Lista 4 - Subespaços gerados

Exercício 1. Para cada um dos subconjuntos $S \subseteq V$, onde $(V\,,+\,,\cdot)$ é o espaço vetorial indicado, encontrar o subespaço gerado por S, isto é, $[S]$.

(a) $S \doteq \{(1\,,0)\,,(2\,,-1)\}$ e $V \doteq \mathbb{R}^2$, munido das operações usuais.

(b) $S \doteq \{(1\,,1\,,1)\,,(2\,,2\,,0)\}$ e $V \doteq \mathbb{R}^3$, munido das operações usuais.

(c) $S \doteq \{p_o\,,p_1\,,p_2\,,p_3\}$ e $V \doteq \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$, munido das operações usuais, onde

$$p_o(t) \doteq 1\,,\quad p_1(t) \doteq t\,,\quad p_2(t) \doteq t^2 \quad \text{e} \quad p_3(t) \doteq 1+t^3\,,\ \text{para } t \in \mathbb{R}\,.$$

(d) $S \doteq \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ e $V \doteq M_2(\mathbb{R})$, munido das operações usuais.

Exercício 2. Mostrar que os conjuntos $\{f_1\,,f_2\,,f_3\}$ e $\{g_1\,,g_2\,,g_3\}$ geram o mesmo subespaço vetorial do espaço vetorial $(C(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$, onde

$$f_1(t) \doteq \operatorname{sen}^2(t)\,,\quad f_2(t) \doteq \cos^2(t)\,,\quad f_3(t) \doteq \operatorname{sen}(t)\cos(t)\,,\ \text{para } t \in \mathbb{R}$$

e

$$g_1(t) \doteq 1\,,\quad g_2(t) \doteq \operatorname{sen}(2\,t)\,,\quad g_3(t) \doteq \cos(2\,t)\,,\ \text{para } t \in \mathbb{R}\,.$$

Exercício 3. Sabemos que o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$, munido das operações usuais de adição de números complexos e multiplicação de número real por número complexo, é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

(a) Mostre que os números complexos $z_1 \doteq 2+3\,i$ e $z_2 \doteq 1-2\,i$, geram o espaço vetorial **real** $(\mathbb{C}\,,+\,,\cdot)$.

(b) Mostre que o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$, munido das operações usuais de adição de números complexos e multiplicação de números complexos, é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$.

(c) Mostre que o número complexo $z_1 \doteq 1$, gera o espaço vetorial **complexo** $(\mathbb{C}\,,+\,,\cdot)$.

Exercício 4. Verificar se as seguintes matrizes $A_1\,,A_2\,,A_3\,,A_4$, geram o espaço vetorial $(M_2(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$, onde:

$$A_1 \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 \doteq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 \doteq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercício 5. Mostre que os polinômios $p_1\,,p_2\,,p_3\,,p_4$ geram o espaço vetorial real $(\mathscr{P}_3(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$, onde:

$$p_1(x) \doteq 1\,,\quad p_2(x) \doteq 1-x\,,\quad p_3(x) \doteq (1-x)^2\,,\quad p_4(x) \doteq (1-x)^3\,,\ \text{para } x \in \mathbb{R}\,.$$

Exercício 6. Considere os seguintes vetores do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot)$

$$u_1 \doteq (-1\,,0\,,1),\quad u_2 \doteq (3\,,4\,,-2).$$

Determine um sistema de equações lineares homogêneas para o qual o conjunto solução seja exatamente, o subespaço gerado pelos vetores $u_1\,,u_2$.

Exercício 7. Determine os geradores para cada um dos seguintes subespaços do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot)$:

(a) $U \doteq \{\,(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x-2\,y=0\,\}$. Represente-o geometricamente.

(b) $V \doteq \{\,(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x+z=0 \text{ e } x-2\,y=0\,\}$. Represente-o geometricamente.

(c) $W \doteq \{\,(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x+2\,y-3\,z=0\,\}$. Represente-o geometricamente.

(d) $U \cap V$. Represente-o geometricamente.

(e) $V + W$. Represente-o geometricamente.

Exercício 8. Em cada um dos itens abaixo encontrar um subconjunto S, finito, que gere o subespaço vetorial W do espaço vetorial $(V\,,+\,,\cdot)$ indicado.

(a) $W \doteq \{(x\,,y\,,z) \in V\,;\, x - 2\,y = 0\}$ e $V \doteq \mathbb{R}^3$, munido das operações usuais.

(b) $W \doteq \{p \in V\,;\, p'(t) = 0\,,\ \text{para } t \in \mathbb{R}\}$ e $V \doteq \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$, munido das operações usuais.

(c) $W \doteq \{A \in V\,;\, A^t = A\}$ e $V \doteq M_2(\mathbb{R})$, munido das operações usuais.

(d) Sejam $A \doteq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $W \doteq \{X \in V\,;\, A\,X = 0\}$ e $V \doteq M_{3\times 1}(\mathbb{R})$, munido das operações usuais.

Exercício 9. Encontrar, em cada um dos itens abaixo, o subconjunto S do espaço vetorial real $(V\,,+\,,\cdot)$, que geram os subespaços vetoriais U, W, $U \cap W$ e $U + W$.

(a) $U \doteq [(1\,,0\,,0)\,,(1\,,1\,,1)]$, $W \doteq [(0\,,1\,,0)\,,(0\,,0\,,1)]$ e $V \doteq \mathbb{R}^3$, munido das operações usuais.

(b) $U \doteq \left\{(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x + y = 0\right\}$, $W \doteq [(1\,,3\,,0)\,,(0\,,4\,,6)]$ e $V \doteq \mathbb{R}^3$, munido das operações usuais.

(c) $U \doteq \{A \in M_2(\mathbb{R})\,;\, A^t = A\}$, $W \doteq \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$ e $V = M_2(\mathbb{R})$, munido das operações usuais.

(d) $U = [p\,,q\,,r]$, $W \doteq [s\,,u\,,v]$ e $V \doteq \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$, munido das operações usuais, onde

$$p(t) \doteq t^3 + 4t^2 - t + 3\,, \quad q(t) \doteq t^3 + 5t^2 + 5\,, \quad r(t) \doteq 3t^3\,,\ \text{para } t \in \mathbb{R}$$

e

$$s(t) \doteq t^3 + 4t^2\,, \quad u(t) \doteq t - 1\,, \quad v(t) \doteq 1\,,\ \text{para } t \in \mathbb{R}\,.$$

Exercício 10. Obtenha o subconjunto formado por vetores do espaço vetorial real $(\mathscr{P}_3(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$, que geram os seguintes subespaços:

(a) $U \doteq \{p \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})\,;\, p(1) = p(0) = 0\}$;

(b) $W \doteq \{p \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})\,;\, p''(t) = 0\,,\ \text{para todo } t \in \mathbb{R}\}$;

(c) $U \cap W$.

Exercício 11. Seja $(V\,,+\,,\cdot)$ o espaço vetorial formado pelas funções reais, de uma variável real (isto é, $V \doteq \mathcal{F}(\mathbb{R})$).

Mostre que $f, g \in [u, v] \subseteq V$ onde

$$f(x) \doteq 1\,, \quad g(x) \doteq \cos(2\,x)\,, \quad u(x) \doteq \operatorname{sen}^2(x)\,, \quad v(x) \doteq \cos^2(x)\,,\ \text{para } x \in \mathbb{R}\,.$$

Exercício 12. Verifique se o espaço vetorial real $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$ é gerado pelo conjunto $S \doteq \{p\,,q\,,r\}$, onde:

$$p(x) \doteq 1 + x\,, \quad q(x) \doteq x + 2\,x^2 \quad \text{e} \quad r(x) \doteq 1 - x^2\,,\ \text{para } x \in \mathbb{R}\,.$$