Lista 7 - Coordenadas

Exercício 1. Determinar as coordenadas do vetor $u = (-1\,,8\,,5) \in \mathbb{R}^3$ em relação a cada uma das bases do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot)$ abaixo:

(i) base canônica do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot)$.

(ii) $\mathcal{B} = \{(0\,,0\,,1)\,,(0\,,1\,,1)\,,(1\,,1\,,1)\}$.

(iii) $\mathcal{C} = \{(1\,,2\,,1)\,,(0\,,3\,,2)\,,(1\,,1\,,4)\}$.

Exercício 2. Determinar as coordenadas do polinômio $p \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$, dado por

$$p(t) = 10 + t^2 + 2\,t^3\,, \text{ para } t \in \mathbb{R}$$

em relação as seguintes bases do espaço vetorial real $(\mathscr{P}_3(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$:

(i) base canônica do espaço vetorial real $(\mathscr{P}_3(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$.

(ii) $\mathcal{B} = \{q_0\,,q_1\,,q_2\,,q_3\}$, onde

$$q_0(t) = 1\,,\quad q_1(t) = 1 + t\,,\quad q_2(t) = 1 + t + t^2\,,\quad q_3(t) = 1 + t + t^2 + t^3\,, \text{ para } t \in \mathbb{R}\,.$$

(iii) $\mathcal{C} = \{r_0\,,r_1\,,r_2\,,r_3\}$, onde

$$r_0(t) = 4 + t\,,\quad r_1(t) = 2\,,\quad r_2(t) = 2 - t^2\,,\quad r_3(t) = t + t^3\,, \text{ para } t \in \mathbb{R}\,.$$

Exercício 3. Determinar as coordenadas do vetor $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -8 & 7 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ em relação as seguintes bases do espaço vetorial real $(M_2(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$:

(i) base canônica do espaço vetorial real $(M_2(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$.

(ii) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Exercício 4. Encontre uma base do espaço vetorial real $(M_2(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$ que contenha o conjunto

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Exercício 5. Verifique que a matriz das coordenadas de $p \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$, em relação à base $\mathcal{B} = \{p_0\,,p_1\,,p_2\,,\ldots,p_n\}$ do espaço vetorial real $(\mathscr{P}_n(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$, onde

$$p_0(x) = 1\,,\quad p_1(x) = x\,,\quad p_2(x) = x^2\,,\ \ldots,\ p_n(x) = x^n\,, \text{ para } x \in \mathbb{R}\,,$$

é

$$[p]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} p(0) \\ p'(0) \\ \dfrac{1}{2!}\,p''(0) \\ \vdots \\ \dfrac{1}{n!}\,p^{(n)}(0) \end{pmatrix},$$

sendo que $p^{(k)}(0)$ denota a k-ésima derivada do polinômio p, calculado em $x = 0$.

Exercício 6.

(a) Determinar as coordenadas do vetor $p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, em relação à base $\mathcal{B} = \{p_1\,,p_2\,,p_3\}$ do espaço vetorial real $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$, onde

$$p(x) = x^2\,,\quad p_1(x) = 1\,,\quad p_2(x) = 2 - x\,,\quad p_3(x) = 2 + x + x^2\,, \text{ para } x \in \mathbb{R}\,.$$

(b) Determinar as coordenadas do vetor $1 - 2\,i \in \mathbb{C}$, em relação à base $\mathcal{C} = \{\,1 - i\,,1 + i\,\}$ do espaço vetorial real $(\mathbb{C}\,,+\,,\cdot)$.