Lista 11 - Transformações Lineares (Matriz de uma Transformação linear) - PARTE III

Exercício 1. Determinar as matrizes das seguintes transformações lineares em relação as bases canônicas dos respectivos espaços vetoriais envolvidos.

(a) $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ T(x,y,z) = (x+y,z),\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
(b) $T:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R},\ T(x,y,z,t) = 2x+y-z+3t,\ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.
(c) $T:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ T(x) = (x,2x,3x),\ x \in \mathbb{R}$.

Exercício 2. Considere
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
Determinar a matriz do operador linear $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ dado por $T(X) = MX - XM,\ X \in M_2(\mathbb{R})$ em relação à base canônica de $M_2(\mathbb{R})$.

Exercício 3. Seja $T : \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ transformação linear definida por
$$T(p) = \int_{-1}^{1} p(t)\,dt, \quad p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R}).$$
Determine a matriz de T em relação às bases $\mathcal{B}$ de $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ e $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}$, nos seguintes casos:

(a) $\mathcal{B} = \{p_o, p_1, p_2\}$ e $\mathcal{C} = \{1\}$, onde $p_o(t) = 1$, $p_1(t) = t$, $p_2(t) = t^2$, $t \in \mathbb{R}$.

(b) $\mathcal{B} = \{q_o, q_1, q_2\}$ e $\mathcal{C} = \{-2\}$, onde $q_o(t) = 1$, $q_1(t) = 1+t$, $q_2(t) = 1+t+t^2$, $t \in \mathbb{R}$.

Exercício 4. Seja $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ uma base de um espaço vetorial V. Se $T, S : V \to V$ são operadores lineares em V tais que
$$\begin{aligned} T(e_1) &= 2e_1 - 3e_2 + e_3 & \qquad S(e_1) &= 3e_1 + 2e_2 \\ T(e_2) &= e_1 + e_2 & S(e_2) &= e_1 - e_2 - e_3 \\ T(e_3) &= e_2 + e_3 & S(e_3) &= e_1 + e_2 - 2e_3. \end{aligned}$$
Determine as seguintes matrizes $[T]_{\mathcal{B}}$, $[S]_{\mathcal{B}}$, $[S \circ T]_{\mathcal{B}}$, $[S^2 + I]_{\mathcal{B}}$ e $[T^3 - S^2]_{\mathcal{B}}$.

Exercício 5. Sejam $U = \mathbb{R}^3$, $V = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ e $\mathcal{C} = \{(1,0),(0,1)\}$ bases dos espaços vetoriais U e V, respectivamente. Encontrar, em cada um dos itens abaixo, $T \in \mathcal{L}(U,V)$ tal que $[T]_{\mathcal{BC}}$ seja a matriz;
$$a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \qquad b) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad c) \begin{pmatrix} 10 & 5 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercício 6. Seja $V = M_2(\mathbb{R})$, que tem como base canônica a base
$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$
Seja $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear dada por $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a+d, b+c)$.

(a) Encontre a matriz $[T]_{\mathcal{AB}}$, onde $\mathcal{A}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^2$.

(b) Se $S : \mathbb{R}^2 \to M_2(\mathbb{R})$ é uma transformação linear tal que $[S]_{\mathcal{AB}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, encontre uma expressão para $S(x,y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Além disso, determine $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tal que $S(a,b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Exercício 7. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear tal que $[T]_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, onde $\mathcal{A}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^2$.

Determine todos os vetores $u, v \in \mathbb{R}^2$ tais que $T(u) = u$ e $T(v) = -v$.

Exercício 8. Sejam $W = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e T o operador linear em $\mathbb{R}^2$ definido por

$$T(v) = W[v]_{\mathcal{A}}, \quad v \in \mathbb{R}^2,$$

onde $[v]_{\mathcal{A}}$ denota a matriz das coordenadas do vetor $\underline{v}$ em relação à base canônica $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}^2$. Determine a matriz do operador T em cada uma das bases de $\mathbb{R}^2$ seguintes:

(a) $\mathcal{B}_1 = \{\, (1,0), (0,1) \,\}$;
(b) $\mathcal{B}_2 = \{\, (1,3), (2,5) \,\}$.

Exercício 9. Mostre que as transformações em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ dadas por

$$T(x,y) = (x, 2y), \quad S(x,y) = (y, x+y) \quad \text{e} \quad L(x,y) = (0,x), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

formam um conjunto L.I. em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.

Exercício 10. Seja $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ uma base de um espaço vetorial V. Considere T, $S \in \mathcal{L}(V)$ dadas por

$$T(e_1) = e_1 - e_2, \quad T(e_2) = e_1 + e_3, \quad T(e_3) = e_2,$$

e

$$S(e_1) = 2e_1 + e_3, \quad S(e_2) = e_1, \quad S(e_3) = e_2 - 3e_1.$$

Determine as matrizes, em relação à base $\mathcal{B}$, dos seguintes operadores lineares:

$$T, \quad S, \quad 3T - 5S, \quad T \circ S \circ T, \quad T^2 + S^2, \quad T^{-1} \text{ (caso exista)}, \quad (T \circ S)^{-1} \text{ (caso exista)}.$$

Exercício 11. Verifique se os operadores lineares em $\mathbb{R}^3$ abaixo são isomorfismos e em caso afirmativo determinar o isomorfismo inverso.

(a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x,y,z) = (x - 3y - 2z, y - 4z, z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x,y,z) = (x, x - y, 2x + y - z), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercício 12. Considere o operador linear em $\mathbb{R}^3$ tal que

$$T(1,0,0) = (1,1,1), \quad T(0,0,1) = (1,0,1), \quad T(0,1,2) = (0,0,4).$$

Pergunta-se: T é um isomorfismo? Em caso afirmativo, obtenha o isomorfismo inverso.

Exercício 13. Mostre que $\mathbb{R}^2$ é isomorfo a qualquer subespaço de dimensão 2 de $\mathbb{R}^3$. Exiba um isomorfismo.

Exercício 14. Verifique, em cada um dos itens abaixo, se os espaços vetoriais U e V são isomorfos, justificando a resposta.

(a) $U = \mathbb{R}^2, \ V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; z = 0\right\}$.
(b) $U = M_{2\times 3}(\mathbb{R}), \ V = \{p \in \mathscr{P}_4(\mathbb{R}); p'(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$.
(c) $U = \mathbb{R}^3, \ V = \left\{A \in M_2(\mathbb{R}); A^t = A\right\}$.
(d) $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; a \in \mathbb{R} \right\}, \ V = \{p \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R}); p'(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$.

Exercício 15. Mostre que o subespaço $W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \ x - y = z - 2t = 0\}$ é isomorfo ao subespaço $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x - y - z = 0\}$ e exiba um isomorfismo entre estes subespaços vetoriais do espaço vetorial $\mathbb{R}^4$.