Lista 3 - Soma Direta

Exercício 1. Defina $V_p \doteq \{ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\, f$ é uma função par$\}$ e $V_i \doteq \{ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\, f$ é uma função ímpar$\}$.

(a) Mostre que V_p e V_i são subespaços vetorias do espaço vetorial real $(\mathcal{F}(\mathbb{R})\,, +\,, \cdot)$.

(b) Mostre que $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = V_p \oplus V_i$.

Exercício 2. Verifique, em cada um dos itens abaixo, se $V = U \oplus W$.

(a) $V \doteq \mathbb{R}^2$, munido das operações usuais, $U \doteq \left\{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, 2\,x + 3\,y = 0\right\}$ e $W \doteq \left\{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x - y = 0\right\}$.

(b) $V \doteq M_3(\mathbb{R})$, munido das operações usuais, $U \doteq \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix} \,;\; a\,,b\,,c\,,d \in \mathbb{R} \right\}$ e

$W \doteq \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & e \\ f & g & 0 \\ h & i & 0 \end{pmatrix} \,;\; e\,,f\,,g\,,h\,,i \in \mathbb{R} \right\}$.

(c) $V \doteq \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$, munido das operações usuais, $U \doteq \{p \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})\,;\, p(1) = p(0) = 0\}$ e $W \doteq \{q \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})\,;\, q\,'(t) = 0\,,$ para todo $t \in \mathbb{R}\}$.

Exercício 3. Em cada um dos itens abaixo, dado U subespaço vetorial do espaço vetorial $(V\,, +\,, \cdot)$, encontre um subespaço suplementar do subespaço vetorial U (isto é, um subespaço vetorial W, do espaço vetorial $(V\,, +\,, \cdot)$, tal que $V = U \oplus W$).

(a) $V \doteq \mathbb{R}^3$, munido das operações usuais, $U \doteq \{(x\,,y\,,0)\,;\, x\,,y \in \mathbb{R}\}$.

(b) $V \doteq \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$, munido das operações usuais, $U \doteq \{p \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})\,;\, p\,''(t) = 0\,,$ para todo $t \in \mathbb{R}\}$.

(c) $V \doteq M_3(\mathbb{R})$, munido das operações usuais, $U \doteq \{A \in M_3(\mathbb{R})\,;\, A^t = A\}$.

(d) Sejam $A \doteq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $V \doteq M_{2\times 1}(\mathbb{R})$, munido das operações usuais, $U \doteq \{X \in M_{2\times 1}(\mathbb{R})\,;\, A\,X = 0\}$.

Exercício 4. Sejam $U \doteq \{\,(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x = z\}$, $V \doteq \{\,(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x = y = 0\}$ e $W \doteq \{\,(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x + y + z = 0\}$.

(a) Mostre que os conjuntos U, V e W são subespaços vetoriais do espaço vetorial $(\mathbb{R}^3\,, +\,, \cdot)$.

(b) Mostre que $U + V = \mathbb{R}^3$, $U + W = \mathbb{R}^3$ e $W + V = \mathbb{R}^3$. Em algum destes casos a soma é direta? Justique sua resposta.

Exercício 5.

(a) Mostre que o subconjunto de $M_n(\mathbb{R})$ formado pelas matrizes anti-simétricas é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $(M_n(\mathbb{R})\,, +\,, \cdot)$.

(b) Mostre que o subconjunto de $M_n(\mathbb{R})$ formado pelas matrizes simétricas é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $(M_n(\mathbb{R})\,, +\,, \cdot)$.

(c) Mostre que o espaço vetorial real $(M_n(\mathbb{R})\,, +\,, \cdot)$ é soma direta dos subespaços vetoriais formado pelas matrizes simétricas e anti-simétricas.