Lista 5 - Dependência Linear

Exercício 1. Sejam $M \neq O$ uma matriz simétrica e $N \neq O$ uma matriz anti-simétrica pertencentes ao espaço vetorial real $(M_3(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$. Mostre que as matrizes M e N são L.I. no espaço vetorial real $(M_3(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$.

Exercício 2. Determinar $m\,,n \in \mathbb{R}$, para que os subconjuntos de vetores do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot)$ dados abaixo, sejam L.I. .

(a) $\{(3\,,5\,m\,,1)\,,(2\,,0\,,4)\,,(1\,,m\,,3)\}$.

(b) $\{(1\,,3\,,5)\,,(2\,,m+1\,,10)\}$.

(c) $\{(m\,,2\,,n)\,,(3\,,m+n\,,m-1)\}$.

Exercício 3. Mostre que o conjunto de vetores $A \doteq \{q_1\,,q_2\,,q_3\,,q_4\}$ do espaço vetorial real $(\mathscr{P}_3(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$ é L.D. e que qualquer subconjunto do conjuto A, com três elementos é L.I. no espaço vetorial real $(\mathscr{P}_3(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$, onde

$$q_1(x) \doteq 1\,, \quad q_2(x) \doteq x\,, \quad q_3(x) \doteq x^2\,, \quad q_4(x) \doteq 2 + x + 2\,x^2\,, \text{ para } x \in \mathbb{R}\,.$$

Exercício 4. Mostrar que se o subconjunto de vetores $\{u\,,v\,,w\}$ do espaço vetorial real $(V\,,+\,,\cdot)$ for L.I., o mesmo acontecerá com o subconjunto $\{u+v\,,u+w\,,v+w\}$.

Exercício 5. Verifique, em cada um dos itens abaixo, se o subconjunto S do espaço vetorial $(V\,,+\,,\cdot)$ é L.I. ou L.D. .

(a) $S \doteq \{(1\,,2)\,,(-3\,,1)\}$ e $V \doteq \mathbb{R}^2$, munido das operações usuais.

(b) $S \doteq \{p\,,q\}$ e $V \doteq \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, munido das operações usuais, onde

$$p(t) \doteq 1 + t - t^2\,, \quad q(t) \doteq 2 + 5\,t - 9\,t^2\,, \text{ para } t \in \mathbb{R}\,.$$

(c) $S \doteq \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, $V \doteq M_2(\mathbb{R})$, munido das operações usuais.

(d) $S \doteq \{(1\,,2\,,2\,,-3)\,,(-1\,,4\,,-2\,,0)\}$ e $V \doteq \mathbb{R}^4$, munido das operações usuais

(e) $S \doteq \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ e $V \doteq M_3(\mathbb{R})$, munido das operações usuais.

(f) $S \doteq \{f\,,g\,,h\}$ e $V \doteq C^\infty(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$, munido das operações usuais, onde

$$f(x) \doteq 1\,, \quad g(x) \doteq \operatorname{sen}(x)\,, \quad h(x) \doteq \cos(x)\,, \text{ para } x \in \mathbb{R}\,.$$

(g) $S \doteq \{f\,,g\,,h\}$ e $V \doteq C^\infty(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$, munido das operações usuais, onde

$$f(x) \doteq 1\,, \quad g(x) \doteq \operatorname{sen}^2(x)\,, \quad h(x) \doteq \cos^2(x)\,, \text{ para } x \in \mathbb{R}\,.$$

(h) $S \doteq \{f\,,g\}$ e $V \doteq C^\infty(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$, munido das operações usuais, onde

$$f(x) \doteq e^x\,, \quad g(x) \doteq e^{-x}\,, \text{ para } x \in \mathbb{R}\,.$$

Exercício 6. Seja $S \doteq \{u\,,v\,,w\}$ um conjunto L.I. no espaço vetorial real $(V\,,+\,,\cdot)$. Verifique se os conjuntos abaixo são L.I. ou L.D., justificando a resposta.

(a) $S_1 \doteq \{u\,,u+v\,,u+v+w\}$.

(b) $S_2 \doteq \{u-v\,,v-w\,,w-u\}$.

(c) $S_3 \doteq \{u+v\,,u+v+w\,,w\}$.

Exercício 7. Sejam $f\,,g \in C^1((a\,,b)\,;\mathbb{R})$. Mostre que, se existir $x_o \in (a\,,b)$, tal que

$$f(x_o)\,g'(x_o) \neq f'(x_o)\,g(x_o)\,,$$

então as funções f e g são L.I. no espaço vetorial real $(C^1((a\,,b)\,;\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$.

Exercício 8. Sejam $u_1 \doteq (1\,,3\,,5)$ e $u_2 \doteq (2\,,4\,,-3)$ vetores do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot)$. Determine os valores de $k \in \mathbb{R}$, para os quais o vetor $v \doteq (2\,,7\,,k)$ possa ser escrito como combinação linear dos vetores u_1 e u_2.

Exercício 9. Sejam $A \in M_n(\mathbb{R})$ e $u_1, u_2, \ldots, u_r$ vetores pertencentes ao espaço vetorial real $(M_{n\times 1}(\mathbb{R}), +, \cdot)$. Mostre que, se os vetores coluna $A\,u_1, Au_2, \cdots, Au_r$ são vetores L.I. , então os vetores $u_1, u_2, \cdots, u_r$ também serão L.I. no espaço vetorial real $(M_{n\times 1}(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Exercício 10. Seja $(V, +, \cdot)$ o espaço vetorial real formado pelas funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Mostre que os vetores $f, g, h \in V$ são L.I., onde

$$f(t) \doteq \operatorname{sen}(t), \quad g(t) \doteq \cos(t), \quad \text{e} \quad h(t) = t, \text{ para } t \in \mathbb{R}.$$