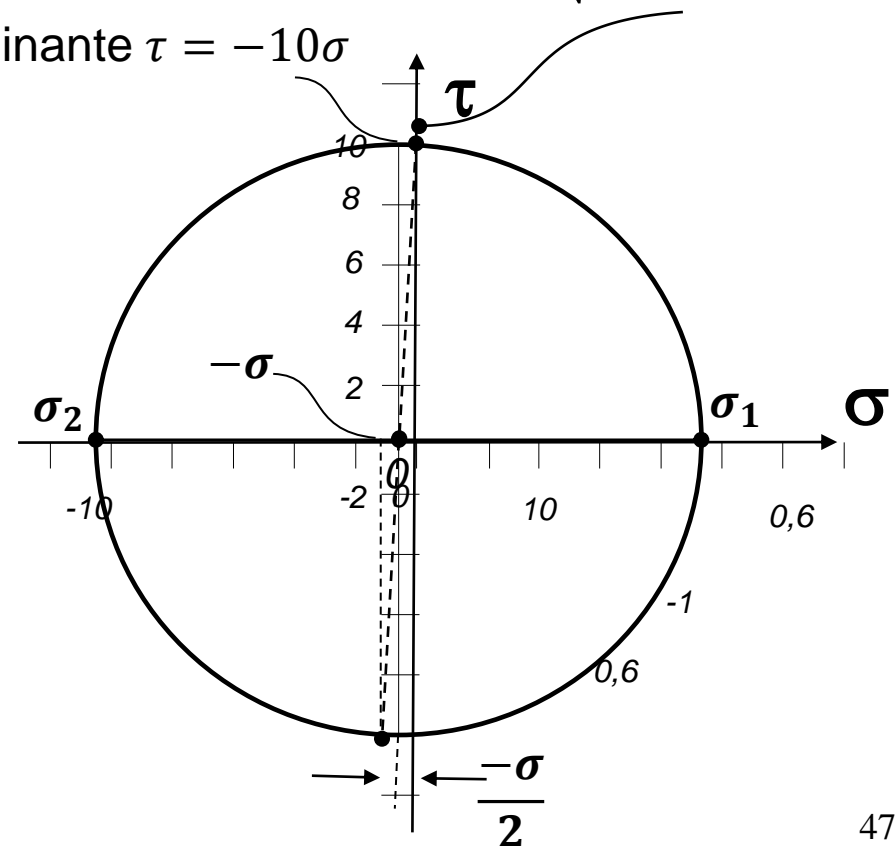
$$\tau = -10\sigma \quad \sigma = -0,1\tau$$

Construindo o circulo de Mohr, temos:

$$a = \left( \frac{-\sigma + 0}{2} \right) = -\frac{\sigma}{2}$$

Tensão dominante  $\tau = -10\sigma$

$$\tau_{max} = \pm \sqrt{\left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$





## Exemplo de aplicação

Dados:  $\sigma_{esc} = 400\text{MPa}$ ;  $W=400\text{N}$ ;  $Q= 40\text{Nm}$ ;  $D= 20\text{ mm}$  ( $r=10\text{ mm}$ ),  $t = \text{espessura}$

$$\tau_{max} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



$$\tau_{max} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{100.25|\sigma|}$$

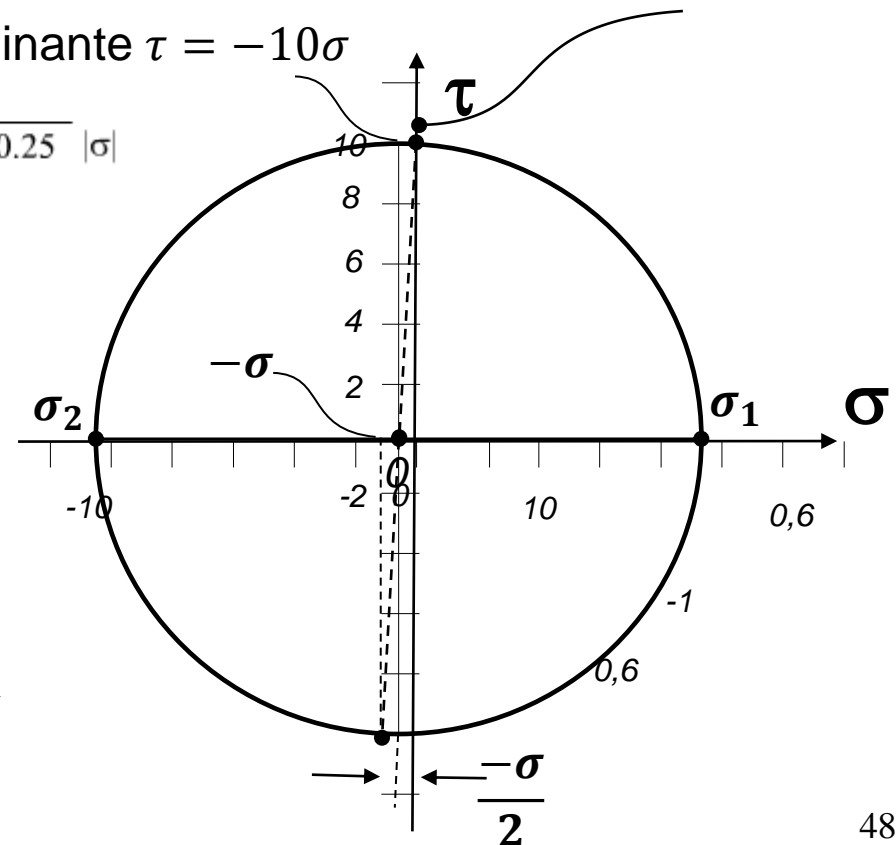


$$\tau_{max} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{100.25|\sigma|} = \sigma_{esc}$$

$$\sigma = \frac{W}{2\pi r t} \quad t = \frac{W}{2\pi r |\sigma|} \quad t = 0,32\text{mm}$$

Tensão dominante  $\tau = -10\sigma$

$$\sigma_p = -\frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{100.25|\sigma|}$$





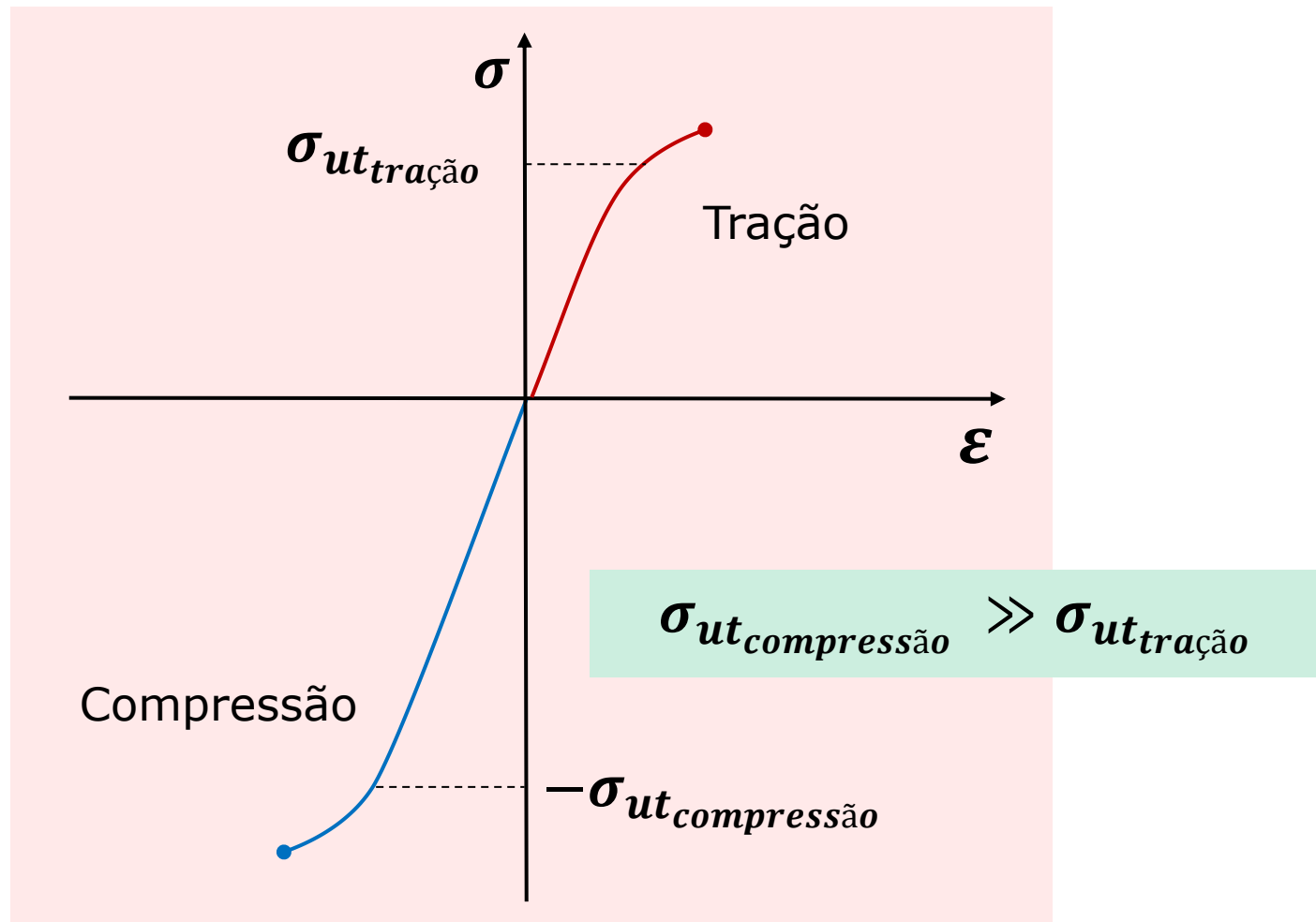


## **CrITÉrios de Falha para Materiais Frágeis**



## Critérios de escoamento e de fratura

### ► Para materiais frágeis – Considerações gerais



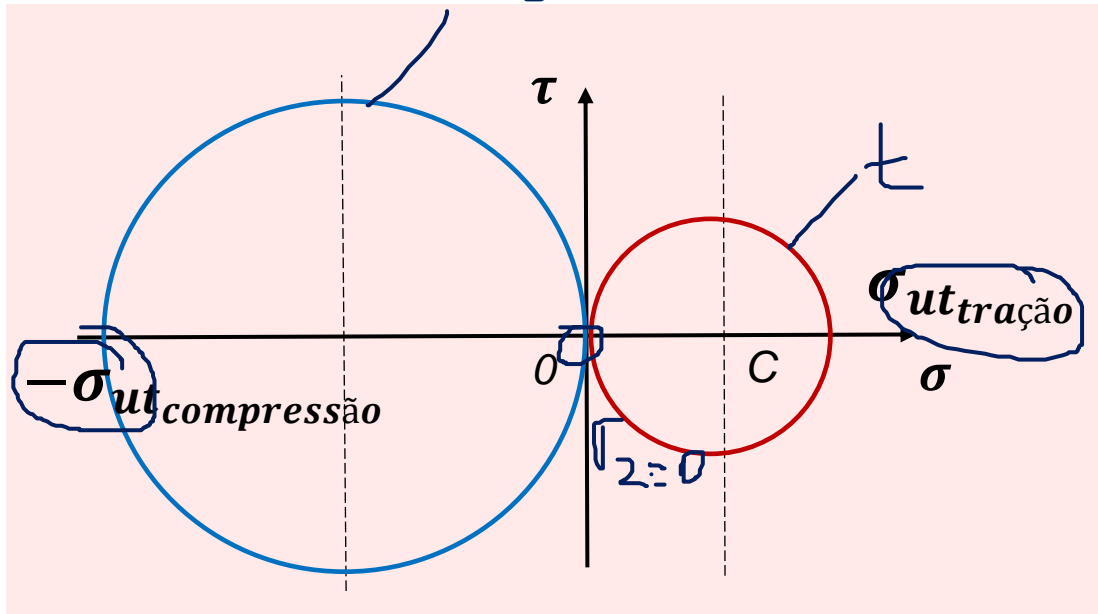
Sobreposição dos resultados dos ensaios de tração e compressão



## Critérios de escoamento e de fratura

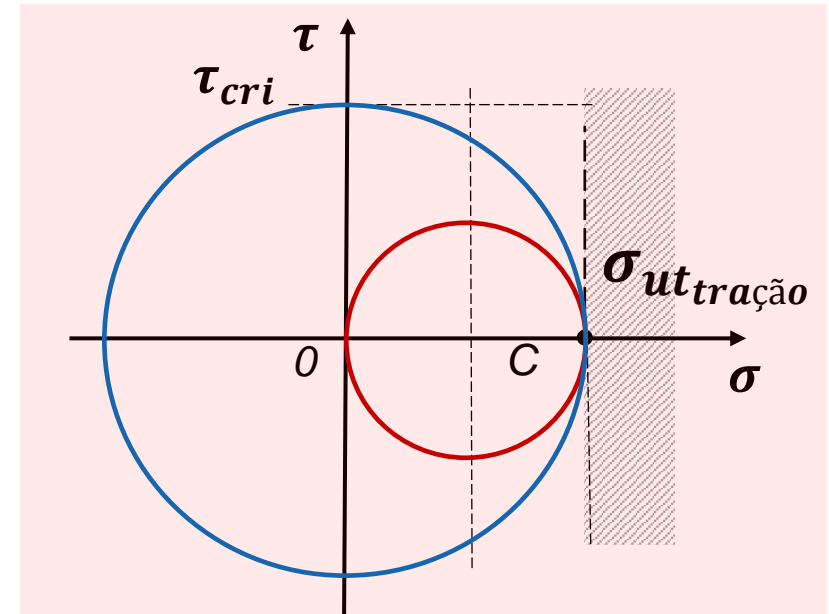
### ► Para materiais frágeis – Considerações gerais

#### Tensões Normais Críticas



Sobreposição dos círculos de Mohr para tração e compressão

#### Tensões Cisalhantes Críticas



Sobreposição dos círculos de Mohr para ensaios de tração e torção

$$\tau_{cri} \cong \sigma_{uttração}$$

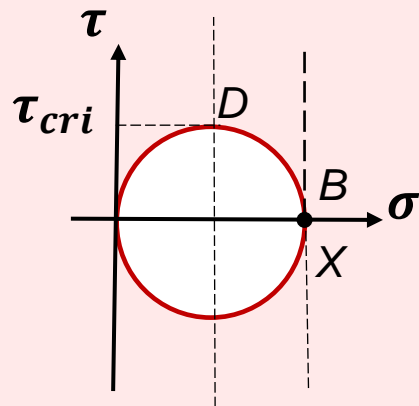


## Critérios de escoamento e de fratura

### ► Para materiais frágeis – Considerações gerais

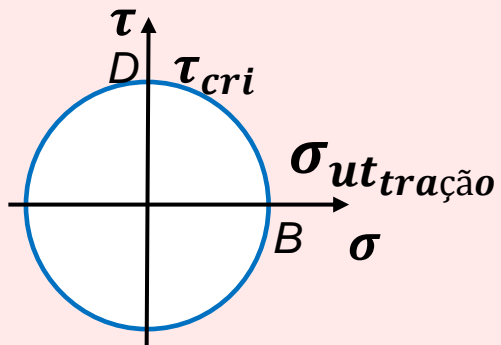
#### Tração

- Tensões Normais

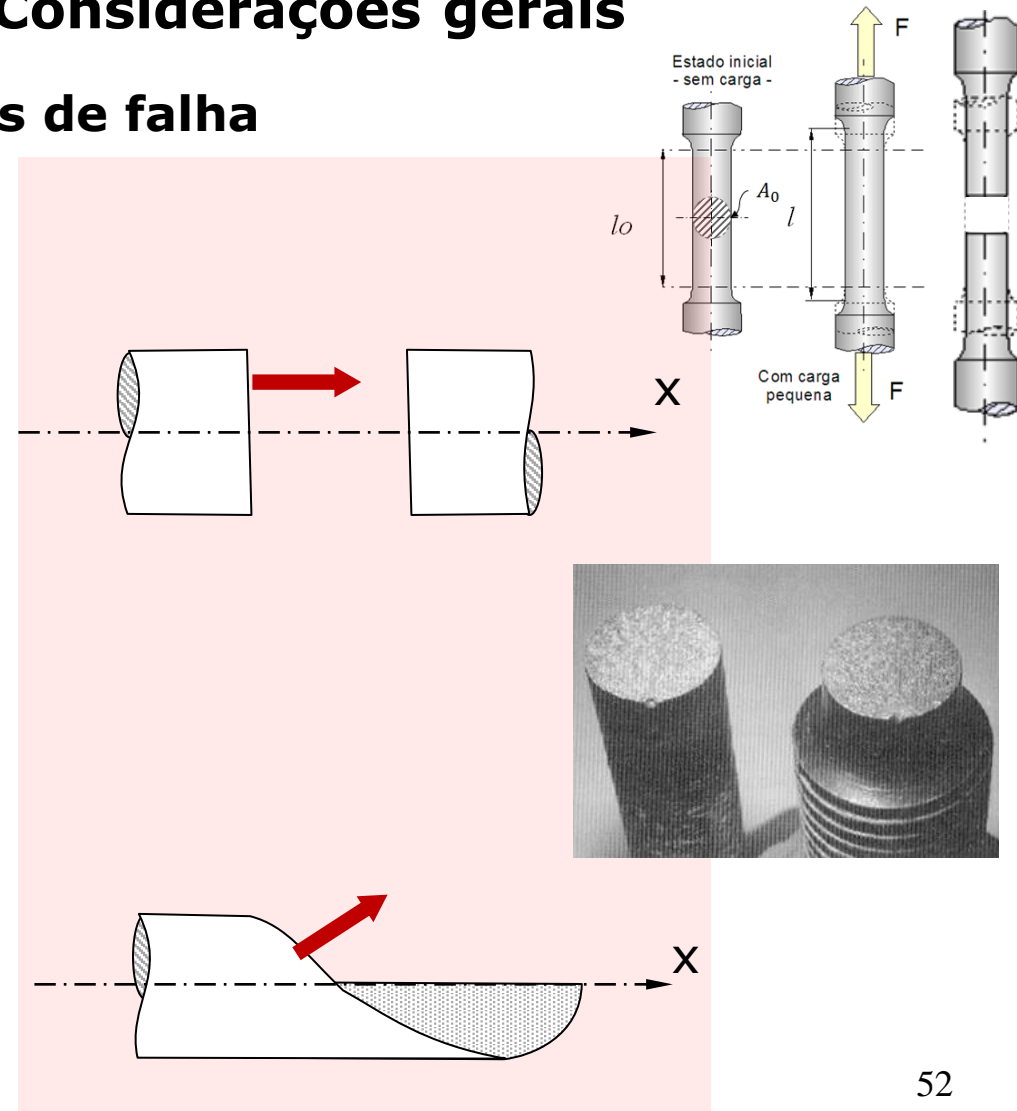


#### Torção

- Tensões Cisalhantes



#### Modos de falha



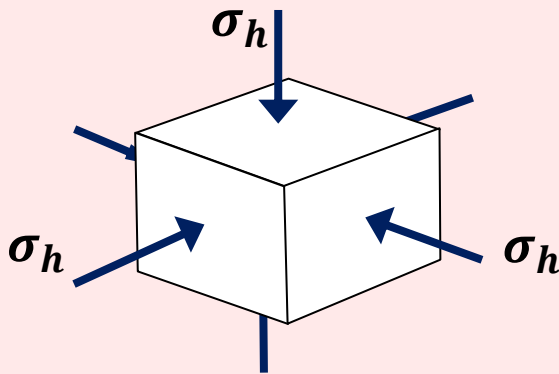


## Critérios de escoamento e de fratura

### ► Para materiais frágeis – Considerações gerais

#### Modos de falha

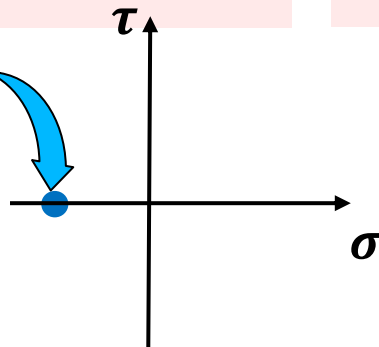
##### Hidroestática



##### Teorias de falha

- Máxima tensão normal - *Maximum normal stress*
- Falha frágil Coulumb-Mohr - *Brittle Coulomb-Mohr*
- Mohr modificado - *Modified Mohr*

$$\sigma_{uttração} \cong \sigma_h$$





## Teoria da Máxima Tensão Normal

- ▶ A Teoria da Máxima Tensão é a hipótese de falha mais antiga, seu desenvolvimento é atribuído a Rankine
- ▶ Segundo a TMTN a falha ou fratura ocorre quando **uma** das três tensões principais excedem tensão equivalente de escoamento, independentemente das outras tensões.
- ▶ Novamente nos arranjaríamos as tensões principais para o estado geral de tensões de forma que  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .
- ▶ Esta teoria então prediz eu a falha ocorrerá quando

$$\sigma_1 \geq \sigma_{\text{tração}} \quad \text{ou} \quad \sigma_2 \leq -\sigma_{\text{compressão}}$$



## Teoria da Máxima Tensão Normal

- ▶ As tensões principais para o estado plano são dadas por:

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

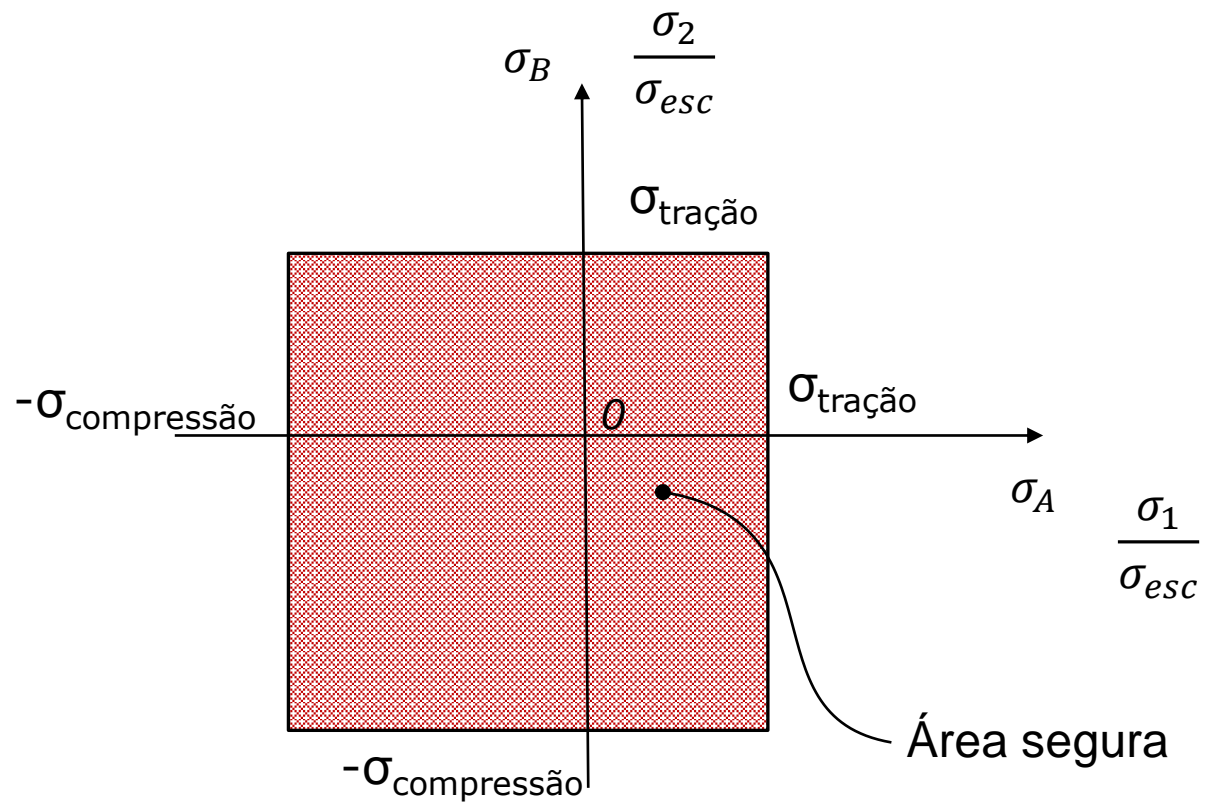
- ▶ Com  $\sigma_A \geq \sigma_B$  , então:  $\sigma_1 \geq \sigma_{\text{tração}}$  ou  $\sigma_2 \leq -\sigma_{\text{compressão}}$  pode ser reescrito como:

$$\sigma_A \geq \sigma_{\text{tração}} \quad \text{ou} \quad \sigma_B \leq -\sigma_{\text{compressão}}$$



## Teoria da Máxima Tensão Normal

- ▶ Em termos gráficos:







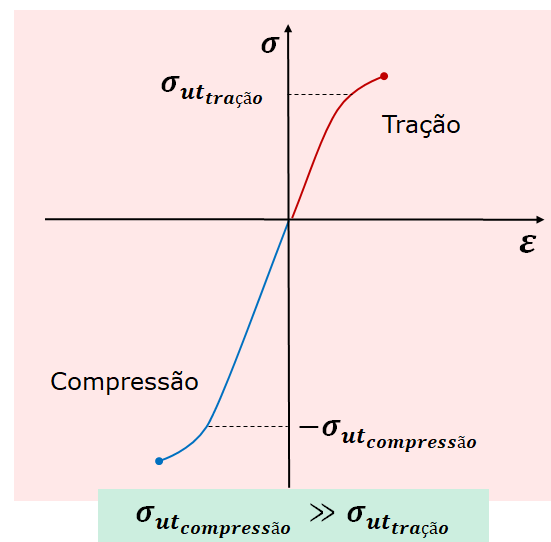
## **Teoria de Mohr Modificada para materiais frágeis**

- ▶ Esta teoria é derivada do critério de máxima tensão normal, a qual é historicamente a primeira proposta de teoria de falha para materiais frágeis, e é similar a teoria máxima tensão cisalhante.
- ▶ Esta considera que as tensões intermediárias principais não participam do processo de falha.
- ▶ O conceito de tensão equivalente não se aplica a materiais frágeis pois as tensões de tração e compressão diferem muito.



## Teoria de Mohr Modificada para materiais frágeis

- ▶ Um material frágil com tensão equivalente de tração de 250MPa tem uma tendência de falha muito maior do que um com 250MPa de resistência a compressão.
- ▶ Assim um fator de segurança deve ser obtido diretamente das tensões principais.
- ▶ O fator de segurança pode ser obtido graficamente ou analiticamente





## Teoria de Mohr Modificada para materiais frágeis

- ▶ O critério de falha ocorre quando:

$$\sigma_A = \frac{S_{ut}}{n} \quad \sigma_A \geq \sigma_B \geq 0$$

$$\sigma_A \geq 0 \geq \sigma_B \quad \text{and} \quad \left| \frac{\sigma_B}{\sigma_A} \right| \leq 1$$

$$\frac{(S_{uc} - S_{ut}) \sigma_A}{S_{uc} S_{ut}} - \frac{\sigma_B}{S_{uc}} = \frac{1}{n} \quad \sigma_A \geq 0 \geq \sigma_B \quad \text{and} \quad \left| \frac{\sigma_B}{\sigma_A} \right| > 1$$

$$\sigma_B = -\frac{S_{uc}}{n} \quad 0 \geq \sigma_A \geq \sigma_B$$

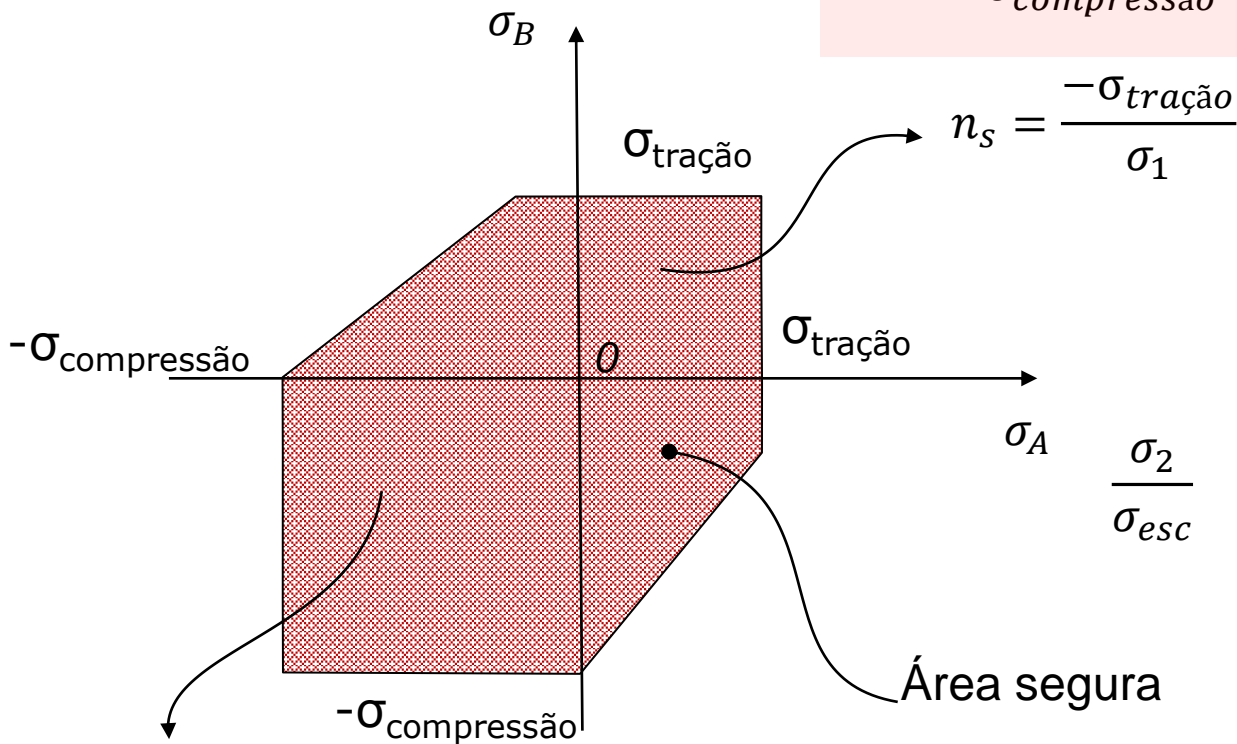


## Teoria de Mohr Modificada para materiais frágeis

► Em termos gráficos para :

$$\sigma_1 > 0 \text{ e } \sigma_2 < 0$$

$$\sigma_1 = - \frac{\sigma_{tração} \sigma_2}{\sigma_{compressão} - \sigma_{tração}} = \frac{1}{n_s} \frac{\sigma_{compressão} \sigma_{tração}}{\sigma_{compressão} - \sigma_{tração}}$$



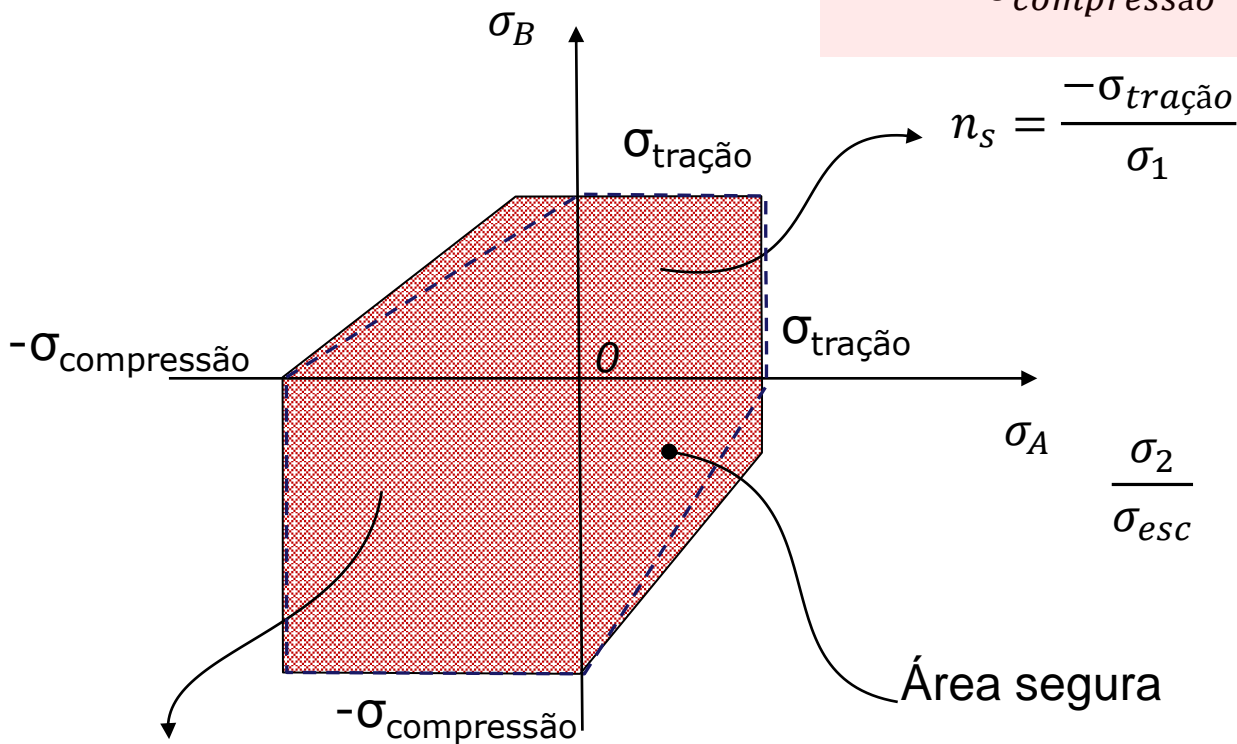


## Teoria de Mohr Modificada para materiais frágeis

► Em termos gráficos para :

$$\sigma_1 > 0 \text{ e } \sigma_2 < 0$$

$$\sigma_1 = - \frac{\sigma_{tração} \sigma_2}{\sigma_{compressão} - \sigma_{tração}} = \frac{1}{n_s} \frac{\sigma_{compressão} \sigma_{tração}}{\sigma_{compressão} - \sigma_{tração}}$$






$$n_s = \frac{-\sigma_{compressão}}{\sigma_2}$$



## Teoria de Coulumb-Mohr para materiais frágeis

- ▶ Também denominada de teoria do atrito interno
- ▶ É uma modificação da teoria da máxima tensão normal
- ▶ É a teoria de falha preferida para análise de materiais frágeis

Stress Region	Mohr's Circle	Failure	Factor of Safety
$\sigma_{AB} > 0$		$\sigma_A \geq S_{ut}$	$\eta = \frac{S_{ut}}{\sigma_1}$
$\sigma_A > 0,$ $\sigma_B < 0$		$\frac{\sigma_A - \sigma_B}{S_{ut} - S_{uc}} \geq 1$	$\frac{1}{\eta} = \frac{\sigma_A - \sigma_B}{S_{ut} - S_{uc}}$
$\sigma_{AB} \leq 0$		$ \sigma_B  \geq S_{uc}$	$\eta = \frac{S_{uc}}{ \sigma_B }$

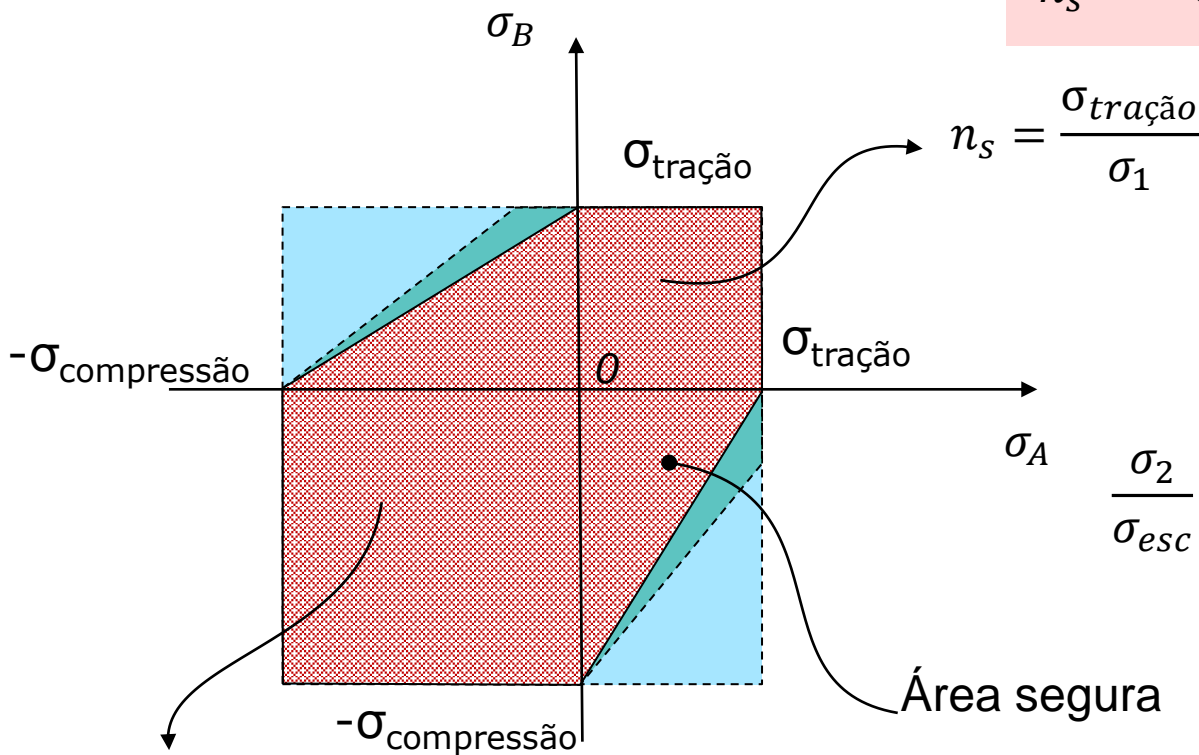


## Teoria de Coulumb-Mohr para materiais frágeis

► Em termos gráficos para :

$$\sigma_1 > 0 \text{ e } \sigma_2 < 0$$

$$\frac{1}{n_s} = \frac{\sigma_1}{\sigma_{tração}} - \frac{\sigma_2}{\sigma_{compressão}}$$



$$n_s = \frac{\sigma_{tração}}{\sigma_1}$$

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_{esc}}$$

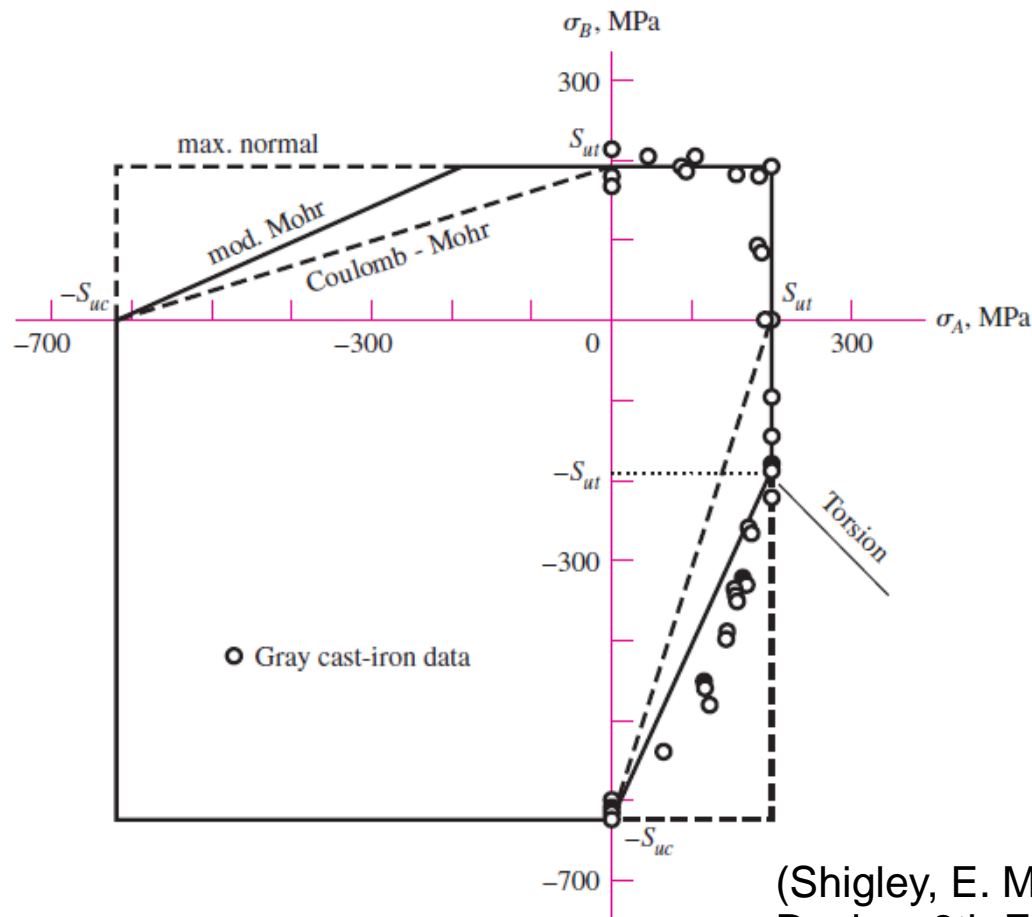
Área segura

$$n_s = \frac{-\sigma_{compressão}}{\sigma_2}$$



## Comparação

- ▶ Plotagem dos dados para fratura biaxial para ferro-fundido cinzento considerando diferentes critérios de falha



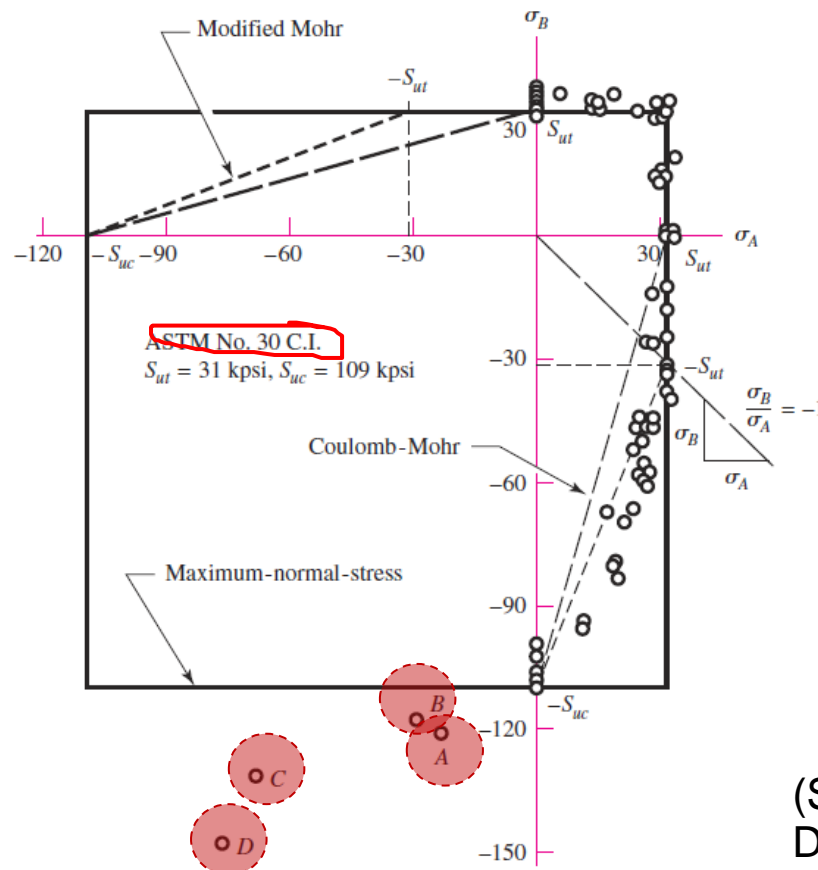
(Shigley, E. Mechanical Engineering Design, 8th Edition, MacGrawHill, 2008) 64





## Comparação

- ▶ Plotagem dos dados para fratura biaxial para ferro-fundido considerando três critérios de falha para materiais frágeis. Note os pontos A, B, C e D.



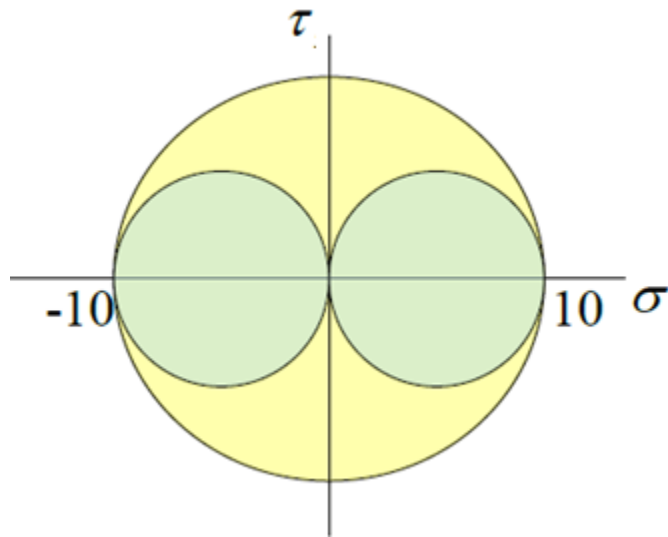
(Shigley, E. Mechanical Engineering Design, 8th Edition, MacGrawHill, 2008) 65



## Exemplo

► Determine os fatores de segurança para os seguintes materiais:

- Alumínio puro:  $\sigma_{esc} = 30\text{MPa}$ ,  $\sigma_x = 10\text{MPa}$ ,  
 $\sigma_y = -10\text{MPa}$  e  $\tau_{xy} = 0\text{MPa}$



### Teoria da Máxima Tensão Cisalhante

$$\tau_{max} = \tau_{cri} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tau_{max} = \tau_{cri} = \pm \sqrt{\left(\frac{10 - (-10)}{2}\right)^2 + 0^2}$$

$$\tau_{max} = \tau_{cri} = 10\text{MPa}$$



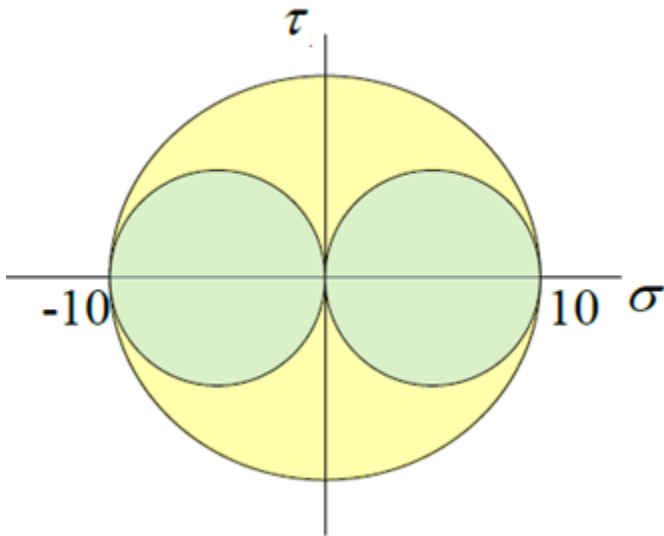
## Exemplo

► Determine os fatores de segurança para os seguintes materiais:

► Alumínio puro:  $\sigma_{esc} = 30\text{MPa}$ ,  $\sigma_x = 10\text{MPa}$ ,  $\sigma_y = -10\text{MPa}$  e  $\tau_{xy} = 0\text{MPa}$

### Teoria da Máxima Tensão Cisalhante

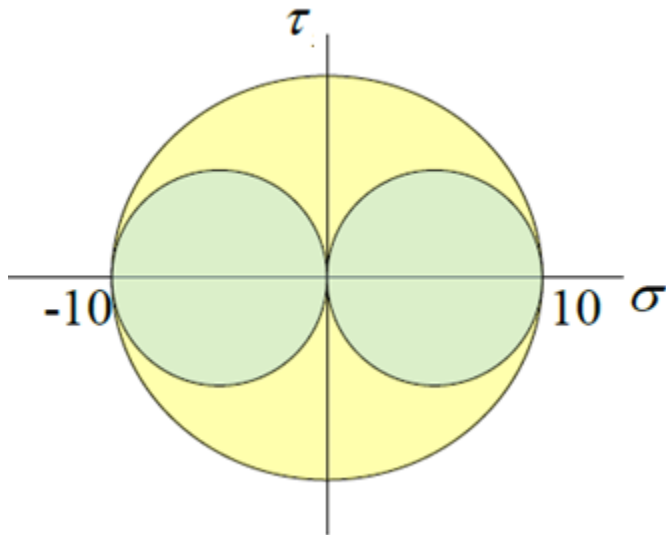
$$n = \frac{\sigma_{esc}}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{30}{10 - (-10)} = 1.5$$





## Exemplo

- ▶ Determine os fatores de segurança para os seguintes materiais:
  - ▶ Alumínio puro:  $\sigma_{esc} = 30\text{MPa}$ ,  $\sigma_x = 10\text{MPa}$ ,  $\sigma_y = -10\text{MPa}$  e  $\tau_{xy} = 0\text{MPa}$



### Teoria da Máxima Energia de Distorção

$$\sigma_{vm} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2} = \sqrt{300} = 17,3\text{Mpa}$$

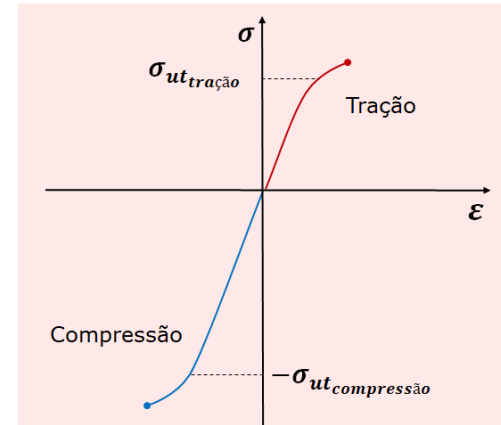
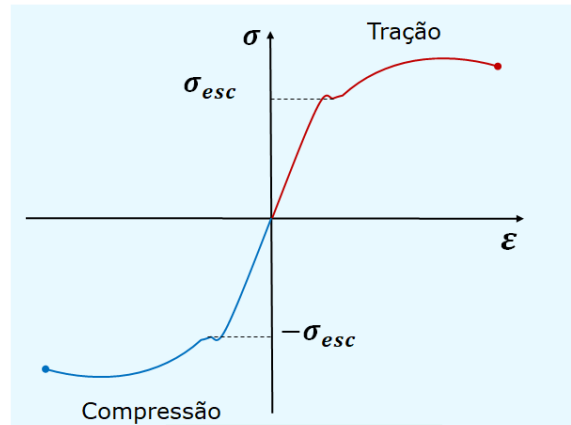
$$n = \frac{\sigma_{esc}}{\sigma_{vm}} = \frac{30}{17,3} = 1.7$$



### Materiais Dúcteis

### Materiais Frágeis

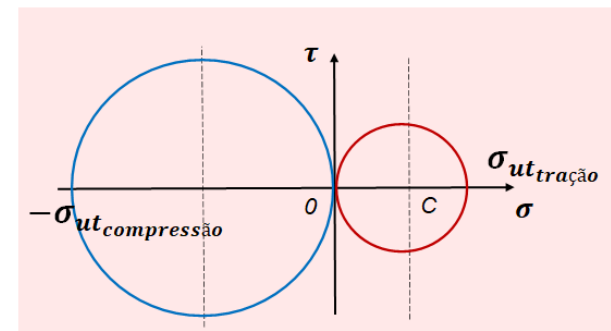
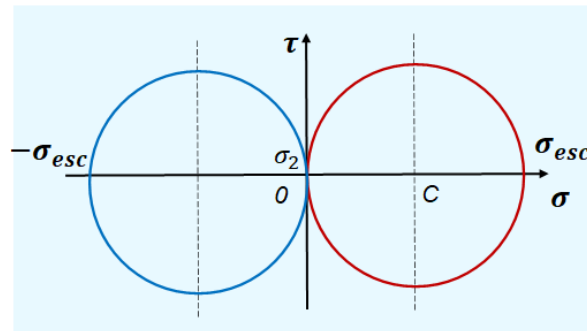
Sobreposição dos resultados dos ensaios de tração e compressão



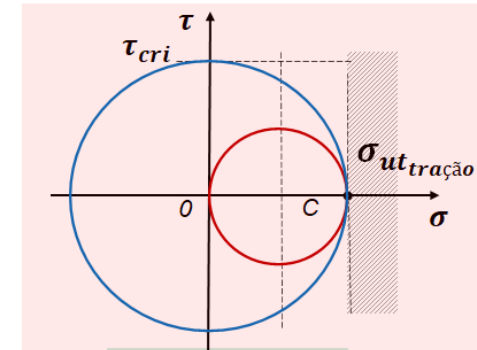
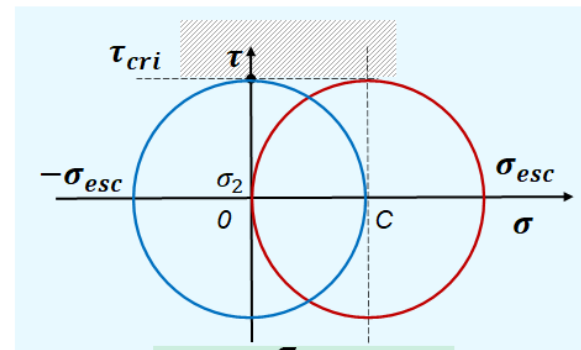
$$\sigma_{esc} \cong -\sigma_{esc}$$

$$\sigma_{utcompressão} \gg \sigma_{uttração}$$

Sobreposição dos círculos de Mohr para tração e compressão



Sobreposição dos círculos de Mohr para ensaios de tração e torção



$$0,5 < \frac{\tau_{cri}}{\sigma_{esc}} < 0,6$$

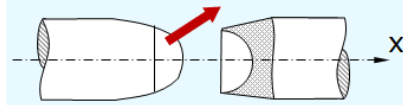
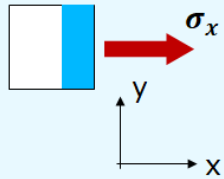
$$\tau_{cri} \cong \sigma_{uttração}$$



## Materiais Dúcteis

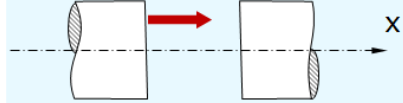
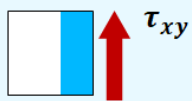
### Tração

➤ Tensões Normais

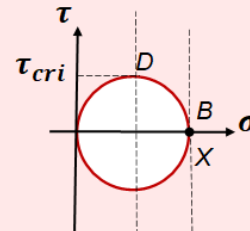


### Torção

➤ Tensões Cisalhantes

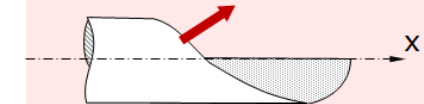
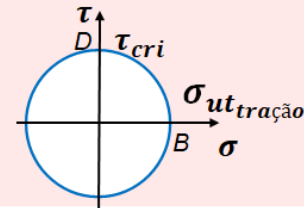


## Materiais Frágeis

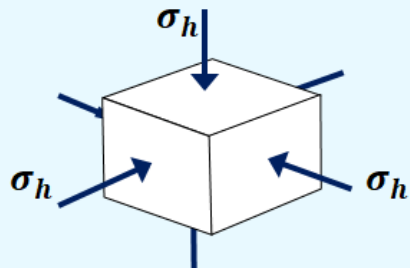


### Torção

➤ Tensões Cisalhantes

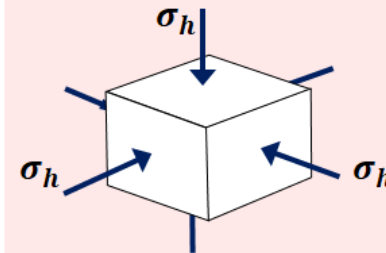


### Hidrostática

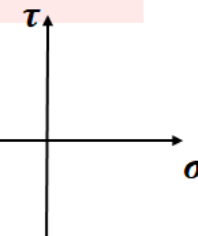


$$\sigma_{esc} \gg \sigma_h$$

### Hidrostática



$$\sigma_{uttração} \cong \sigma_h$$





## Teorias de falha -> Dúcteis

- Máxima tensão cisalhante - *Maximum shear stress*
- Máxima energia de distorção - *Maximum distortion energy*
- Teoria Coulomb-Mohr para materiais dúcties

## Teorias de falha -> Frágeis

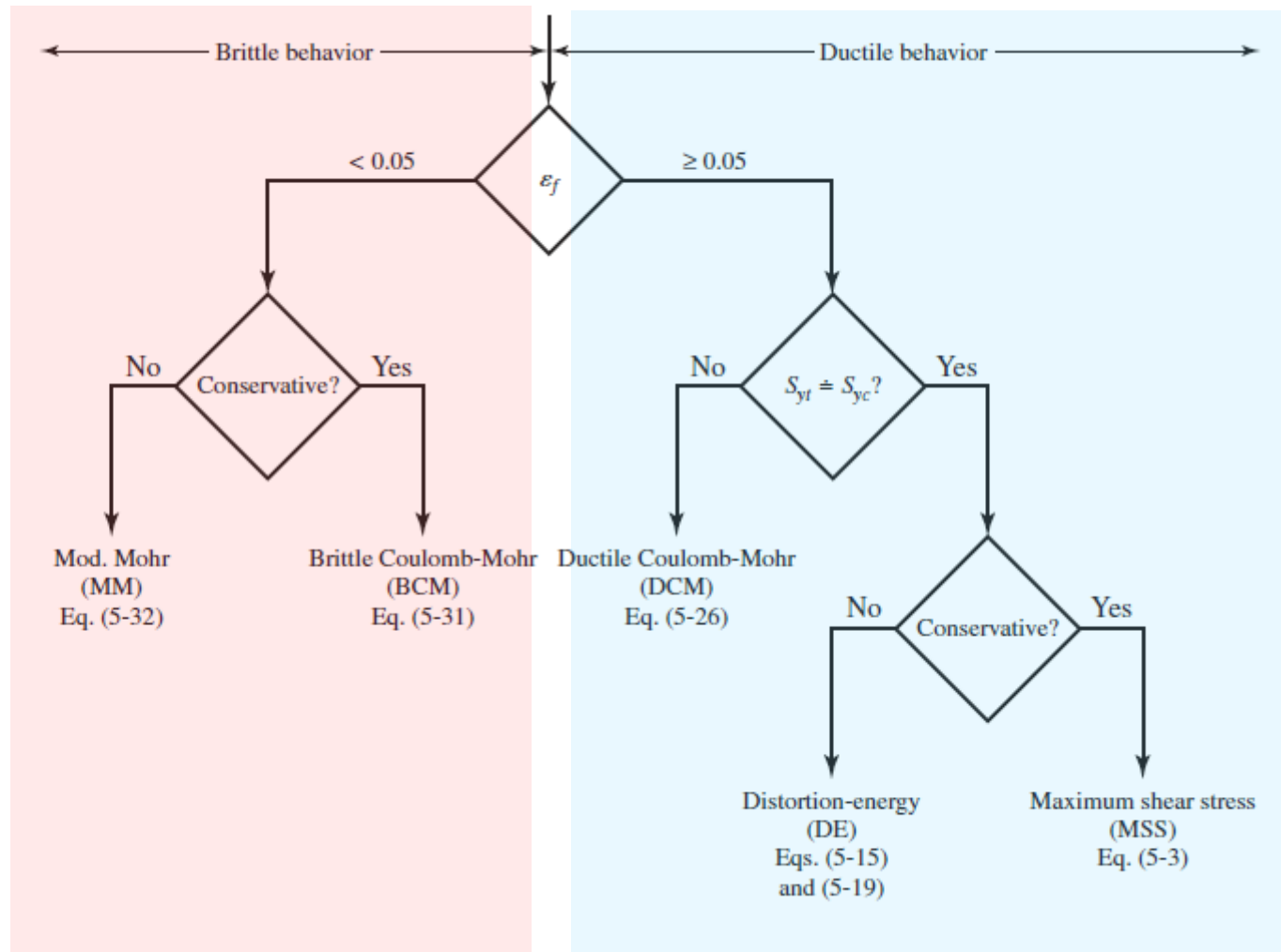
- Máxima tensão normal - *Maximum normal stress*
- Falha frágil Coulomb-Mohr - *Brittle Coulomb-Mohr*
- Mohr modificado - *Modified Mohr*



## Fluxograma para seleção da teoria de falha

**Figure 5-21**

Failure theory selection flowchart.







ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

---

**FIM**