Lista 9 - Transformações Lineares - PARTE I

Em todos os Exercícios abaixo os espaços vetoriais considerados estarão munidos das respectivas operações usuais, exceto, menção contrária.

Exercício 1. Quais das seguintes aplicações entre os correspondentes espaços vetoriais reais, são transformações lineares?

(a) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dada por $T(x\,,y\,,z) = (x\,,x\,,x)$, para $(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3$.

(b) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dada por $T(x\,,y\,,z) = (2\,x^2 + 3\,y\,,x\,,z)$, para $(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3$.

(c) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $T(x\,,y) = (x + y\,,x - y)$, para $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$.

(d) $T\colon \mathscr{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, dada por $T(p)(x) = (a_1 - 2\,a_3 - a_2) - a_o\,x^2$, para $x \in \mathbb{R}$, onde $p(x) = a_o + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3$, para $x \in \mathbb{R}$.

(e) $T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $T(x) = |x|$, para $x \in \mathbb{R}$.

(f) $T\colon \mathscr{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$, dada por $T(p) = p'$, para $p \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$.

(g) $T\colon \mathscr{P}_4(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, dada por $T(p) = \displaystyle\int_0^1 p(x)\,dx$, para $p \in \mathscr{P}_4(\mathbb{R})$.

(h) $T\colon \mathbb{R}^3 \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, dada por $T(x\,,y\,,z) = \begin{pmatrix} -z & z - y \\ x & 0 \end{pmatrix}$, para $(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3$.

(i) $T\colon \mathbb{R}^3 \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, dada por $T(x\,,y\,,z) = \begin{pmatrix} 1 & -y \\ x & 0 \end{pmatrix}$, para $(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3$.

(j) $T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $T(x) = x^2 - 2\,x$, para $x \in \mathbb{R}$.

(k) $T : M_{n\times 1}(\mathbb{R}) \to M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, dada por $T(X) = A\,X + X$, para $X \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, onde $A \in M_n(\mathbb{R})$ fixa.

(l) $T : \mathscr{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$, dada por $T(p) = p' + p''$, para $p \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$.

(m) $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, dada por $T(X) = A\,X$, para $X \in M_2$, onde $A \in M_2(\mathbb{R})$ está fixada.

(n) $T : \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, dada por $T(p) = p + q$, para $p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ e $q \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ é dada por $q(t) = t^2 + 1$, para $t \in \mathbb{R}$.

Exercício 2. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, o operador linear dado por:

$$T(x\,,y\,,z) = (3\,x\,,x - y\,,2\,x + y + z)\,,\ \text{para } (x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,.$$

Mostre que $\big(T^2 - I\big) \circ (T - 3\,I) = 0$, onde I denota o operador identidade em $\mathbb{R}^3$.

Exercício 3. Sejam $T\,,S \in \mathcal{L}(V)$ tais que $S \circ T = T \circ S$. Mostre que

(a) $(T + S)^2 = T^2 + 2\,(T \circ S) + S^2$;

(b) $(T + S) \circ (T - S) = T^2 - S^2$.

Exercício 4. Sejam $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ e $S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ definidas por

$T(x\,,y) = (0\,,x\,,x - y)$, para $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$ e $S(x\,,y\,,z) = (x - y\,,x + 2\,y + 3\,z)$, para $(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3$.

Determine $(T \circ S)(x\,,y\,,z)$, para $(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3$.

Exercício 5. Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada por $T(x\,,y) = (y\,,x)$, para $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, determine $T^n(x\,,y)$, para $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercício 6. Determine todas as transformações lineares $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, tais que $T^2 = T$ e $T(x\,,y) = (a\,x\,,b\,x + c\,y)$, para $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercício 7.

(a) Determine a expressão da transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, tal que

$$T(1\,,0\,,0)=(2\,,0)\,,\quad T(0\,,1\,,0)=(1\,,1)\quad \text{e}\quad T(0\,,0\,,1)=(0\,,-1).$$

Encontre $v \in \mathbb{R}^3$, tal que $T(v)=(3\,,2)$.

(b) Determine uma transformação linear $T\colon \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \to M_{1\times 2}(\mathbb{R})$ tal que

$$T(p_o)=\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix},\quad T(p_1)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\quad \text{e}\quad T(p_2)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde

$$p_o(x)=1\,,\quad p_1(x)=x\,,\quad p_2(x)=x^2\,,\ \text{para } x\in\mathbb{R}\,.$$

(c) Determine uma transformação linear $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que

$$T(1\,,1\,,1)=(2\,,0\,,0\,,0)\,,\quad T(1\,,1\,,0)=(1\,,1\,,-1\,,1)\quad \text{e}\quad T(1\,,0\,,0)=(0\,,0\,,0\,,-1)\,.$$

Exercício 8. Seja $T\colon M_{2\times 1}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 1}(\mathbb{R})$, definida por

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ \text{para}\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\in M_{2\times 1}(\mathbb{R})\,.$$

(a) Mostre que a aplicação T é um operador linear em $M_{2\times 1}(\mathbb{R})$;

(b) Encontre todos os vetores $u \in \mathbb{R}^2$, tais que $T(u)=u$.

(c) Encontre todos os vetores $v \in \mathbb{R}^2$, tais que $T(v)=-v$.