Lista 15 - Operadores em espaços com produto interno

Exercício 1. *Considere o espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *munido do produto interno* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *usual. Verfique quais dos operadores lineares* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *abaixo são isometrias de* $\mathbb{R}^2$*:*

(a) $T(x, y) = (x + y, x - y)$, *para* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(b) $T(x, y) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y, \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y\right)$, *para* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(c) $T(x, y) = (y, x)$, *para* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercício 2. *Considere o espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ *munido do produto interno* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *usual. Determine* $m \in \mathbb{R}$*, de modo que o operador linear* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *dado por:*

$$T(x, y, z) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}y + mz, -\frac{1}{\sqrt{6}}x + \frac{2}{\sqrt{6}}y - \frac{1}{\sqrt{6}}z, -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}z\right), \quad \textit{para} \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

seja uma isometria em $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Exercício 3. *Considere o espaço vetorial real* $(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$*, munido com o produto interno*

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt, \;\; f, g \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}).$$

(a) *Ortonormalize a base canônica,* $B = \{1, x, x^2\}$.

(b) *Considere o operador linear* $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$*, cuja matriz em relação a base* C*, encontrada no item anterior, seja* $[T]_C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ m & n & p \end{pmatrix}$. *Determine* $m, n, p \in \mathbb{R}$*, de modo que o operador linear* T *seja uma isometria no espaço vetorial real considerado.*

Exercício 4. *Considere espaço vetorial real* $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$*, munido do produto interno*

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(B^t A), \;\; \textit{para } A, B \in M_2(\mathbb{R}).$$

O operador linear T: $M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ *dado por* $T(A) = A^t$*, para* $A \in M_2(\mathbb{R})$ *é uma isometria no espaço euclidiano considerado?*

Exercício 5. *Considere espaço vetorial real* $(M_{4\times 1}(\mathbb{R}), +, \cdot)$*, munido do produto interno*

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(B^t A), \;\; \textit{para } A, B \in M_{4\times 1}(\mathbb{R}),$$

e o espaço vetorial real $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$*, munido do produto interno* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *usual. Construa uma isometria entre estes espaços vetoriais reais (se existir).*

Exercício 6. *Seja* $(V,+,\cdot)$ *espaço vetorial real, munido do produto interno* $\langle\cdot,\cdot\rangle$. *Determine quais dos operadores abaixo são autoadjuntos:*

(a) $V=\mathbb{R}^3$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *o produto interno usual e* $T\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ *dado por* $T(x,y,z)=(y+2z,x+3z,2x+3y)$, *para* $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

(b) $V=\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *o produto interno*

$$\langle f,g\rangle=\int_0^1 f(t)g(t)dt,\ \ f,g\in\mathcal{P}_1(\mathbb{R}),$$

e $T\colon\mathcal{P}_1(\mathbb{R})\to\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$, *dado por* $T(p)=q$, *para* $p\in\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$, *onde* $p(t)=a+bt$ *e* $q(t)=(a+4b)+(4a+2b)t$, *para* $t\in\mathbb{R}$.

(c) $V=M_2(\mathbb{R})$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *o produto interno do Exercício 4e* $T\colon M_2(\mathbb{R})\to M_2(\mathbb{R})$, *tal que*

$$T\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right)=\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right),\qquad T\left(\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right)=\left(\begin{pmatrix}1&1\\2&0\end{pmatrix}\right),$$
$$T\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right)=\left(\begin{pmatrix}0&0\\2&0\end{pmatrix}\right),\qquad T\left(\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)=\left(\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right).$$

Exercício 7. *Considere o espaço vetorial* $V=\mathcal{P}(\mathbb{R})$ *munido do produto interno*

$$\langle p,q\rangle=\int_a^b p(x)q(x)dx,\quad p,q\in\mathcal{P}(\mathbb{R}).$$

O operador linear $T\colon V\to V$ *dado por* $T(p)=q$, $p\in V$, *em que* $q(t)=tp(t)$, *é autoadjunto? Justifique sua resposta.*