Lista 10 - Transformações Lineares (Núcleo e Imagem) - PARTE II

Exercício 1. Para cada uma das transformações lineares abaixo, determinar uma base e a respectiva dimensão do núcleo e da imagem da mesma.

(a) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dada por $T(x\,,y\,,z) = x + z - y$, para $(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^2$.

(b) $T\colon \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, dada por $T(p) = p_2\, p''$, para $p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, em que $p_2(x) = x^2$, para $x \in \mathbb{R}$.

(c) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dada por $T(x\,,y\,,z) = (z\,,x-y\,,-z)$, para $(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3$.

(d) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, dada por $T(x\,,y) = (2\,y\,,x-y\,,-x)$, para $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$.

(e) $T\colon M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, dada por $T(X) = M\,X + X$, para $X \in M_2(\mathbb{R})$, em que $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercício 2. Dê exemplos de transformações lineares

(a) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que $\dim[\mathcal{N}(T)] = 1$.
(b) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, tal que $\mathcal{N}(T) = \{(0\,,0\,,0)\}$.
(c) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, tal que $T\left(\mathbb{R}^2\right) = \{(0\,,0\,,0)\}$.
(d) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que $T\left(\mathbb{R}^3\right) = [(2\,,1\,,1)\,,(1\,,-1\,,2)]$.
(e) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que $\mathcal{N}(T) = \{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ x = y\}$.
(f) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que $\mathcal{N}(T) = \{(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, z = -x\}$.
(g) $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, tal que $\dim\left[T\left(\mathbb{R}^4\right)\right] = 3$.
(h) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tal que $\mathcal{N}(T) = [(2\,,1)]$.

Exercício 3. Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear, tal que

$$T(1\,,0\,,0) = (1\,,1\,,0)\,,\quad T(0\,,1\,,0) = (1\,,1\,,2)\quad \text{e}\quad T(0\,,0\,,1) = (0\,,0\,,2)\,.$$

Determinar uma base de cada um dos seguintes subespaços:

(a) $\mathcal{N}(T)$, **(b)** $T(\mathbb{R}^3)$, **(c)** $\mathcal{N}(T) \cap T(\mathbb{R}^3)$, **(d)** $\mathcal{N}(T) + T(\mathbb{R}^3)$.

Exercício 4. Sejam $(U\,,+\,,\cdot)$ e $(V\,,+\,,\cdot)$ dois espaços vetoriais reais, tais que $\dim U > \dim V$. Mostre que se $T\colon U \to V$ é uma transformação linear, então existe um vetor, não nulo, $u_o \in U$ tal que $T(u_o) = O_V$.

Exercício 5. Determine o núcleo das transformações lineares.

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por $T(x\,,y) = y + 2\,x$, para $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$.
(b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dada por $T(x\,,y\,,z) = z - 2\,x$, para $(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3$.
(c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $T(x\,,y) = (2\,x + 2\,y\,,x + y)$, para $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$.
(d) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $T(x\,,y) = (x + y\,,x - y)$, para $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$.
(e) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dada por $T(x\,,y\,,z) = (z - x\,,z - 2\,x\,,z - 3\,x)$, para $(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercício 6. Determinar bases para o núcleo e para a imagem de cada uma das transformações lineares abaixo.

(a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dada por $T(x\,,y\,,z) = (x + y\,,2\,x + y\,,3\,x + y)$, para $(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3$.
(b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por $T(x\,,y) = y + 2\,x$, para $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$.
(c) $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, dada por $T(X) = A\,X$, para $X \in M_2(\mathbb{R})$, onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.
(d) $T : \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, dada por $T(p) = p'$, para $p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$.
(e) $T : \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, dada por $T(p) = p' + p''$, para $p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$.
(f) $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ dada por $T(X) = A\,X + X$, para $X \in M_2(\mathbb{R})$, onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercício 7. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear em $\mathbb{R}^3$, tal que

$$T(1\,,0\,,0) = (2\,,3\,,1),\quad T(1\,,1\,,0) = (5\,,2\,,7)\quad \text{e}\quad T(1\,,1\,,1) = (-2\,,0\,,7)\,.$$

(a) Encontre uma expressão para $T(x\,,y\,,z)$, para cada $(x\,,y\,,z)\in\mathbb{R}^3$.
(b) T é sobrejetora? Justifique sua resposta.
(c) T é injetora? Justifique sua resposta.
(d) T é bijetora? Justifique sua resposta.

Exercício 8. Seja $T:M_2(\mathbb{R})\to M_2(\mathbb{R})$ um operador linear em $M_2(\mathbb{R})$, tal que

$$T\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1&4\\2&3\end{pmatrix},\quad T\left(\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-1&0\\0&3\end{pmatrix},$$
$$T\left(\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0&0\\2&1\end{pmatrix},\quad T\left(\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}.$$

(a) Encontre uma exepressão para $T(X)$, para cada $X\in M_2(\mathbb{R})$.
(b) T é sobrejetora? Justifique sua resposta.
(c) T é injetora? Justifique sua resposta.
(d) T é bijetora? Justifique sua resposta.

Exercício 9. Seja $T:U\to V$ um isomorfismo. Assuma que $S:V\to U$ satisfaz $T\circ S=I_V$ (ou $S\circ T=I_U$). Prove que S é uma trasnformação linear.

Exercício 10. Dadas as transformações lineares $T:U\to V$ e $S:V\to W$, assinale (V) ou (F) nas seguintes afirmações
(a) se a transformação linear $T\circ S$ é sobrejetora, então a transformação linear S é sobrejetora.
(b) se a transformação linear $T\circ S$ é sobrejetora, então a transformação linear T é sobrejetora .
(c) se a transformação linear $T\circ S$ é injetora, então a transformação linear S é injetora.
(d) se a transformação linear $T\circ S$ é injetora, então a transformação linear T é injetora.
Verifique que todas as afirmações serão verdadeiras se $U=V=W$.

Exercício 11. Determinar:
(a) um operador linear em $\mathbb{R}^4$, cujo núcleo é gerado pelos vetores $(1\,,1\,,0\,,0)\,,(0\,,0\,,1\,,0)$.
(b) um operador linear em $\mathbb{R}^4$, cujo núcleo e a imagem sejam gerados pelos (mesmos) vetores $(1\,,1\,,0\,,0)\,,(0\,,0\,,1\,,0)$.
(c) um operador linear em $\mathbb{R}^3$, cujo núcleo tenha dimensão igual a 1.
(d) um operador linear em $\mathbb{R}^3$, cujo núcleo é gerado pelos vetores $(1\,,1\,,0)\,,(0\,,0\,,1)$ e a imagem gerada pelo vetor $(1\,,-1\,,1)$.
(e) $T\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^4)$, tal que
$$T(\mathbb{R}^3)=[(2\,,2\,,3\,,2)\,,(3\,,2\,,0\,,2)]\,.$$
(f) uma transformação linear $T:\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^3$, tal que
$$T(\mathbb{R}^5)=[(1\,,0\,,0)\,,(0\,,1\,,0)\,,(1\,,1\,,1)]\quad\text{e}\quad\mathcal{N}(T)=[(1\,,1\,,1\,,1\,,1)\,,(1\,,1\,,1\,,1\,,0)]\,.$$
(g) uma transformação linear $T:\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^3$, tal que $\dim[\mathcal{N}(T)]=2$ e $\dim[T(\mathbb{R}^5)]=3$.
(h) uma transformação linear $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$, tal que $\mathcal{N}(T)=[(1\,,0\,,1)]$.
(i) uma transformação linear $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$, tal que $\mathcal{N}(T)=T(\mathbb{R}^4)=[(1\,,0\,,1\,,0)\,,(0\,,1\,,0\,,1)]$.
(j) uma transformação linear $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, tal que $T(\mathbb{R}^2)=[(1\,,1\,,1)\,,(1\,,2\,,0)]$.

Exercício 12. Sejam V espaço vetorial e $T:V\to V$ um operador linear **idempotente**, isto é, $T^2=T$.
Mostre que $V=\mathcal{N}(T)\oplus T(V)$.

Exercício 13. Mostre que $T\,,R\,,S\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, dados por $T(x\,,y)=(x\,,2\,y)$, $R(x\,,y)=(x\,,x+y)$, $S(x\,,y)=(0\,,x)$, para $(x\,,y)\in\mathbb{R}^2$, formam um subconjunto L.I. no espaço vetorial real $(\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)\,,+\,,\cdot)$.

Exercício 14. Sejam $(U\,,+\,,\cdot)\,,(V\,,+\,,\cdot)\,,(W\,,+\,,\cdot)$ espaços vetoriais, $T\in\mathcal{L}(U\,,V)$ e $S\in\mathcal{L}(V\,,W)$, tais que $\mathcal{N}(T)=\{O_U\}$ e $N(S)=\{O_V\}$. Mostre que $\mathcal{N}(S\circ T)=\{O_U\}$.