Notas de Aula de SMA304
Álgebra Linear
(baseada na Apostila do Prof. Zani)

Wagner Vieira Leite Nunes
Departamento de Matemática
ICMC – USP

agosto de 2015

Sumário

Capítulo 1

Avisos Gerais sobre a Disciplina

4.08.2015 - 1.a

1.1 Professores que ministrarão a disciplina

Os professores que minstrarão a disciplina SMA304-Álgebra Linear, são:

- Wagner Vieira Leite Nunes (coordenador) - Turma 1 (Matemática e Mat. Aplicada)
- Carlos Henrique Grossi Ferreira - Turma 6 (Eng. Mecatrônica)
- Daniel Levcovitz - Turma 4 (Eng. Elétrica-Automação)
- Miguel V. S. Frasson - Turma 9 (Física Computacional)
- Miriam Garcia Manoel
  - Turma 3 (Eng. Elétrica-Eletrônica)
  - Turma 5 (Eng. Mecânica)
- Igor Mencattini
  - Turma 2 (Eng. Computação)
  - Turma 7 (Eng. Aeronáutica)
- Victor Hugo Jorge Pérez - Turma 8 (Física)

1.2 Páginas da disciplina na web

As páginas da disciplina SMA304-Álgebra Linear serão:

www.icmc.usp.br/pessoas/wvlnunes/sma304/sma304.html

1.3 Endereços de email

O endereço dos emails dos professores, que ministrarão a disciplina SMA304-Álgebra Linear são:

- Wagner Vieira Leite Nunes (coordenador) - wvlnunes@icmc.usp.br
- Carlos Henrique Grossi Ferreira - grossi@icmc.usp.br
- Daniel Levcovitz - lev@icmc.usp.br
- Miguel V. S. Frasson - frasson@icmc.usp.br
- Miriam Garcia Manoel - miriam@icmc.usp.br
- Igor Mencattini - igorre@icmc.usp.br
- Victor Hugo Jorge Pérez - vhjperez@icmc.usp.br

1.4 Salas no ICMC

As salas do professores no ICMC, que ministrarão a disciplina SMA304-Álgebra Linear são:

- Wagner Vieira Leite Nunes (coordenador) - 3-128 (ICMC)
- Carlos Henrique Grossi Ferreira - 3-163 (ICMC)
- Daniel Levcovitz - 4-116 (ICMC)
- Miguel V. S. Frasson - 4-224 (ICMC)
- Miriam Garcia Manoel - 4-215 (ICMC)
- Igor Mencattini - 3-106 (ICMC)
- Victor Hugo Jorge Pérez - 3-234 (ICMC)

1.5 Telefones / Ramais

O telefone/ramal das salas do professores no ICMC, que minstrarão a disciplina SMA304-Álgebra Linear são:

- Wagner Vieira Leite Nunes (coordenador) - (33) 73-9745
- Carlos Henrique Grossi Ferreira - (33) 73-6622
- Daniel Levcovitz - (33) 73-9753
- Miguel V. S. Frasson - (33) 73-6617

- Miriam Garcia Manoel - (33) 73-9714
- Igor Mencattini - (33) 73-9720
- Victor Hugo Jorge Pérez - (33) 73-8629

1.6 Horário das aulas

Os horários e locais das aulas da disciplina SMA304-Álgebra Linear são:

- **Wagner:** Matemática e Matemática Aplicada - Turma 1
  - 3.as e 5.as-feiras, das 10:10 às 11:50, na sala 4-001, do ICMC
- **Grossi:** Engenharia Mecatrônica - Turma 6
  - 3.as e 5.as-feiras, das 10:10 às 11:50, na sala ??, do ??
- **Daniel:** Engenharia Elétrica - Automação
  - 2.as e 4.as-feiras, das 8:10 às 9:50, na sala B7 e C1, da EESC, respectivamente
- **Miguel:** Física Computacional - Turma 9
  - 3.as e 6.as-feiras, das 8:10 às 9:50, na Anfiteatro Novo, do IFSC
- **Miriam:**
  - Engenharia Mecânica - Turma 5
    3.as e 5.as-feiras, das 8:10 às 9:50, na sala C3, da EESC
  - Engenharia Elétrica - Eletrônica - Turma 3
    3.as e 5.as-feiras, das 10:10 às 11:50, nas salas C1 e D8, da EESC, respectivamente
- **Igor**
  - Engenharia Aeronáutica - Turma 7
    3.as e 5.as-feiras, das 10:10 às 11:50, na sala ??, do ??
  - Engenharia de Computação - Turma 2
    - 3.as das 14:20 às 16:00 e 5.as-feiras, das 8:10 às 9:50, na sala ??, do ??
- **Vitor** Física - Turma 8
  - 3.as e 5.as-feiras, das 10:10 às 11:50, na Anfiteatro Verde, do IFSC

Outras informações podem ser obtidas nos seguintes endereços da web:

www.icmc.usp.br/pessoas/wvlnunes/sma304/sma304.html

1.7 Ementa da disciplina

A ementa da disciplina SMA304-Álgebra Linear é:

1. Espaços vetoriais reais e complexos.
2. Dependência linear.
3. Base.
4. Dimensão.
5. Subespaços.
6. Soma direta.
7. Transformações lineares.
8. Núcleo e imagem.
9. Isomorfismo.
10. Matriz de uma transformação linear.
11. Autovalores e autovetores.
12. subespaços invariantes.
13. Diadonalização de operadores.
14. Forma canônica de Jordan.
15. Espaços com produto interno.
16. Ortogonalidade.
17. Isometrias.
18. Operadores auto-adjuntos.

Outras informações podem ser obtidas nos seguintes endereços da web:

www.icmc.usp.br/pessoas/wvlnunes/sma304/ementa304.html

1.8 Bilbiografia da disciplina

Os livros sugeridos para texto e/ou consulta são:

- Callioli, C.A. & Domingues, H.H & Costa, R.C.F. - Álgebra Linear e Aplicações, Sâo Paulo, Atual, 1983.
- Zani, S. - Álgebra Linear, Notas de Aula do ICMC, USP.
- Boldrini,J.L & Costa, S.I.R & Figueiredo, V.L & Wetzler, H.G.- ÁLgebra Linear, São Paulo, Harper-Row, 1980.
- Lay, D. - Linear Algebra and Its Applications, Reading, Mass, Addison-Wesley, 1997.

Outras informações podem ser obtidas nos seguintes endereços da web:

www.icmc.usp.br/pessoas/wvlnunes/sma304/bibliografia304.html

1.9 Notas de aula

No endereço

www.icmc.usp.br/pessoas/wvlnunes/sma304/notas304.html

estarão disponíveis as notas de aula relativas ao conteúdo desenvolvido pelo professor Wagner em sala de aula.

As notas de aula serão atualizadas semanalmente.

1.10 Horários de monitoria da disciplina

Os monitores da disciplina SMA304 - Álgebra Linear, excetuando-se a **Turma 1**, serão:

- Alex Freitas de Campos - alex.freitas.campos@usp.br (Voluntário)
- Dione Andrade Lara - dione@icmc.usp.br (PAE)
- Ian Rodrigues Duléba - ian.duleba@usp.br (Voluntário)
- João Vitor Ignácio Costa - joao.ignacio.costa@usp.br (Monitor pelo PEEG)
- José Fernando B. Boro - jfbarbosa.boro@gmail.com (Monitor pelo SMA)
- Leandro Nery de Oliveira - leandroner@gmail.com (PAE)

O monitor da **Turma 1** será:

1. Victor Simões Barbosa - victorrsb@gmail.com (PAE)

Todos os monitores ministrarão aulas de exercícios e plantão de dúvidas semanalmente.

Os dias, horários e locais das monitorias da da disciplina SMA304 - Álgebra Linear, excetuando-se a **Turma 1**, serão:

- Para os plantões:
  - 2.as, 3.as, 4.as, 5.as-feiras, das 19:00 às 21:00, na sala 3-012 do ICMC

- Para as aulas de exercícios de todas as turma, **excetuando-se a Turma 1**:
  - 2.as e 3.as-feiras, das 19:00 às 21:00, na sala C2 da EESC
  - 4.as e 5.as-feiras, das 19:00 às 21:00, na sala C3 da EESC

Os dias, horários e locais das monitorias da disciplina SMA304 - Álgebra Linear para a **Turma 1**, serão:

- Para as aulas de exercícios para a **Turma 1**:
  - 2.as-feiras, das 16:00 às 18:00, na sala C2 do ICMC

- Para os plantões:
  - 4.as-feiras, das 19:00 às 21:00, na sala 3-012 do ICMC

Outras informações podem ser obtidas nos seguintes endereços da web:

www.icmc.usp.br/pessoas/wvlnunes/sma304/monitores304.html

1.11 Horários de atendimentos dos docentes da disciplina

Os horários de atendimentos dos docentes da disciplina SMA304-Álgebra Linear são:

- Wagner (coordenador) - 3.as-feiras das 16:00 às 18:00 na sala do professor
- Carlos Grossi - ?.as-feiras das ??:?? às ??:?? na sala do professor
- Daniel - 4.as-feiras das 12:30 às 14:30 na sala do professor
- Miguel - ?.as-feiras das ??:?? às ??:?? na sala do professor
- Miriam - 6.as-feiras das 14:00 às 16:00 na sala do professor
- Igor - ?.as-feiras das ??:?? às ??:?? na sala do professor
- Vitor - 5.as-feiras das 16:00 às 18:00 na sala do professor

Outras informações podem ser obtidas no seguinte endereço da web:

www.icmc.usp.br/pessoas/wvlnunes/sma304/atendimento304.html

1.12 Listas de exercícios da disciplina

As listas de exercícios da disciplina SMA304-Álgebra Linear podem ser encontradas nas seguintes páginas da web:

www.icmc.usp.br/pessoas/wvlnunes/sma304/exercicios304.html

1.13 Freqüência na disciplina

Uma condição necesssária (mas não suficiente) para o aluno ser aprovado na disciplina ministrada pelo professor Wagner, é que sua frequência na disciplina, que denotaremos por F, seja maior ou igual a $\underline{70\%}$.

A lista de presença da disciplina ministrada pelo professor Wagner será controlada.

Só serão aceitas **ASSINATURAS** ou **NOME COMPLETO POR EXTENSO** na lista de presença.

Qualquer outro modo **NÃO** será aceito e será colocado falta na lista de presença.

1.14 Critério de avaliação e aprovação da disciplina

A avaliação da disciplina SMA304-Álgebra Liear, constará de duas provas, a primeira prova, que será denotada P_1, valendo $\frac{2}{5}$ da nota final, a segunda prova, que será denotada P_2, valendo $\frac{3}{5}$ da nota final, ou seja, a média final, que denotaremos por MF, será dada pela seguinte fórmula:

$$MF \doteq \frac{2 * P_1 + 3 * P_2}{5}.$$

Para ser considerado aprovado na disciplina SMA304-Álgebra Linear, a média do aluno na disciplina deverá ser maior ou igual a $5,0$ e sua frequência ser maior ou igual a 70%, ou seja:

$$5.0 \leq MF \quad \text{e} \quad 70\% \leq F.$$

Outras informações sobre os dois itens acima podem ser encontradas nos seguintes endereços da web:

www.icmc.usp.br/pessoas/wvlnunes/sma304/criterio304.html

1.15 Prova substitutiva da disciplina

O aluno que **não** obtiver média maior ou igual a 5.0 após as duas provas P_1 e P_2, poderá se submeter a, assim denominada, **prova substitutiva** cujo valor denotaremos por PS.

A nota desta prova substituirá uma das duas notas das provas iniciais (a saber, P_1 ou P_2), com os respectivo peso, isto é,

$$MF_1 \doteq \frac{2 * PS + 3 * P_2}{5} \qquad \text{ou} \qquad MF_2 \doteq \frac{2 * P_1 + 3 * PS}{5},$$

para que o aluno obtenha o maior valor entre os dois valores acima.

Caso
$$5.0 \leq \max\{MF_1, MF_2\},$$
a média final do aluno será
$$MF = 5.0,$$
caso contrário, a média final será
$$MF = \max\{MF_1, MF_2\}.$$

SOMENTE poderá fazer a prova substitutiva o aluno que tem média, nas duas primeiras provas, menor que 5.0.

Para ser considerado aprovado na disciplina SMA304-Álgebra Linear, a média do aluno na disciplina, após a prova substitutiva, deverá ser maior ou igual a $5,0$ e sua frequência ser maior ou igual a 70%, ou seja:
$$5.0 \leq MF \quad \text{e} \quad 70\% \leq F.$$

Observação 1.1 *O conteúdo da prova substitutiva será todo o conteúdo desenvolvido durante a disciplina.*

Outras informações sobre o item acima podem ser encontradas nos seguintes endereços da web:

www.icmc.usp.br/pessoas/wvlnunes/sma304/criterio304.html

1.16 Prova de recuperação da disciplina

Os alunos que obtiverem média maior ou igual a 3.0 e menor que 5.0 e frequência maior ou igual a 70%, ou seja,
$$3.0 \leq MF < 5.0 \quad \text{e} \quad 70\% \leq F,$$
poderão se submeter a uma última avaliação, denominada **prova de recuperação**, cujo valor será indicado por PR.

O aluno, na situação acima, que obtiver nota, na prova de recuperação, maior ou igual a $5,0$ será considerado aprovado na disciplina, ou seja, se
$$5,0 \leq PR.$$

Na situação acima, a média do aluno, após a prova de recuperação, que indicaremos por MR, será obtida da seguinte forma:
$$MR \doteq \begin{cases} 5.0\,, & \text{se} \quad \dfrac{MF+PR}{2} \leq 5,0 \\[2ex] \dfrac{MF+PR}{2}\,, & \text{se} \quad \dfrac{MF+PR}{2} > 5.0 \end{cases}.$$

Observação 1.2 *O conteúdo da prova de recuperação será todo o conteúdo desenvolvido durante a disciplina.*

Outras informações sobre o item acima podem ser encontradas no seguinte endereço da web:

www.icmc.usp.br/pessoas/wvlnunes/sma304/criterio304.html

1.17 Datas das provas, prova substitutiva e de recuperação da disciplina

As datas das provas da disciplina SMA304-Álgebra Linear serão:

- **1.a Prova:** **Turma do:**

  prof. Daniel - 5/10 - 2.a-feira - nova data

  dos profs. Wagner, Miriam, Grossi, Igor e Vitor - 29/09 - 3.a-feira

  prof. Miguel - 25/09 - 6.a-feira - nova data

- **2.a Prova:** **Turma do:**

  prof. Daniel - 25/11 - 4.a-feira

  dos profs. Wagner, Miguel, Miriam, Grossi, Igor e Vitor - 24/11 - 3.a-feira

- **Prova Substitutiva:** **Turma do:**

  prof. Daniel - 2/12 - 4.a-feira

  dos profs. Wagner, Miguel, Miriam, Grossi, Igor e Vitor - 1/12 - 3.a-feira

- **Prova Recuperação:**

  Será marcada após a finalização das aulas da disciplina.

Outras informações sobre os itens acima podem ser encontradas nos seguintes endereços da web:

www.icmc.usp.br/pessoas/wvlnunes/sma304/datas304.html

1.18 Gabaritos das provas da disciplina

Os gabaritos das provas da disciplina SMA304-Álgebra Linear, que serão aplicadas durante o desenvolvimento da mesma, estarão à disposição dos alunos, logo após as mesmas terem sido aplicadas, e se encontrarão nos seguintes endereços da web:

www.icmc.usp.br/pessoas/wvlnunes/sma304/gabaritos304.html

1.19 Trancamento da disciplina

A data máxima para o trancamento da disciplina é **22 de setembro de 2015**.

Procure a seção de graduação da sua unidade para maiores esclarecimentos de como proceder o trancamento.

1.20 Números de aulas

O número total de aulas a serem ministradas pelo professor serão de **34** aulas, sendo que **3** destas serão destinadas às avaliações.

1.21 Calendário USP

O início do semestre será no dia 8 de agosto de 2015 e o término do mesmo será no dia 8 de dezembro de 2015.

Não haverá atividade nos seguintes dias/semana:

- 15 de agosto
- 7 à 12 de setembro
- 12 de outubro
- 28 de outubro
- 2 de novembro
- 4 de novembro
- 15 de novembro

1.22 Observações finais

Capítulo 2

Introdução

Estas notas de aula serão utilizadas para as disciplinas cujas ementas tratam de espaços vetoriais reais e complexos de dimensão finita, transformações lineares e aplicações.

Serão exibidos todos os conceitos relacionados com o conteúdo acima, bem como propriedades e aplicações dos mesmos.

As referências (ver [CDC]) ao final das notas poderão servir como material importante para o entendimento do conteúdo aqui desenvolvido.

Capítulo 3

Espaços Vetoriais

6.08.2015 - 2.a

3.1 Introdução e Exemplos

Neste capítulo introduziremos o conceito de espaço vetorial real que será utilizado em todo o decorrer do curso.

Porém, antes de apresentarmos a definição de espaço vetorial real, passaremos a analisar em paralelo dois objetos, a saber, o conjunto formado pelas funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que será denotado por $\mathscr{F}(\mathbb{R}\,;\,\mathbb{R})$, ou seja,

$$\mathscr{F}(\mathbb{R}\,;\,\mathbb{R}) \doteq \{f\,;\; f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ é uma função}\}$$

e o conjunto das matrizes quadradas de ordem $\underline{n}$, com coeficientes reais, que denotaremos por $M_n(\mathbb{R})$, ou simplesmente, por M_n.

A soma de duas funções f e g de $\mathscr{F}(\mathbb{R}\,;\,\mathbb{R})$ é definida como sendo a função $(f+g) \in \mathscr{F}(\mathbb{R}\,;\,\mathbb{R})$ dada por

$$(f+g)(x) \doteq f(x) + g(x)\,, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Note também que se $\lambda \in \mathbb{R}$, que chamaremos de escalar, podemos multiplicar a função f pelo escalar λ, da seguinte forma

$$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda\,[f(x)]\,, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

resultando num elemento de $\mathscr{F}(\mathbb{R}\,;\,\mathbb{R})$.

Com relação a $M_n(\mathbb{R})$, podemos definir a soma de duas matrizes quadradas de ordem $\underline{n}$, $A \doteq (a_{ij})_{n\times n}$ e $B \doteq (b_{ij})_{n\times n}$, como

$$A + B \doteq (a_{ij} + b_{ij})_{n\times n}\ ,$$

ou seja, somando-se as correspondentes entradas das matizes, e esta soma resiltará em um elemento de $M_n(\mathbb{R})$.

Com a relação à multiplicação de uma matriz quadrada de ordem $\underline{n}$, $A \doteq (a_{ij})_{n\times n}$, por um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos

$$\lambda \cdot A \doteq (\lambda\, a_{ij})_{n\times n}\,,$$

ou seja, multiplicando-se por λ, cada entrada da matriz A, o que também resultará em um elemento de $M_n(\mathbb{R})$.

O que estes dois conjuntos acima, munidos das respectivas operações de adições de elementos dos conjuntos e das respectivas multiplica ções de seus elementos por escalares, têm comum? Vejamos:

Verifica-se facilmente a partir das propriedades dos números reais que, para quaisquer funções $f, g, h \in \mathscr{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ e para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, são válidas as seguintes propriedades:

1. $f + g = g + f$;
2. $f + (g + h) = (f + g) + h$;
3. se $\mathscr{O} \in \mathscr{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, representa o função nula, isto é,
$$\mathscr{O}(x) \doteq 0\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,,$$
então teremos
$$\mathscr{O} + f = f\,;$$
4. a função $-f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ definida por
$$(-f)(x) \doteq -[f(x)]\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,,$$
satisfaz
$$f + (-f) = \mathscr{O}\,;$$
5. $\lambda \cdot (\mu \cdot f) = (\lambda\, \mu) \cdot f$;
6. $(\lambda + \mu) \cdot f = \lambda \cdot f + \mu \cdot f$;
7. $\lambda \cdot (f + g) = \lambda \cdot f + \lambda \cdot g$;
8. $1 \cdot f = f$.

Por outro lado, para quaisquer matrizes $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ e para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, também são válidas as seguintes propriedades:

1. $A + B = B + A$;
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$;
3. se $O \in M_n(\mathbb{R})$ representa a matriz nula, isto é,
$$O \doteq (0)_{n\times n}\,,$$
então teremos
$$O + A = A\,;$$

4. se $A \doteq (a_{ij})_{n\times n}$, então a matriz $-A \in M_n(\mathbb{R})$, definida por
$$-A \doteq (-a_{ij})_{n\times n}\,,$$
satisfaz
$$A + (-A) = O\,;$$

5. $\lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda\,\mu) \cdot A$;

6. $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$;

7. $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$;

8. $1 \cdot A = A$.

Podemos ver que tanto o conjuntos das funções definidas na reta, a valores reais, como o conjunto das matrizes quadradas de ordem n, quando munidos das respectivas adições de elementos dos correspondentes conjunto e as respectivas multiplicações por escalares correspondentes, apresentam *propriedades algébricas* comuns.

Na verdade muitos outros conjuntos munidos de operações apropriadas apresentam propriedades semelhantes às apresentadas acima.

É por isso que, ao invés de estudarmos cada um desses modelos separadamente, estudaremos um conjunto arbitrário e não vazio, que indicaremos por V, sobre o qual supomos estar definidas uma operação de adição, isto é, para cada $u\,,v \in V$, existe um único elemento do conjunto V associado, chamado a *soma de u com v* e denotado por $u + v$, e uma multiplicação por escalar, isto é, para cada $u \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, existe um único elemento do conjunto V associado, chamado de *produto de u, pelo escalar λ* e denotado por $\lambda \cdot u$.

Mais precsimante, temos a:

Definição 3.1 *Um conjunto V, não vazio, munido de uma "operação de adição", isto é,*
$$+ : V \times V \to V$$
e de uma "operação de multiplicação por escalar", ou seja,
$$\cdot\ : \mathbb{R} \times V \to V$$
será denominado **espaço vetorial real (ou sobre $\mathbb{R}$)**, *se são válidas as seguintes propriedades:*

(EV1) *(Comutativa)*
$$u + v = v + u\,, \tag{3.1}$$
para cada $u\,,v \in V$;

(EV2) *(Associativa)*
$$u + (v + w) = (u + v) + w\,, \tag{3.2}$$
para cada $u\,,v\,,w \in V$;

(EV3) *(Existência do elemento neutro) podemos encontrar um elemento* $O \in V$*, tal que*

$$O + u = u\,, \tag{3.3}$$

para cada $u \in V$ *;*

(EV4) *(Existência do elemento oposto) para cada* $u \in V$*, podemos encontrar* $v \in V$*, de modo que*

$$u + v = O\,; \tag{3.4}$$

(EV5) *(Associativa da multiplicação)*

$$\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\,\mu) \cdot u\,, \tag{3.5}$$

para cada $u \in V$ *e* $\lambda\,, \mu \in \mathbb{R}$ *;*

(EV6) *(Distribuitiva da multiplicação)*

$$(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u\,, \tag{3.6}$$

para cada $u \in V$ *e* $\lambda\,, \mu \in \mathbb{R}$ *;*

(EV7) *(Distribuitiva da multiplicação pela adição)*

$$\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v\,, \tag{3.7}$$

para cada $u\,, v \in V$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$ *;*

(EV8) *(Existência de elemento unitário)*

$$1 \cdot u = u\,, \tag{3.8}$$

para cada $u \in V$.

Observação 3.9 *No caso acima a terna* $(V\,, +\,, \cdot)$ *será dita espaço vetorial real (ou sobre* $\mathbb{R}$*), e quando as operações envolvidas forem as naturais de* V *diremos, apenas, que* V *é um espaço vetorial real (ou sobre* $\mathbb{R}$*).*

É comum chamarmos os elementos de um espaço vetorial de **vetores***, independentemente da natureza dos mesmos.*

Também chamamos de **escalares** *os números reais, quando esses desempenham o seu papel na ação de multiplicar um vetor por esses número real.*

Observação 3.10 *O elemento* $O \in V$ *na propriedade* (EV3) *(isto é, (3.3)) é único.*

De fato, qualquer outro $O' \in V$*, satisfazendo a mesma propriedade* (EV3) *(isto é, (3.3)), pela Definição (3.1), itens* (EV3) *e* (EV1) *(isto é (3.3) e (3.1)), deveremos ter:*

$$\begin{aligned} O' &\overset{(3.3)}{=} \underbrace{O}_{\text{elemento neutro de } +} + O' \\ &\overset{(3.1)}{=} \underbrace{O'}_{\text{elemento neutro de } +} + O \\ &\overset{(3.3)}{=} O\,, \end{aligned}$$

isto é, $\quad O = O'\,.$

Devido a este fato, chamaremos o vetor O *de* **elemento neutro** *da adição, do espaço vetorial real* $(V\,,+\,,\cdot)$.

Observação 3.11 *Em um espaço vetorial real* $(V\,,+\,,\cdot)$*, pela Definição* (3.1)*, item* (EV4) *(isto é,* (3.4)*), para cada* $u \in V$*, podemos encontrar* $v \in V$ *tal que*

$$u + v = O\,.$$

Na verdade, para cada $u \in V$*, existe somente um* **único** *elemento* $v \in V$*, com esta propriedade.*

De fato, dado $u \in V$*, suponhamos que existem* $v\,, v\,' \in V$*, tais que*

$$u + v = O \quad e \quad u + v\,' = O\,. \tag{3.12}$$

Então, combinando estas equações com a Definição (3.1)*, itens* (EV1),(EV2) *e* (EV3) *(isto é,* (3.1)*,* (3.2) *e* (3.3)*), deveremos ter:*

$$\begin{aligned} v &\overset{(3.3)}{=} v + O \\ &\overset{(3.12)}{=} v + (u + v\,') \\ &\overset{(3.2)}{=} (v + u) + v\,' \\ &\overset{(3.1)}{=} (u + v) + v\,' \\ &\overset{(3.12)}{=} O + v' \\ &\overset{(3.3)}{=} v\,', \end{aligned}$$

$$\text{ou seja,} \qquad v = v\,'\,.$$

Denotaremos o (único) vetor v *acima, por* $\underline{-u}$ *e chamaremo-lo de* **vetor oposto** *do vetor* u *em* $(V\,,+\,,\cdot)$.

Também denotaremos por $\underline{u - v}$*, o vetor* $u + (-v)$*, isto é,*

$$u - v \doteq u + (-v)\,.$$

Observação 3.13 *As quatro primeiras propriedades da Definição 3.1, referem-se apenas à operação de adição e são (isto é,* (3.1)*,* (3.2)*,* (3.3) *e* (3.4)*) conhecidas, respectivamente, por propriedade comutativa, associativa, existência do elemento neutro (da adição) e existência do elemento oposto (da adição).*

A quinta e a oitava propriedades da Definição 3.1 (isto é, (3.5) *e* (3.8)*), são exclusivas da multiplicação por escalar e também podem ser chamadas de associativa (da multiplicação) e elemento unidade (da multiplicação), respectivamente.*

A sexta e a sétima propriedades da Definição 3.1 (isto é, (3.6) *e* (3.7)*), relacionam as duas operações e são ambas conhecidas por distributivas.*

Observação 3.14 *A rigor, a definição de espaço vetorial real (introduzida na Definição 3.1) que exibimos, se refere a multiplicação de vetores por* **números reais**, *visto que estamos permitindo que os escalares sejam, apenas, números reais.*

A noção de **espaço vetorial complexo (ou sobre $\mathbb{C}$)** *pode ser introduzida naturalmente a partir da da Definição 3.1, com as devidas adaptações.*

Mais precisamente, pedimos que sejam satisfeitas as propriedades (EV1) *até* (EV4) *e* (EV8), *da Definição 3.1, enquanto que as propriedades* (EV5) *até* (EV7) *devem valer para cada $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.*

No entanto, embora importante, não usaremos com freqüência, neste curso, o conceito de espaço vetorial complexo (ou sobre $\mathbb{C}$).

Um outro exemplo de espaço vetorial real, além dos dois apresentados no início do texto, é o conjunto dos vetores de $\mathbb{R}^2$, ou $\mathbb{R}^3$, como apresentados na disciplina de Geometria Analítica, munidos das respectivas operações de adição de vetores e de multiplicação de escalar por vetores, introduzidos no curso de Geometria Analítica.

Dessa forma, o adjetivo "vetorial" utilizado na Definição 3.1 acima, deve ser entendido de uma forma mais ampla, sendo uma referência aos elementos de um espaço vetorial real $(V, +, \cdot)$, independentemente de serem ou não vetores estudados na disicplina de Geometria Analítica.

O exemplo mais simples de espaço vetorial real é dado pelo:

Exemplo 3.15 *O conjunto dos números reais, munido da adição $+$ e da multiplicação $\cdot$ de números reais, ou seja, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ é um espaço vetorial real.*

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação deste fato.

□

Temos também os seguintes exemplos são espaços vetoriais reais:

Exemplo 3.16 *Para $n \in \mathbb{N}$ fixado, consideremos o conjunto das n-uplas ordenadas de números reais, que indicaremos por $\mathbb{R}^n$, isto é,*

$$\mathbb{R}^n \doteq \{(x_1, x_2, \cdots, x_n);\, x_i \in \mathbb{R},\ \textit{para cada}\ i \in \{1, 2 \cdots, n\}\},$$

munido das operações de adição de duas n-uplas ordenadas, a saber:

$$\textit{para} \quad x = (x_1, x_2, \cdots, x_n),\ y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

definiremos

$$x + y \doteq (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

ou seja,

$$+ \ : \ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

e o produto de uma n-upla por um escalar, a saber:

$$\textit{para} \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad e \quad x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

definiremos

$$\lambda \cdot x \doteq (\lambda\, x_1\,, \lambda\, x_2\,, \cdots\,, \lambda\, x_n) \in \mathbb{R}^n\,,$$

$$\cdot\ :\ \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\,.$$

Pode-se mostrar, que $(\mathbb{R}^n\,, +\,, \cdot)$ *será um espaço vetorial real.*

Resolução:

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

□

Observação 3.17 *Observemos que, no Exemplo 3.16 acima, o vetor nulo de* $(\mathbb{R}^n\,, +\,, \cdot)$ *será a* n*-upla nula, isto é,*

$$O \doteq (0\,, 0\,, \cdots\,, 0) \in \mathbb{R}^n.$$

Além disso, se

$$x = (x_1\,, x_2\,, \cdots\,, x_n) \in \mathbb{R}^n\,,$$

então o vetor oposto, associado ao vetor $\underline{x}$*, será* n*-upla*

$$-x \doteq (-x_1\,, x_2\,, \cdots\,, -x_n) \in \mathbb{R}^n\,.$$

A verificação destes fatos será deixada como exercício para o leitor.

Exemplo 3.18 *Para* $m\,, n \in \mathbb{N}$ *fixados, indiquemos por*

$$V \doteq M_{m\times n}(\mathbb{R})\,,$$

o conjunto das matrizes de ordem $m \times n$ *com coeficientes reais, munido de operações análogas àquelas definidas em* $M_n(\mathbb{R})$*, introduzidas no início desta seção.*

Com isto temos que $(M_{m\times n}(\mathbb{R})\,, +\,, \cdot)$ *será um espaço vetorial real.*

Resolução:

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

□

Observação 3.19 *Observemos que o vetor nulo* O *de* $(M_{m\times n}(\mathbb{R})\,, +\,, \cdot)$ *será a matriz nula, isto é,*

$$O \doteq (a_{ij})_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})\,,$$
$$\textit{onde} \quad a_{ij} \doteq 0\,, \quad \textit{para cada} \quad i \in \{1\,, 2\,, \cdots\,, m\} \text{ e } j \in \{1\,, 2\,, \cdots n\}\,.$$

Além disso, se

$$A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})\,,$$

então o vetor oposto, associado ao vetor A*, será a matriz*

$$-A \doteq (-a_{ij})_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})\,.$$

A verificação destes fatos será deixada como exercício para o leitor.

Exemplo 3.20 *Para* $n \in \mathbb{N}$ *fixado, consideremos*

$$V \doteq \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$$

o conjunto formado por todos os polinômios de grau menor ou igual a $\underline{n}$*, com coeficientes reais.*

Observemos que

$p \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$

se, e somente se, $\quad p(x) = a_o + a_1\,x + \cdots + a_n\,x^n\,, \quad$ *para cada* $\quad x \in \mathbb{R}\,,$

onde

$$a_o\,,a_1\,,\cdots,a_n \in \mathbb{R}\,.$$

Definimos a adição de elementos de $\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ *e a multiplicação de elementos de* $\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ *por escalar da seguinte maneira (como a introduzida no início da seção em* $\mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$*):*

- *Se* $p\,,q \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$*, temos que*

  $$p(x) = a_o + a_1\,x + \cdots + a_n\,x^n \quad e \quad q(x) = b_o + b_1\,x + \cdots + b_n\,x^n\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

  onde

  $$a_o\,,b_o\,,a_1\,,b_1\cdots,a_n\,,b_n \in \mathbb{R}\,.$$

  Então definiremos a função $(p+q)$*, como sendo a função* $(p+q):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$*, dada por:*

  $$(p+q)(x) \doteq p(x)+q(x) = (a_o+b_o)+(a_1+b_1)\,x+\cdots+(a_n+b_n)\,x^n\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

  Observemos que

  $$(p+q) \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})\,,$$

  ou seja, adição de polinômios de grau menor ou igual a $\underline{n}$*, é um polinômio de grau menor ou igual a* $\underline{n}$*, ou ainda:*

  $$+\ :\ \mathscr{P}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_n(\mathbb{R})\,.$$

- *Se* $p \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ *então*

  $$p(x) = a_o + a_1\,x + \cdots + a_n\,x^n\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad \textit{onde} \quad a_o\,,a_1\,,\cdots,a_n \in \mathbb{R}\,.$$

  Assim, para $\lambda \in \mathbb{R}$*, definimos a função* $(\lambda\cdot p)$*, como sendo a função* $(\lambda\cdot p):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$*, dada por:*

  $$(\lambda\cdot p)(x) \doteq (\lambda\,a_o) + (\lambda\,a_1)\,x + \cdots + (\lambda\,a_n)\,x^n\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

  Observemos que

  $$(\lambda\cdot p) \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})\,,$$

  ou seja, a multiplicação de um polinômio de grau menor ou igual a $\underline{n}$ *por um número real é um polinômio de grau menor ou igual a* $\underline{n}$*, ou ainda:*

  $$\cdot\ :\ \mathbb{R} \times \mathscr{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_n(\mathbb{R})\,.$$

Deste modo $(\mathscr{P}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *será um espaço vetorial real.*

Resolução:

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

□

Observação 3.21 *Observemos que o vetor nulo de* $(\mathscr{P}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *será o polinômio identicamente nulo, isto é,*

$$\begin{aligned} &\mathscr{O} \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R}), \\ \text{onde} \quad &\mathscr{O}(x) \doteq 0, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Além disso, se $p \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$*, então o vetor oposto, associado ao vetor* $\underline{p}$*, será o polinômio*

$$\begin{aligned} &-p \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R}), \\ \text{onde} \quad &(-p)(x) \doteq -p(x), \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

A verificação destes fatos será deixada como exercício para o leitor.

Exemplo 3.22 *Sejam* $I \subseteq \mathbb{R}$ *um intervalo de* $\mathbb{R}$ *e*

$$V \doteq \mathscr{F}(I; \mathbb{R}),$$

o conjunto de todas as funções $f : I \to \mathbb{R}$*.*

Para $f, g \in \mathscr{F}(I; \mathbb{R})$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$*, definamos as funções*

$$f + g, \lambda \cdot f : I \to \mathbb{R},$$

dadas por

$$(f+g)(x) \doteq f(x) + g(x) \quad e \quad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x), \quad \text{para cada} \quad x \in A.$$

Com isto temos definidas as operações

$$+ \; : \; \mathscr{F}(I; \mathbb{R}) \times \mathscr{F}(I; \mathbb{R}) \to \mathscr{F}(I; \mathbb{R}) \quad e \quad . \; : \; \mathbb{R} \times \mathscr{F}(I; \mathbb{R}) \to \mathscr{F}(I; \mathbb{R}).$$

Afirmamos que $(\mathscr{F}(I; \mathbb{R}), +, \cdot)$ *é um espaço vetorial real.*

Resolução:

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

□

Observação 3.23 *Observemos que o vetor nulo de* $(\mathscr{F}(I; \mathbb{R}), +, \cdot)$ *será a função identicamente nulo, isto é,*

$$\begin{aligned} &\mathscr{O} \in \mathscr{F}(I; \mathbb{R}), \\ \text{onde} \quad &\mathscr{O}(x) \doteq 0, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Além disso, se $f \in \mathscr{F}(I\,;\,\mathbb{R})$ *então o vetor oposto, associado ao vetor* $\underline{f}$, *será a função*

$$\begin{aligned} & -f \in \mathscr{F}(I\,;\,\mathbb{R})\,, \\ \textit{onde} \quad & (-f)(x) \doteq -f(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

A verificação destes fatos será deixada como exercício para o leitor.

11.08.2015 - 3.a

Exemplo 3.24 *Indiquemos por*

$$C(I\,;\,\mathbb{R})\,,$$

o conjunto das funções contínuas definidas num intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, *munido das operações de adição de funções e multiplicação de funções por número reais, definidas em* $\mathscr{F}(I\,;\,\mathbb{R})$ *no Exemplo 3.22 acima.*

Assim temos que $(C(I\,;\,\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$ *será um espaço vetorial real.*

Resolução:

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

□

Observação 3.25 *Observemos que o vetor nulo de* $(C(I;\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$ *será a função identicamente nulo, isto é, (é uma função contínua em* I*)*

$$\begin{aligned} & \mathscr{O} \in C(I\,;\,\mathbb{R})\,, \\ \textit{onde} \quad & \mathscr{O}(x) \doteq 0\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Além disso, se $f \in C(I\,;\,\mathbb{R})$ *então o vetor oposto associado ao vetor* f *será a função (é uma função contínua em* I*)*

$$\begin{aligned} & -f \in C(I;\mathbb{R})\,, \\ \textit{onde} \quad & (-f)(x) \doteq -f(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Exemplo 3.26 *Seja* $k \in \mathbb{N}$ *fixado. Denotemos por*

$$C^k(I\,;\,\mathbb{R})\,,$$

o conjunto das funções contínuas, com derivadas contínuas até ordem $k \in \mathbb{N}$, *definidas num intervalo aberto* $I \subseteq \mathbb{R}$, *munido das operações de adição de funções e multiplicação de funções por número reais, definidas em* $\mathscr{F}(I\,;\,\mathbb{R})$ *no Exemplo 3.22 acima.*

Afirmamos que $\left(C^k(I\,;\,\mathbb{R})\,,+\,,\cdot\right)$ *será um espaço vetorial real.*

Resolução:

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

□

Observação 3.27 *Observemos que o vetor nulo de* $(C^k(I\,;\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$ *será a função identicamente nulo, isto é, (é uma função contínua com derivada até a ordem* k *contínuas em* I*)*

$$\mathscr{O} \in C^k(I\,;\mathbb{R})\,,$$
$$\textit{onde} \quad \mathscr{O}(x) \doteq 0\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Além disso, se $f \in C^k(I\,;\mathbb{R})$ *então o vetor oposto associado ao vetor* f *será a função (é uma função contínua com derivada até a ordem* k *contínuas em* I*)*

$$-f \in C^k(I\,;\mathbb{R})\,,$$
$$\textit{onde} \quad (-f)(x) \doteq -f(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

A verificação destes fatos será deixada como exercício para o leitor.

Exemplo 3.28 *Indiquemos por*

$$C^\infty(I\,;\mathbb{R})\,,$$

o conjunto das funções com todas as derivadas contínuas definidas num intervalo aberto $I \subseteq \mathbb{R}$*, munido das operações de adição de funções e multiplicação de funções por número reais, definidas em* $\mathscr{F}(I\,;\mathbb{R})$ *no Exemplo 3.22 acima.*

Deste modo $(C^\infty(I\,;\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$ *será um espaço vetorial real.*

Resolução:

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

□

Observação 3.29 *Observemos que o vetor nulo de* $(C^\infty(I\,;\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$ *será a função identicamente nulo, isto é, (é uma função contínua com derivada de qualquer ordem contínua em* I*)*

$$\mathscr{O} \in C^\infty(I\,;\mathbb{R})\,,$$
$$\textit{onde} \quad \mathscr{O}(x) \doteq 0\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Além disso, se $f \in C^\infty(I;\mathbb{R})$ *então o vetor oposto associado ao vetor* f *será a função (é uma função contínua com derivada de qualquer ordem contínua em* I*)*

$$-f \in C^\infty(I\,;\mathbb{R})\,,$$
$$\textit{onde} \quad (-f)(x) \doteq -f(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

A verificação destes fatos será deixada como exercício para o leitor.

Os espaços vetoriais reais acima envolvem operações com as quais estamos familiarizados.

O próximo exemplo é um pouco mais sofisticado do que os anteriores e por isso verificaremos que as oito propriedades ocorrem.

Exemplo 3.30 *Consideremos o conjunto*

$$V \doteq (0\,,\infty)\,,$$

ou seja, o semi-eixo positivo da reta real.

Este conjunto se munido das operações usuais de soma e multiplicação de números reais **não** *será um espaço vetorial real, pois não satisfaz, entre outras, a propriedade da existência de um* elemento neutro *para a adição (pois* $0 \notin V$*).*

No entanto, para

$$x\,,y \in V \quad \text{e} \quad \lambda \in \mathbb{R}\,,$$

definiremos a adição de x com y*, que será indicada por* $x \boxplus y$*, como sendo*

$$x \boxplus y \doteq x\,y\,, \qquad (*)$$

(o produto usual entre os números reais x *e* y*) e o* produto de x pelo escalar λ*, que será denotada por* $\lambda \boxdot x$*, como*

$$\lambda \boxdot x \doteq x^{\lambda}\,, \qquad (**)$$

(a potenciação usual de números reais).

Afirmamos que $(V\,,\boxplus\,,\boxdot)$ *é um espaço vetorial real.*

Resolução:

De fato, observemos que

$$\boxplus \;:\; (0,\infty)\times(0\,,\infty) \to (0\,,\infty) \quad \text{e} \quad \boxdot \;:\; \mathbb{R}\times(0\,,\infty) \to (0\,,\infty)$$

e verifiquemos, uma a uma, as oito propriedades da definição de espaço vetorial real :

1. Para $x\,,y \in V$, temos que

$$\begin{aligned} x \boxplus y &\overset{(*)}{=} x\,y \\ &\overset{\text{propriedade de números reais}}{=} yx \overset{(*)}{=} y \boxplus x\,. \end{aligned}$$

   Logo vale a propriedade (EV1) (isto é, (3.1)).

2. Notemos também que

$$\begin{aligned} x \boxplus (y \boxplus z) &\overset{(*)}{=} x \boxplus (y\,z) \\ &\overset{(*)}{=} x\,(y\,z) \\ &\overset{\text{propriedade de números reais}}{=} (x\,y)\,z \\ &\overset{(*)}{=} (x \boxplus y)\,z \\ &\overset{(*)}{=} (x \boxplus y) \boxplus z\,, \end{aligned}$$

   Logo vale a propriedade (EV2) (isto é, (3.2)).

3. Para $x \in V$ então, como $1 \in V$, temos

$$\begin{aligned} 1 \boxplus x &\overset{(*)}{=} 1\,x \\ &\overset{\text{propriedade de números reais}}{=} x\,, \end{aligned}$$

ou seja, 1 é o elemento neutro da adição $\boxplus$, o qual denotaremos por O, ou seja,

$$O \doteq 1\,.$$

Logo vale a propriedade (EV3) (isto é, (3.3)).

4. Se $x \in V$, isto é, $x > 0$, então $x^{-1} > 0$, ou seja, $x^{-1} \in V$ e

$$\begin{aligned} x \boxplus x^{-1} &\overset{(*)}{=} x\,x^{-1} \\ &\overset{\text{propriedade de números reais}}{=} 1 \\ &= O\,, \end{aligned}$$

ou seja, o elemento oposto de $x \in V$, relativamente a adição $\boxplus$, será $x^{-1} \in V$, ou seja

$$-x \doteq x^{-1}\,.$$

Logo vale a propriedade (EV4) (isto é, (3.4)).

5. Notemos que, para $x \in V$ e $\lambda\,, \mu \in \mathbb{R}$, termeos:

$$\begin{aligned} \lambda \boxdot (\mu \boxdot x) &\overset{(**)}{=} \lambda \boxdot x^{\mu} \\ &\overset{(**)}{=} (x^{\mu})^{\lambda} \\ &\overset{\text{propriedade de números reais}}{=} x^{\mu\lambda} \\ &= x^{\lambda\mu} \overset{(**)}{=} (\lambda\mu) \boxdot x\,. \end{aligned}$$

Logo vale a propriedade (EV5) (isto é, (3.5)).

6. Notemos também que, para $x \in V$ e $\lambda\,, \mu \in \mathbb{R}$, teremos:

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \boxdot x &\overset{(**)}{=} x^{\lambda+\mu} \\ &\overset{\text{propriedade de números reais}}{=} x^{\lambda}\,x^{\mu} \\ &\overset{(*)}{=} x^{\lambda} \boxplus x^{\mu} \\ &\overset{(**)}{=} (\lambda \boxdot x) \boxplus (\mu \boxdot x)\,. \end{aligned}$$

Logo vale a propriedade (EV6) (isto é, (3.6)).

7. Notemos que, para $x, y \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, termeos:

$$\begin{aligned} \lambda \boxdot (x \boxplus y) &\overset{(*)}{=} \lambda \boxdot (x\,y) \\ &\overset{(**)}{=} (x\,y)^{\lambda} \\ &\overset{\text{propriedade de números reais}}{=} x^{\lambda}\,y^{\lambda} \\ &\overset{(*)\text{ e }(**)}{=} (\lambda \boxdot x) \boxplus (\lambda \boxdot y)\,. \end{aligned}$$

   Logo vale a propriedade (EV7) (isto é, (3.7)).

8. Notemos também que, para cada $x \in V$, teremos:

$$\begin{aligned} 1 \boxdot x &\overset{(**)}{=} x^{1} \\ &\overset{\text{propriedade de números reais}}{=} x\,, \end{aligned}$$

   ou seja, logo vale a propriedade (EV8) (isto é, (3.8)).

Com isto podemos concluir que $(V, \boxplus, \boxdot)$ é um espaço vetorial real.

□

3.2 Propriedades

Das oito propriedades que definem um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) podemos concluir várias outras.

Listaremos algumas destas propriedades no seguinte resultado:

Proposição 3.31 *Seja $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial real (respectivamente, complexo). Então:*

1. *para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, temos que*

$$\lambda \cdot O = O\,,$$

   onde O é o elemento neutro da adição de $(V, +, \cdot)$.

2. *para cada $u \in V$,*

$$0 \cdot u = O\,,$$

   onde $0 \in \mathbb{R}$ e O é o elemento neutro da adição de $(V, +, \cdot)$.

3. *se*

$$\lambda \cdot u = O\,,$$

$$\textit{então deveremos ter:} \quad \lambda = 0 \quad \textit{ou} \quad u = O\,,$$

   onde $0 \in \mathbb{R}$ e O é o elemento neutro da adição de $(V, +, \cdot)$.

4. *para cada* $\lambda \in \mathbb{R}$ *e* $u \in V$, *temos que*

$$\begin{aligned}(-\lambda) \cdot u &= \lambda \cdot (-u) \\ &= -(\lambda \cdot u) .\end{aligned}$$

5. *para cada* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *e* $u \in V$, *temos que*

$$(\lambda - \mu) \cdot u = \lambda \cdot u - (\mu \cdot u) .$$

6. *para cada* $\lambda \in \mathbb{R}$ *e* $u, v \in V$, *temos que*

$$\lambda \cdot (u - v) = \lambda \cdot u - (\lambda \cdot v) .$$

7. *para cada* $\lambda, \mu_1, \cdots, \mu_n \in \mathbb{R}$ *e* $u_1, \cdots, u_n \in V$, *temos que*

$$\lambda \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \mu_j \cdot u_j \right) = \sum_{j=1}^{n} (\lambda\, \mu_j) \cdot u_j .$$

8. *para cada* $u \in V$, *temos que*

$$-(-u) = u .$$

9. *se*

$$u + w = v + w ,$$

então deveremos ter: $\quad u = v .$

10. *se* $u, v \in V$, *então existe um único* $w \in V$ *tal que*

$$u + w = v .$$

Demonstração:

1. Pelas propriedades (EV3) e (EV7) (isto é, (3.3) e (3.7)) temos que

$$\begin{aligned}\lambda \cdot O &\overset{(3.3)}{=} \lambda \cdot (O + O) \\ &\overset{(3.7)}{=} \lambda \cdot O + \lambda \cdot O .\end{aligned} \tag{3.32}$$

Utilizando as propriedades (EV1) a (EV4) (isto é, (3.1) e (3.4)) e a notação da Observação (3.11), obtemos

$$\begin{aligned}O &\overset{(3.4)}{=} \lambda \cdot O + [-(\lambda \cdot O)] \\ &\overset{(3.33)}{=} (\lambda \cdot O + \lambda \cdot O) + [-(\lambda \cdot O)] \\ &\overset{(3.7)}{=} \lambda \cdot O + \{\lambda \cdot O + [-(\lambda \cdot O)]\} \\ &\overset{(3.4)}{=} \lambda \cdot O + O \\ &\overset{(3.3)}{=} \lambda \cdot O ,\end{aligned}$$

isto é, $\quad \lambda \cdot O = O ,$

como queríamos demonstrar.

2. Pela propriedades ($\mathrm{EV6}$) (isto é, (3.6)) temos que

$$
\begin{aligned}
0 \cdot u &= (0+0) \cdot u \\
&\overset{(3.6)}{=} 0 \cdot u + 0 \cdot u \,. \qquad (3.33)
\end{aligned}
$$

Utilizando a identidade acima, as propriedades ($\mathrm{EV2}$) e ($\mathrm{EV4}$) (isto é, (3.2) e (3.4)) e a notação da Observação (3.11), obtemos

$$
\begin{aligned}
O &\overset{(3.4)}{=} 0 \cdot u + [(-(0 \cdot u)] \\
&\overset{(3.33)}{=} (0 \cdot u + 0 \cdot u) + [-(0 \cdot u)] \\
&\overset{(3.2)}{=} 0 \cdot u + \{0 \cdot u + [-(0 \cdot u)]\} \\
&\overset{(3.4)}{=} 0 \cdot u + O \\
&\overset{(3.3)}{=} 0 \cdot u,
\end{aligned}
$$

$$\text{isto é,} \qquad 0 \cdot u = O \,,$$

como queríamos demonstrar.

3. Se

$$\lambda \cdot u = O \quad \text{e} \quad \lambda \neq 0 \,,$$

pelas propriedades ($\mathrm{EV8}$) e ($\mathrm{EV5}$) (isto é, (3.8) e (3.5)) e pelo item 1. desta Proposição, segue que

$$
\begin{aligned}
u &\overset{(3.8)}{=} 1 \cdot u \\
&= \left(\lambda^{-1}\lambda\right) \cdot u \\
&\overset{(3.5)}{=} \lambda^{-1}(\underbrace{\lambda \cdot u}_{=O}) \\
&= \lambda^{-1} \cdot O \\
&\overset{\text{item 1.}}{=} O \,,
\end{aligned}
$$

$$\text{ou seja,} \qquad u = O \,,$$

como queríamos demonstrar.

4. Utilizando a propriedade ($\mathrm{EV6}$) (isto é, (3.6)) e o item 2. desta Proposição, obtemos

$$\lambda \cdot u + (-\lambda) \cdot u \overset{(3.6)}{=} [\lambda + (-\lambda)] \cdot u = 0 \cdot u \overset{\text{item 2.}}{=} O \,.$$

Pela Observação (3.11), segue que

$$-(\lambda \cdot u) = (-\lambda) \cdot u \,.$$

Analogamente, utilizando-se a propriedade ($\mathrm{EV7}$) (isto é, (3.7)), mostra-se

$$-(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot (-u) \,.$$

A prova deste fato será deixada como exercício para o leitor.

As provas dos itens 5., 6., 7., 8. e 9. serão deixadas como exercício para o leitor (Exercício 2 da 1.a Lista de Exercícios).

∎

Para finalizar temos a

Proposição 3.34 *Seja* $(V, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real (respectivamente, complexo).* *Então, se* $V \neq \{O\}$, *temos que o conjunto* V *terá infinitos elementos distintos.*

Demonstração:

Notemos que se encontrarmos uma função $f : \mathbb{R} \to V$ que seja injetora, então o conjunto V terá infinitos elementos.

De fato, pois para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, corresponderá um elemento distinto $f(\lambda)$ de V.

Como $\mathbb{R}$ tem infinitos elementos distintos e a função f é injetora, teremos que o conjunto V também terá infinitos elementos distintos.

Mostremos que existe função $f : \mathbb{R} \to V$, para isto, seja $v \in V$, de modo que $v \neq O$.

Definamos a função $f : \mathbb{R} \to V$ por

$$f(\lambda) = \lambda \cdot v, \quad \text{para cada} \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{3.35}$$

Para mostrar que a função f é injetora, tomemos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, tais que

$$f(\lambda) = f(\mu).$$

Devemos mostrar que

$$\lambda = \mu,$$

e assim a função f será injetora.

Como

$$\begin{aligned} \lambda \cdot v &\overset{(3.35)}{=} f(\lambda) \\ &= f(\mu) \\ &\overset{(3.35)}{=} \mu \cdot v, \end{aligned}$$

$$\text{ou seja,} \qquad \lambda \cdot v = \mu \cdot v,$$

ou, equivalentemente:

$$\lambda \cdot v - (\mu \cdot v) = O. \tag{3.36}$$

Pelo item 4. da Proposição (3.31) e (3.6), deveremos ter

$$\begin{aligned} O &\overset{(3.36)}{=} \lambda \cdot v - (\mu \cdot v) \\ &\overset{\text{Prop. (3.31) item 4.}}{=} \lambda \cdot v + (-\mu) \cdot v \\ &\overset{(3.6)}{=} (\lambda - \mu) \cdot v. \end{aligned}$$

Como $v \neq O$, pelo item 3. da mesma Proposição, segue que

$$\lambda - \mu = 0\,,$$

isto é,

$$\lambda = \mu\,,$$

mostrando que a função f é injetora e completando a demonstração.

∎

3.3 Exercícios

Capítulo 4

Subespaços Vetoriais

4.1 Introdução e Exemplos

13.08.2015 - 4.a

Muitas vezes nos depararemos com certos subconjuntos de um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) que possuem a propriedade que a soma de dois de seus elementos é um elemento do próprio subconjunto, bem como quando multiplicamos um elemento do subconjunto por um escalar, o resultado continua pertencendo ao subconjunto. A estes subconjuntos daremos um nome, como veremos na:

Definição 4.1 *Seja* $(V, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real (respectivamente, complexo).*

Diremos que um subconjunto $W \subseteq V$, $W \neq \emptyset$, *é um* **subespaço vetorial** *do espaço vetorial real (respectivamente, complexo)* $(V, +, \cdot)$ *se forem satisfeitas as seguintes condições:*

(sv1) *Deveremos ter*

$$O \in W, \tag{4.1}$$

onde O *é o elemento neutro da adição de* $(V, +, \cdot)$*;*

(sv2) *Se* $u, v \in W$, *deveremos ter*

$$(u + v) \in W; \tag{4.2}$$

(sv3) *Se* $u \in W$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$ *(ou* $\lambda \in \mathbb{C}$*), deveremos ter*

$$(\lambda \cdot u) \in W. \tag{4.3}$$

Observação 4.4 *Notemos que todo subespaço vetorial* W *de um espaço vetorial real (respectivamente, complexo)* $(V, +, \cdot)$, *é, ele próprio, um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$ *(respectivamente,* $\mathbb{C}$*) com as operações induzidas de* V, *ou seja,*

$$(W, +_V, \cdot_V)$$

é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ *(ou* $(\mathbb{C})$.

Na situação acima, estamos indicando a operação de adição de elementos de $(V, +, \cdot)$ *por* $+_V$ *e operação de multiplicação de escalar por elementos de* $(V, +, \cdot)$ *por* $\cdot_V$.

As propriedades comutativa (isto é, (3.1)*), associativa (isto é,* (3.2)*), distributivas (isto é,* (3.6) *e* (3.7)*) e* (EV8) *(isto é,* (3.8)*) são herdadas do próprio espaço vetorial real (respectivamente, complexo)* $(V, +, \cdot)$.

Pela propriedade (SV1) *acima (isto é,* (4.1)*), o elemento neutro da adição de* $(V, +, \cdot)$ *será um elemento de* W*, ou seja, vale a propriedade (ev3) da Definição* (3.1) *(isto é,* (3.3)*).*

Finalmente, pelo item 4. da Proposição (3.31) e por (SV3) *(isto é,* (4.3)*), se* $u \in W$ *deveremos ter*

$$-u = (-1) \cdot u \in W,$$

ou seja, vale a propriedade (ev4) da Definição (3.1) *(isto é,* (3.4)*), mostrando com isso que, realmente,* $(W, +_V, \cdot_V)$ *é um espaço vetorial real (respectivamente, complexo).*

Observação 4.5 *Observemos também que a propriedade (sv1) (isto é,* (4.1)*) pode ser obtida da propriedade (sv3) (isto é, de* (4.3)*) e da Proposição* (3.31) *item 2..*

De fato, pois se $w \in W$ *teremos que*

$$O \overset{\text{do item 2. da Proposição (3.31)}}{=} 0 \cdot w \in W.$$

Logo para que um subconjunto não vazio W *de uma espaço vetorial real (respectivamente, complexo)* $(V, +, \cdot)$*, seja um subespaço vetorial basta que ocorram as propriedades (sv2) e (sv3).*

Observação 4.6 *Obviamente*

$$W \doteq \{O\} \quad \text{ou} \quad W \doteq V$$

são subespaços vetoriais do espaço vetorial real (respectivamente, complexo) $(V, +, \cdot)$.

Definição 4.7 *Os subespaços vetoriais da Observação* (4.6) *acima, serão denominados de* <u>**subespaços vetoriais triviais**</u> *do espaço vetorial real (respectivamente, complexo)* $(V, +, \cdot)$.

Observação 4.8 *Notemos que, na situação acima,* $W \subseteq V$ *é um subespaço vetorial do espaço vetorial real (respectivamente, complexo)* $(V, +, \cdot)$ *se, e somente se, são válidas as seguintes condições:*

(SV1') *Deveremos ter*

$$O \in W, \tag{4.9}$$

onde O *é o elemento neutro da adição de* $(V, +, \cdot)$*;*

(SV2') *Para* $u, v \in W$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$ *(ou* $\lambda \in \mathbb{C}$*) deveremos ter*

$$(u + \lambda \cdot v) \in W. \tag{4.10}$$

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Vale notar que, pela Observação (4.5), para que um subconjunto não vazio W, de um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) $(V\,,+\,,\cdot)$, seja um subespaço vetorial, basta que ocorra a propriedade (sv2').

Vejamos alguns exemplos de subespaços vetoriais de um espaço vetorial real:

Começaremos pelo:

Exemplo 4.11 *Mostre que o conjunto*

$$W \doteq \left\{(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,;\;\; x+y+z=0\right\} \tag{4.12}$$

é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $\left(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot\right)$ (onde $+$ e $\cdot$ são as operações usuais de adição de elementos de $\mathbb{R}^3$ e multiplicação de número real por elemento de $\mathbb{R}^3$, respectivamente).

Resolução:

De fato:

1. Notemos que o vetor nulo de $\mathbb{R}^3$ pertence ao conjunto W, isto é,

$$O \doteq (0\,,0\,,0) \in \mathbb{R}^3\,,$$

pertence ao conjunto W.

De fato, pois

$$0+0+0=0\,.$$

Logo, de (4.12), teremos que

$$O=(0\,,0\,,0)\in W\,.$$

2. Se $(x\,,y\,,z)\,,(u\,,v\,,w)\in W$ assim, de (4.12), deveremos ter

$$x+y+z=0 \quad \text{e} \quad u+v+w=0\,. \tag{4.13}$$

Notemos que

$$(x\,,y\,,z)+(u\,,v\,,w) \overset{+\text{ em }\mathbb{R}^3}{=} (\underbrace{x+u}_{\doteq X},\underbrace{y+v}_{\doteq Y},\underbrace{z+w}_{\doteq Z})\,.$$

Mas

$$\begin{aligned} X+Y+Z &= (x+u)+(y+v)+(z+w) \\ &= \underbrace{(x+y+z)}_{\overset{(4.13)}{=}0}+\underbrace{(u+v+w)}_{\overset{(4.13)}{=}0} \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Portanto, de (4.12), segue que

$$(x\,,y\,,z)+(u\,,v\,,w) \overset{+\text{ em }\mathbb{R}^3}{=} (x+u\,,y+v\,,z+w)\in W\,.$$

3. Se $(x\,,y\,,z) \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, de (4.12), deveremos ter

$$x + y + z = 0\,. \tag{4.14}$$

Notemos que

$$\lambda \cdot (x\,,y\,,z) \overset{\cdot\ \text{em}\ \mathbb{R}^3}{=} (\lambda\,x\,,\lambda\,y\,,\lambda\,z)\,.$$

Mas

$$\lambda\,x + \lambda\,y + \lambda\,z = \lambda\,\underbrace{(x + y + z)}_{\overset{(4.14)}{=} 0} = 0\,.$$

Portanto, de (4.12), segue que

$$\lambda \cdot (x\,,y\,,z) = (\lambda\,x\,,\lambda\,y\,,\lambda\,z) \in W\,.$$

Logo o conjunto $W \subseteq \mathbb{R}^3$, dado por (4.12), é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

□

Deixaremos para o leitor a resolução da seguinte generalização do Exemplo (4.11) acima:

Exercício 4.15 *Sejam* $a_1\,,a_2\,\cdots\,,a_n \in \mathbb{R}$ *fixados e*

$$W \doteq \{(x_1\,,x_2\,,\cdots\,,x_n) \in \mathbb{R}^n\,;\;\; a_1\,x_1 + a_2\,x_2 + \cdots + a_n\,x_n = 0\}\,. \tag{4.16}$$

Mostre que o conjunto W *é um subespaço vetorial do espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de adição de elementos de* $\mathbb{R}^n$ *e multiplicação de número real por elemento de* $\mathbb{R}^n$*, respectivamente).*

Um outro exemplo importante é dado pelo:

Exemplo 4.17 *O conjunto* W_s*, formado por todas as* <u>matrizes simétricas</u> *quadradas de ordem* $\underline{n}$*, com coeficientes reais, isto é,*

$$A \in W_s \qquad \textit{se, e somente se,} \quad A^t = A\,, \tag{4.18}$$

(ver mais detalhes na Definição (A.114) do Apêndice (A)) é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $(M_n(\mathbb{R})\,, +\,, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de adição de elementos de* $M_n(\mathbb{R})$ *e multiplicação de número real por elemento de* $M_n(\mathbb{R})$*, respectivamente).*

Resolução:

De fato:

1. O elemento neutro de $M_n(\mathbb{R})$ é a matriz identicamente nula

$$O = (0)_n \in M_n(\mathbb{R})$$

e esta matriz satisfaz

$$O^t = O, \quad \text{ou seja,} \quad O \in W_s;$$

2. Se $A_1, A_2 \in W_s$ então, de (4.18), teremos

$$A_1{}^t = A_1 \quad \text{e} \quad A_2{}^t = A_2, \qquad (*)$$

Com isto, teremos

$$(A_1 + A_2)^t \overset{\text{(A.110) da Proposição (A.107), do Apêndice (A)}}{=} \underbrace{A_1{}^t}_{\overset{(*)}{=} A_1} + \underbrace{A_2{}^t}_{\overset{(*)}{=} A_2}$$
$$= A_1 + A_2,$$

que de (4.18), implicará que

$$(A_1 + A_2) \in W_s.$$

3. Se $A \in W_s$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ então, , de (4.18), teremos

$$A^t = A. \qquad (**)$$

Mas

$$(\lambda \cdot A)^t \overset{\text{(A.112) da Proposição (A.107), do Apêndice (A)}}{=} \lambda \cdot \underbrace{A^t}_{\overset{(**)}{=} A}$$
$$= \lambda \cdot A,$$

que de (4.18), implicará que

$$(\lambda \cdot A) \in W_s.$$

Portanto $W_s \subseteq M_n(\mathbb{R})$ é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

□

Deixaremos para o leitor o:

Exercício 4.19 *O conjunto W_a, formado por todas as* **matrizes anti-simétricas** *quadradas de ordem n com coeficientes reais, isto é,*

$$A \in W_a \quad \text{se, e somente se,} \quad A^t = -A, \tag{4.20}$$

(veja a Definição (A.114) do Apêndice (A) para mais detalhes) é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ (onde $+$ e $\cdot$ são as operações usuais de adição de elementos de $M_n(\mathbb{R})$ e multiplicação de número real por elemento de $M_n(\mathbb{R})$, respectivamente).

Observação 4.21 *Veremos, mais adiante, que toda matriz* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *pode ser escrita como*

$$A = A_s + A_a\,, \tag{4.22}$$

onde $A_s \in W_s$ *e* $A_a \in W_a$.

Além disso, também mostraremos que

$$W_s \cap W_a = \{O\}\,. \tag{4.23}$$

As propriedades (4.22) e (4.23) serão de grande importância, como veremos mais adiante.

Temos também o:

Exemplo 4.24 *Seja* $\mathscr{P}_n^*(\mathbb{R}) \subseteq \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$, *dado por*

$$\mathscr{P}_n^*(\mathbb{R}) \doteq \{p \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})\,;\;\; p(0) = 0\}\,. \tag{4.25}$$

Verifiquemos que $\mathscr{P}_n^*(\mathbb{R})$ *é um subespaço vetorial do espaço vetorial real* $(\mathscr{P}_n(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de adição de elementos de* $\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ *e multiplicação de número real por elementos de* $\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$*, respectivamente).*

Resolução:

De fato:

1. O polinômio nulo, $O \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$, pertence a $\mathscr{P}_n^*(\mathbb{R})$, isto é, se anula em $x = 0$, ou ainda:

$$O(0) = 0\,.$$

   Logo, de (4.25), segue que

$$O \in \mathscr{P}_n^*(\mathbb{R})\,.$$

2. Se $p\,,q \in \mathscr{P}_n^*(\mathbb{R})$ então, de (4.25), teremos

$$p(0) = 0 \quad \text{e} \quad q(0) = 0\,. \tag{4.26}$$

   Logo, de (4.26), segue que

$$(p+q)(0) \overset{\text{definição de adição de funções}}{=} \underbrace{p(0)}_{\overset{(4.26)}{=}0} + \underbrace{q(0)}_{\overset{(4.26)}{=}0} = 0\,.$$

   Portanto, de (4.25), teremos

$$(p+q) \in \mathscr{P}_n^*(\mathbb{R})\,.$$

3. Se $p \in \mathscr{P}_n^*(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ então, de (4.25), teremos

$$p(0) = 0\,. \tag{4.27}$$

Logo, de (4.27), segue que

$$(\lambda \cdot p)(0) \stackrel{\text{definição de multiplicação de número real por função}}{=} \lambda \underbrace{p(0)}_{\stackrel{(4.27)}{=} 0}$$
$$= 0\,.$$

Portanto, de (4.25), teremos

$$(\lambda \cdot p) \in \mathscr{P}_n^*(\mathbb{R})\,.$$

Logo o conjunto $\mathscr{P}_n^*(\mathbb{R}) \subseteq \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$, dado por (4.25), é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $(\mathscr{P}_n(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$.

□

Um outro exemplo importante é dado pelo:

Exemplo 4.28 *Considere o seguinte conjunto*

$$W \doteq \{y \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R})\,;\, y''(x) - y(x) = 0\,,\ \textit{para cada } x \in \mathbb{R}\} \tag{4.29}$$

onde $y''(x)$ denota a derivada de segunda ordem da função $y = y(x)$, no ponto $x \in \mathbb{R}$.

Mostremos que W é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $\left(C^2(\mathbb{R};\mathbb{R})\,,+\,,\cdot\right)$ (onde $+$ e $\cdot$ são as operações usuais de adição de elementos de $C^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ e de multiplicação de número real por elemento de $C^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$).

Resolução:

De fato:

1. O elemento neutro de $C^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ é a função identicamente nula $O \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ e esta função satisfaz

$$O''(x) - O(x) = 0\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Logo, de (4.29), segue que

$$O \in W\,.$$

2. Se $y_1, y_2 \in W$ então, de (4.29), teremos que $y_1, y_2 \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ e além disso satisfazem

$${y_1}''(x) - y_1(x) = 0 \quad \text{e} \quad {y_2}''(x) - y_2(x) = 0\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{4.30}$$

Logo $(y_1 + y_2) \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ e, de (4.30), segue que

$$(y_1 + y_2)''(x) - (y_1 + y_2)(x) \stackrel{\text{propriedade da derivação}}{=} \underbrace{[{y_1}''(x) - y_1(x)]}_{\stackrel{(4.30)}{=} 0} + \underbrace{[{y_2}''(x) - y_2(x)]}_{\stackrel{(4.30)}{=} 0}$$
$$= 0\,,$$

ou seja,

$$(y_1 + y_2) \in W\,.$$

3. Se $y \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ então, de (4.29), teremos que $y \in C^2(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$ e além disso satisfaz

$$y\,''(x) - y(x) = 0\,, \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}\,. \tag{4.31}$$

Logo, de (4.29), segue que $(\lambda \cdot y) \in C^2(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$ e, de (4.31), segue que

$$(\lambda \cdot y)''(x) - \lambda \cdot y(x) \overset{\text{propriedade da derivação}}{=} \lambda \cdot \underbrace{[y\,''(x) - y(x)]}_{\overset{(4.31)}{=}0} = 0\,,$$

mostrando que

$$(\lambda \cdot y) \in W\,.$$

Portanto o conjunto $W \subseteq C^2(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$, dado por (4.29), é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $\left(C^2(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})\,, +\,, \cdot\right)$.

□

Deixaremos a resolução pelo leitor dos:

Exercício 4.32 *Sejam $m\,, n \in \mathbb{N}$ fixados, com $m \leq n$.*
Então

$$W \doteq \mathscr{P}_m(\mathbb{R})$$

é um subespaço do espaço vetorial real $(\mathscr{P}_n(\mathbb{R})\,, +\,, \cdot)$ (onde $+$ e $\cdot$ são as operações usuais de adição de elementos de $\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ e multiplicação de número real por elemento de $\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$, respectivamente).

Exercício 4.33 *O conjunto $W \doteq C(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$, é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $(\mathscr{F}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})\,, +\,, \cdot)$ (onde $+$ e $\cdot$ são as operações usuais de adição de elementos de $\mathscr{F}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$ e multiplicação de número real por elemento de $\mathscr{F}(\mathbb{R}\,;\mathbb{R})$).*

Exercício 4.34 *O conjunto*

$$W \doteq \left\{ f \in C([a\,, b]\,;\mathbb{R})\,; \quad \int_a^b f(x)\,dx = 0 \right\}$$

é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $(C([a\,, b]\,;\mathbb{R}), +, \cdot)$ (onde $+$ e $\cdot$ são as operações usuais de adição de elementos de $C([a\,, b]\,;\mathbb{R})$ e multiplicação de número real por elemento de $C([a\,, b]\,;\mathbb{R})$, respectivamente).

4.2 Interseção e Soma de Subespaços

Temos a:

Proposição 4.35 (Interseção de subespaços) *Sejam U e W subespaços vetoriais do espaço vetorial real (respectivamente, complexo) $(V\,,+\,,\cdot)$.*

Então o conjunto

$$U \cap W$$

é um subespaço vetorial do espaço vetorial real (respectivamente, complexo) $(V\,,+\,,\cdot)$.

Demonstração:

De fato:

1. Como U e W são subespaços vetoriais do espaço vetorial real $(V\,,+\,,\cdot)$ temos que

$$O \in U \quad \text{e} \quad O \in W\,.$$

Logo

$$O \in U \cap W;$$

2. Se $x\,,y \in U \cap W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ (respectivamente, $\mathbb{C}$), como U e W são subespaços vetoriais do espaço vetorial real (respectivamente, complexo) $(V\,,+\,,\cdot)$, teremos que

$$(x + \lambda \cdot y) \in U \quad \text{e} \quad (x + \lambda \cdot y) \in W\,.$$

Logo,

$$(x + \lambda \cdot y) \in U \cap W\,.$$

Portanto, da Observação (4.8), segue que o conjunto $U \cap W$ é subespaço vetorial do espaço vetorial real (respectivamente, complexo) $(V\,,+\,,\cdot)$, completando a demonstração do resultado.

∎

Questão: Com a notação da Proposição (4.35) acima, podemos afirmar que o conjunto

$$U \cup W$$

é subespaço vetorial de V ?

Resposta : Não.

Para ver isto, basta considerar

$$\begin{aligned}
V &\doteq \mathbb{R}^2\,,\\
U &\doteq \left\{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2;\ \ x = 0\right\}\\
&= \{(x\,,0)\,;\,x \in \mathbb{R}\}, W \qquad\qquad \doteq \left\{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2;\ \ y = 0\right\}\\
&= \{(0\,,y)\,;\,y \in \mathbb{R}\}\,.
\end{aligned}$$

Deixaremos como exercício para o leitor verificar que os conjuntos U e W são subespaços vetoriais do espaço vetorial real $\left(\mathbb{R}^2, +, \cdot\right)$ (onde $+$ e $\cdot$ são as operações usuais de adição de elementos de $\mathbb{R}^2$ e multiplicação de número real por elemento de $\mathbb{R}^3$, respectivamente - geometricamente, correspondem aos eixos Oy e Ox, respectivamente, do plano xOy).

Notemos que

$$u \doteq (0\,,1) \in U \subseteq U \cup W \quad \text{e} \quad w \doteq (1\,,0) \in W \subseteq U \cup W$$

mas

$$\begin{aligned} u + w &= (0\,,1) + (1\,,0) \\ &\overset{\text{adição de } \mathbb{R}^2}{=} (1\,,1) \notin U \cup W\,, \end{aligned}$$

ou seja,

$$u\,, w \in U \cup W\,, \quad \text{mas} \quad u + w \notin U \cup W\,.$$

Portanto o conjunto $U \cup W$ <u>**não**</u> é subespaço vetorial do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^2\,,+\,,\cdot)$.

$\boxed{\textbf{18.08.2015 - 5.a}}$

Observação 4.36 *Notemos que se U e W são subespaços vetoriais de um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) $(V\,,+\,,\cdot)$ e V' também é um subespaço de $(V\,,+\,,\cdot)$, que contém U e W, isto é,*

$$U \cup W \subseteq V'\,,$$

então o conjunto V' terá que conter todos os vetores da forma

$$u + w\,, \quad \textit{para cada} \quad u \in U \quad \textit{e} \quad w \in W\,.$$

Isto motivamos a introduzir a:

Definição 4.37 *Sejam U e W subespaços vetoriais de um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) $(V\,,+\,,\cdot)$.*

*Definimos a <u>**soma de U e W**</u>, indicada por $U + W$, como o conjunto*

$$U + W \doteq \{u + w\,;\, u \in U \ \textit{e}\ w \in W\}\,. \tag{4.38}$$

Com isto temos a:

Proposição 4.39 (Soma de subespaços) *Sejam $U\,,W$ e V como na Definição 4.37 acima.*

Então o conjunto $U + W$ é um subespaço vetorial do espaço vetorial real (respectivamente, complexo) $(V\,,+\,,\cdot)$.

Além disso,

$$U \cup W \subseteq U + W\,.$$

Demonstração:

Verifiquemos que o conjunto $U + W$ é subespaço vetorial do espaço vetorial real (respectivamente, complexo) $(V\,,+\,,\cdot)$.

1. Como os conjuntos U e W são subespaços vetoriais do espaço vetorial real (respectivamente, complexo) $(V, +, \cdot)$, temos que
$$O \in U \quad \text{e} \quad O \in W.$$
Logo,
$$O \overset{O \text{ é o elemento neutro da adição}}{=} \underbrace{O}_{\in U} + \underbrace{O}_{\in W} \in U + W,$$
mostrando que o elementro neutro da adição de $(V, +, \cdot)$ pertence ao conjunto $U + W$, isto é,
$$O \in U + W.$$

2. Notemos que, se
$$x_1, x_2 \in U + W,$$
então
$$x_j = u_j + w_j, \quad \text{com} \quad u_j \in U \quad \text{e} \quad w_j \in W, \quad \text{para cada} \quad j \in \{1, 2\}. \tag{4.40}$$
Por outro lado, se
$$\lambda \in \mathbb{R} \text{ (respectivamente, } \mathbb{C}),$$
então, das propriedades comutativa e associativa da operação $+$ e do fato que U e W são subespaços vetoriais do espaço vetorial real $(V, +, \cdot)$, teremos:
$$\begin{aligned} x_1 + \lambda \cdot x_2 &\overset{(4.40)}{=} [u_1 + w_1] + \lambda \cdot [u_2 + w_2] \\ &= \underbrace{(u_1 + \lambda \cdot u_2)}_{\in U} + \underbrace{(w_1 + \lambda \cdot w_2)}_{\in W} \in U + W. \end{aligned}$$

Logo, da Observação (4.8), segue que o conjunto $U + W$ é subespaço vetorial do espaço vetorial real (respectivamente, complexo) $(V, +, \cdot)$.

Para finalizar, mostremos que
$$U \cup W \subset U + W.$$
Para isto, seja
$$v \in U \cup W,$$
$$\text{isto é,} \quad v \in U \quad \text{e} \quad v \in W.$$
Como
$$v \in U, \quad \text{então} \quad v = \underbrace{v}_{\in U} + \underbrace{O}_{\in W} \in U + W,$$
ou, de outro modo, temos
$$v \in W, \quad \text{então} \quad v = \underbrace{O}_{\in U} + \underbrace{v}_{\in W} \in U + W,$$

ou seja, em qualquer um desses dois casos teremos

$$U \cup W \subset U + W,$$

completando a demonstração do resultado.

∎

Observação 4.41 *Ainda usando a notação da Definição 4.37 acima, suponha que o conjunto* V' *seja um subespaço vetorial do espaço vetorial real (respectivamente, complexo)* $(V, +, \cdot)$ *que contenha os subconjuntos, não vazios,* U *e* W*, isto é,*

$$U, W \subseteq V'.$$

Neste caso, para

$$u \in U \subseteq V' \quad e \quad w \in W \subseteq V',$$

deveremos ter

$$u + w \in V',$$
$$\text{ou seja,} \quad U + W \subseteq V'.$$

Esta observação nos fornece a demonstração da:

Proposição 4.42 *Sejam* U *e* W *subespaços vetoriais do espaço vetorial real (respectivamente, complexo)* $(V, +, \cdot)$.

Então o conjunto $U + W$ *é o menor subespaço vetorial do espaço vetorial real (respectivamente, complexo)* $(V, +, \cdot)$ *que contém o conjunto* $U \cup W$.

Em outras palavras, se o conjunto V' *é um subespaço vetorial do espaço vetorial real (respectivamente, complexo)* $(V, +, \cdot)$*, que contém o conjunto* $U \cup W$*, então deveremos ter*

$$U \cup W \subseteq U + W \subset V'.$$

Demonstração:

Veja a Observação (4.41) acima.

Deixaremos os detalhes como exercício para o leitor.

∎

Podemos agora introduzir a importante noção dada pela:

Definição 4.43 *Sejam* U *e* W *subespaços vetoriais de um espaço vetorial real (respectivamente, complexo)* $(V, +, \cdot)$.

Diremos que a soma $U + W$ *é a* **soma direta de U e W** *se*

$$U \cap W = \{O\}.$$

Neste caso, usaremos a notação

$$U \oplus W$$

para representar a soma (que será direta) $U + W$.

Observação 4.44 *Notemos que sempre temos*

$$\{O\} \subseteq U \cap W,$$

pois os conjuntos U *e* W *são subespaços vetoriais do espaço vetorial real (respectivamente, complexo)* $(V, +, \cdot)$.

Logo $U \oplus V$ *nos diz que o subespaço vetorial* $U \cap W$, **somente** *poderá conter o vetor nulo* O.

A seguir daremos uma caraterização equivalente a fornecida pela Definição (4.43) acima, a saber:

Proposição 4.45 (Soma direta de subespaços vetoriais) *Sejam* U *e* W *subespaços vetoriais do espaço vetorial real (respectivamente, complexo)* $(V, +, \cdot)$.

Temos que

$$V = U \oplus W$$

se, e somente se, para cada $v \in V$, *existir um único* $u \in U$ *e existir um único* $w \in W$ *tal que*

$$v = u + w,$$

ou seja, cada elemento do conjunto $U + W$ *se escreve,* **de modo único**, *como soma de um vetor de* U *com um vetor de* W.

Demonstração:

Suponhamos que

$$V = U \oplus W,$$

isto é,

$$V = U + W \quad \text{e} \quad U \cap W = \{O\}. \tag{4.46}$$

Então, dado $v \in V$, como

$$V = U + W,$$

existem $u \in U$ e $w \in W$, de modo que

$$v = u + w.$$

Queremos mostrar que tal decomposição é **única**.

Para isto, suponhamos que existam $u' \in U$ e $w' \in W$ tais que

$$v = u' + w'.$$

Então, das propriedades de espaços vetoriais, segue que

$$u + w = u' + w',$$

$$\text{o que implicará em:} \qquad \underbrace{u - u'}_{\in U} = \underbrace{w' - w}_{\in W}.$$

Mas

$$(u - u') \in U \quad \text{e} \quad (w' - w) \in W\,,$$

assim teremos:

$$\begin{aligned} & u - u' = w' - w \in U \cap W \overset{\text{hipótese}}{=} \{O\}\,, \\ \text{ou seja,} \quad & u - u' = w' - w = O \\ \text{ou, equivalentemente,} \quad & u = u' \quad \text{e} \quad w = w'\,, \end{aligned}$$

mostrando que $u \in U$ e $w \in W$ são os únicos vetores de modo que

$$v = u + w\,.$$

Reciprocamente, suponhamos agora que, para cada $v \in V$, existam um único $u \in U$ e um único $w \in W$, satisfazendo:

$$v = u + w\,. \tag{4.47}$$

Em particular, teremos

$$V = U + W\,.$$

Resta mostrar que

$$U \cap W = \{O\}\,.$$

Como os conjuntos U e W são subespaços vetoriais do espaço vetorial real (respectivamente, complexo) $(V\,,+\,,\cdot)$, segue que

$$\begin{aligned} & O \in U \quad \text{e} \quad O \in W\,, \\ \text{logo:} \quad & O \in U \cap W\,. \end{aligned}$$

Mostremos que O é o único elemento em $U \cap W$.

Para isto seja

$$\begin{aligned} & v \in U \cap W\,, \\ \text{isto é,} \quad & v \in U \quad \text{e} \quad v \in W\,. \end{aligned}$$

Por hipótese, existem um único $u \in U$ e um único $w \in W$, de modo que

$$v = u + w\,. \tag{4.48}$$

Observemos que, das propriedades da existência do elemento neutro, comutativa, associativa do espaço vetorial real (respectivamente, complexo) $(V\,,+\,,\cdot)$, segue que:

$$\begin{aligned} v & \overset{(4.48)}{=} u + w \\ & \overset{(3.3)}{=} (u + w) + O \\ & \overset{(3.4)}{=} (u + w) + (v - v) \\ & \overset{v \in U \cap W}{=} \underbrace{(u + v)}_{\in U} + \underbrace{(w - v)}_{\in W} \end{aligned} \tag{4.49}$$

e notemos que

$$(u+v) \in U \quad \text{e} \quad (w-v) \in W.$$

Da hipótese da unicidade da decomposição (4.48), deveremos ter

$$u = u + v \quad (\text{ e } \quad w = w - v)\,,$$

o que, da unicidade da existência do elemento neutro O, implicará que

$$v = O\,.$$

Portanto,

$$U \cap W = \{O\}\,,$$

ou seja,

$$V = U \oplus W\,,$$

como queríamos mostrar.

∎

Observação 4.50 *Uma prova alternativa para mostrar que*

$$U \cap W = \{O\}$$

seria supor a existência de

$$v \neq O\,, \quad \textit{de modo que} \quad v \in U \cap W\,.$$

Como

$$v \in U \cap W\,,$$
$$\textit{teremos} \qquad v \in U \quad \textit{e} \quad v \in W\,.$$

Com isto obteríamos

$$\begin{aligned} v &= \underbrace{2 \cdot v}_{\in U} \underbrace{-v}_{\in W} \\ &= \underbrace{4 \cdot v}_{\in U} \underbrace{-3 \cdot v}_{\in W}\,, \end{aligned}$$

ou seja, duas decomposições distintas (pois $v \neq O$) para o vetor $\underline{v}$, já que

$$2 \cdot v\,, 4 \cdot v \in U\,, \quad 2 \cdot v \neq 4 \cdot v \quad \textit{e} \quad -v\,, -3 \cdot v \in W\,,$$

o que seria um absurdo.

Apliquemos as ideias desenvolvidas acima aos:

Exemplo 4.51 *Verifique se o espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de adição de elementos de* $\mathbb{R}^3$ *e multiplicação de número real por elementos de* $\mathbb{R}^3$*) é a soma direta dos seguintes subespaços vetoriais*

$$U \doteq \{(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,;\; x = y = 0\} \quad e \quad W \doteq \{(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,;\; x + y + z = 0\} \tag{4.52}$$

do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot)$.

Resolução:

Notemos que U é de fato um subespaço vetorial do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$, pois

$$U = \{(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,;\; x = 0\} \cap \{(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,;\; y = 0\}$$

que são dois subespaços vetoriais do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot)$.

Deixaremos a verificação destes fatos como exercício para o leitor.

Uma outra verificação alternativa para mostrar que U é, de fato, um subespaço vetorial do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$ seria utlizar a Definição (4.1), ou seja:

1. Notemos que
$$O \doteq (0,0,0) \in U\,;$$

2. Se
$$u_1 = (x_1\,,y_1\,,z_1)\,,\; u_2 = (x_2\,,y_2\,,z_2) \in U$$
então, de (4.52), segue que
$$x_1 = y_1 = 0 \quad \text{e} \quad x_2 = y_2 = 0\,.$$
Logo,
$$u_1 = (0\,,0\,,z_1) \;\text{ e }\; u_2 = (0\,,0\,,z_2)\,,$$
assim teremos
$$\begin{aligned} u_1 + u_2 &\overset{+\text{ em }\mathbb{R}^3}{=} (0\,,0\,,z_1) + (0\,,0\,,z_2) \\ &= (0\,,0\,,z_1 + z_2) \overset{\text{por }(4.52)}{\in} U \end{aligned}$$
e assim teremos $(u_1 + u_2) \in U$;

3. Se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u = (x\,,y\,,z) \in U$ então, de (4.52), segue que
$$x = y = 0\,,$$
ou seja,
$$u = (0\,,0\,,z)\,.$$
Portanto
$$\begin{aligned} \lambda \cdot u &= \lambda \cdot (0\,,0\,,z) \\ &\overset{\cdot\text{ em }\mathbb{R}^3}{=} (\lambda\,0\,,\lambda\,0\,,\lambda\,z) \\ &= (0\,,0\,,\,\lambda\,z) \overset{\text{por }(4.52)}{\in} U \end{aligned}$$
e assim $\lambda \cdot u \in U$.

Logo, dos itens 1., 2. e 3. acima, segue que U é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Deixaremos como exercício para o leitor mostrar que W é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Observemos que, de (4.52), teremos

$$\begin{aligned} W &\doteq \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; z = -x - y\} \\ &= \{(x, y, -x - y) ; x, y \in \mathbb{R}\} . \end{aligned}$$

Logo, dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, podemos escrever

$$(x, y, z) = \underbrace{(0, 0, z + x + y)}_{\in U, \text{ por } (4.52)} + \underbrace{(x, y, -x - y)}_{\in W, \text{ por } (4.52)}$$

e assim

$$(0, 0, z + x + y) \in U, \quad (x, y, -x - y) \in W \quad \text{e} \quad (x, y, z) \in\in U + W,$$

ou seja,

$$\mathbb{R}^3 = U + W.$$

Resta agora mostrar que

$$U \cap W = \{O\}.$$

Para isto, seja

$$(x, y, z) \in U \cap W.$$

Notemos que,

$$\begin{aligned} \text{se} \quad & (x, y, z) \in U, \\ \text{por (4.52), deveremos ter:} \quad & x = y = 0 \\ \text{e se} \quad & (x, y, z) \in W, \\ \text{por (4.52), deveremos ter:} \quad & x + y + z = 0 . \end{aligned}$$

Logo, temos que encontrar todas as soluções do sistema linear:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases},$$

$$\text{ou seja,} \quad (x, y, z) = (0, 0, 0) = O .$$

Portanto

$$U \cap W = \{O\},$$

mostrando que

$$\mathbb{R}^3 = U \oplus W.$$

□

Temos também o:

Exemplo 4.53 *Considere* U *e* W *os seguintes subespaços do espaço vetorial real* $\left(\mathbb{R}^3, +, \cdot\right)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $\mathbb{R}^3$*) dados por*

$$U \doteq \left\{(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,;\ \ x = 0\right\} \quad e \quad W \doteq \left\{(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,;\ \ y = 0\right\}. \tag{4.54}$$

Mostre que

$$\mathbb{R}^3 = U + W\,,$$

mas a soma **não** *é direta.*

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação que U e W, dados por (4.54), são subespaços do espaço vetorial real $\left(\mathbb{R}^3, +, \cdot\right)$.

Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, podemos escrever

$$(x\,,y\,,z) = \underbrace{(0\,,y\,,z)}_{\in U\,,\ \text{por } (4.54)} + \underbrace{(x\,,0\,,0)}_{\in W\,,\ \text{por } (4.54)} \in U + W,$$

pois

$$(0\,,y\,,z) \in U \quad \text{e} \quad (x\,,0\,,0) \in W\,.$$

Portanto,

$$\mathbb{R}^3 = U + W\,.$$

No entanto, a soma **não** é direta, isto é,,

$$U \cap V \neq \{(0\,,0\,,0)\}\,.$$

De fato, pois, por exemplo,

$$(0\,,0\,,1) \in U \cap V\,.$$

□

Deixaremos a cargo do leitor os:

Exercício 4.55 *Vimos no Exemplo (4.17) e no Exercício (4.19) que*

$$W_s \doteq \left\{A \in M_n(\mathbb{R})\,;\, A^t = A\right\} \quad e \quad W_a \doteq \left\{B \in M_n(\mathbb{R})\,;\, B^t = -B\right\}$$

são subespações vetoriais de $(M_n(\mathbb{R})\,, +\,, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de adição de matrizes e multiplicação de número real por matrizes, respectivamente).*

Mostre que (Exercício 12 (c) da 2.a lista de Exercícios)

$$M_n(\mathbb{R}) = W_s \oplus W_a.$$

Resolução:

Sugestão: mostre que se $C \in M_n(\mathbb{R})$, então podemos escrever:

$$C = \underbrace{\frac{C + C^t}{2}}_{\doteq A} + \underbrace{\frac{C - C^t}{2}}_{\doteq B}$$

e que

$$A \in W_s \quad \text{e} \quad B \in W_a\,.$$

Observação 4.56 *Logo, da Proposição (4.45), o Exercício (4.55) acima nos diz que toda matriz* $C \in M_n(\mathbb{R})$ *pode ser escrita,* **de modo único**, *como soma de uma matriz simétrica com uma matriz anti-simétrica.*

Exercício 4.57 *Sejam*

$$P(\mathbb{R}\,;\,\mathbb{R}) \doteq \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})\,;\, f(-x) = f(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\}$$

e

$$I(\mathbb{R}\,;\,\mathbb{R}) \doteq \{g \in \mathscr{F}(\mathbb{R})\,;\, g(-x) = -g(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\},$$

onde $(\mathscr{F}(\mathbb{R}\,;\,\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$ *é o espaço vetorial real do Exemplo (3.22) (com* $I \doteq \mathbb{R}$*).*

1. *Mostre que* $P(\mathbb{R}\,;\,\mathbb{R})$ *e* $I(\mathbb{R}\,;\,\mathbb{R})$ *são subespações vetoriais de* $(\mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$.

2. *Mostre que (Exercício 5 da 2.a lista de Exercícios)*

$$\mathscr{F}(\mathbb{R}\,;\,\mathbb{R}) = P(\mathbb{R}\,;\,\mathbb{R}) \oplus I(\mathbb{R}\,;\,\mathbb{R})\,.$$

Resolução:
Sugestão: mostre que se $h \in \mathscr{F}(\mathbb{R}\,;\,\mathbb{R})$, podemos escrever:

$$h(x) = \underbrace{\frac{h(x) + h(-x)}{2}}_{\doteq f(x)} + \underbrace{\frac{h(x) - h(-x)}{2}}_{\doteq g(x)}\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}$$

e

$$f \in P(\mathbb{R}\,;\,\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad g \in I(\mathbb{R}\,;\,\mathbb{R})\,.$$

Observação 4.58 *O conjunto* $P(\mathbb{R}\,;\,\mathbb{R})$ *(o conjunto* $I(\mathbb{R}\,;\,\mathbb{R})$*, respectivamente) é o conjunto formado por todas as funções de* $\mathscr{F}(\mathbb{R}\,;\,\mathbb{R})$ *que são funções pares (funções ímpares, respectivamente).*

Logo, da Proposição (4.45), o Exercício (4.57) acima nos diz que toda função de $\mathscr{F}(\mathbb{R}\,;\,\mathbb{R})$ *pode ser escrita,* **de modo único**, *como soma de uma função par com uma função ímpar.*

Podemos estender a noção de soma de subespaços de um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) para um número finito de subespaços vetoriais, a saber:

Definição 4.59 *Sejam* $U_1\,, U_2 \cdots, U_n$ *subespaços vetoriais de um espaço vetorial real (respectivamente, complexo)* $(V\,,+\,,\cdot)$.

Definimos a **soma dos** n **subespaços vetoriais** $U_1\,, U_2\,, \cdots, U_n$*, que será indicada por* $\sum_{j=1}^{n} U_j$*, como sendo:*

$$\sum_{j=1}^{n} U_j = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$$
$$\doteq \{u_1 + u_2 + \cdots + u_n\,;\, u_j \in U_j\,,\ \textit{para cada}\ j \in \{1\,,2 \cdots, n\}\}\,. \tag{4.60}$$

Como isto podemos enunciar e demonstrar a:

Proposição 4.61 *Sejam* $U_1, U_2 \cdots, U_n$ *subespaços vetoriais de um espaço vetorial real (respectivamente, complexo)* $(V, +, \cdot)$.

Então

$$U_1 + U_2 + \cdots + U_n \quad e \quad U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n$$

são um subespaços vetoriais do espaço vetorial real (respectivamente, complexo) $(V, +, \cdot)$.

Demonstração:

As demonstrações são semelhantes a da Proposição (4.39) e da Proposição (4.35), respectivamente.

As suas elaborações serão deixadas como exercício para o leitor.

■

Com isto podemos estender a noção de soma direta para um número finito de subespaços vetoriais de um espaço vetorial real, a saber:

Definição 4.62 *Sejam* $U_1, U_2, \cdots, U_n$ *subespaços vetoriais de um espaço vetorial real (respectivamente, complexo)* $(V, +, \cdot)$.

Dizemos que a **soma dos n subespaços vetoriais U_j, para $j \in \{1, 2, \cdots n\}$** *é uma* **soma direta** *se, para cada* $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, *temos que:*

$$U_j \cap (U_1 + \cdots + U_{j-1} + U_{j+1} \cdots + U_n) = \{O\}.$$

Neste caso usaremos a notação

$$U_1 \oplus \cdots \oplus U_n \quad ou \quad \bigoplus_{j=1}^{n} U_j,$$

para denotar a soma (direta) dos $\underline{n}$ *subespaços vetoriais* $U_1, U_2, \cdots, U_n$.

Observação 4.63

1. *A expressão*

$$(U_1 + \cdots + U_{j-1} + U_{j+1} \cdots + U_n)$$

será denotada por

$$\left(U_1 + \cdots + \widehat{U_j} + \cdots + U_n\right),$$

onde símbolo $\widehat{U_j}$ *significa que a parcela* U_j *deve ser omitida da soma considerada.*

2. *Notemos que, para cada* $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, *temos que o conjunto* U_j *é um subespaço vetorial do espaço vetorial real (respectivamente, complexo)* $(V, +, \cdot)$.

Logo $O \in U_j$, *assim sempre teremos que*

$$O \in U_j \cap \left(U_1 + \cdots + \widehat{U_j} + \cdots + U_n\right).$$

Com isto temos a:

Proposição 4.64 *Sejam* $U_1, U_2, \cdots, U_n$ *subespaços vetoriais de um espaço vetorial real (respectivamente, complexo)* $(V, +, \cdot)$.

Então

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n \tag{4.65}$$

se, e somente se, dado $v \in V$*, para cada* $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$*, existe um único* $u_j \in U_j$*, de modo que*

$$v = u_1 + \cdots + u_n\,. \tag{4.66}$$

Demonstração:

A prova é feita por indução sobre $\underline{n}$ e é análoga a da Proposição (4.45).

Devido a este fato, deixaremos os detalhes como exercício para o leitor.

∎

Apliquemos isto ao:

Exemplo 4.67 *Mostre que o espaço vetorial real* $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de adição de elementos de* $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ *e multiplicação de número real por elemento de* $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$*, respectivamente) é soma direta dos seguintes subespaços vetoriais*

$$U_o \doteq \{p_o\,;\;\; p_o(x) = a_o\,,\;\; \textit{para } x \in \mathbb{R}\,,\;\; \textit{para algum } a_o \in \mathbb{R}\}\,, \tag{4.68}$$

$$U_1 \doteq \{p_1\,;\;\; p_1(x) = a_1\,x\,,\;\; \textit{para } x \in \mathbb{R}\,,\;\; \textit{para algum } a_1 \in \mathbb{R}\}\,, \tag{4.69}$$

$$U_2 \doteq \left\{p_2\,;\;\;,\;\; p_2(x) = a_2\,x^2\,,\;\; \textit{para } x \in \mathbb{R}\,,\;\; \textit{para algum } a_2 \in \mathbb{R}\right\}\,. \tag{4.70}$$

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação que os conjunto U_o, U_1 e U_2 são subespaços vetoriais do espaço vetorial real $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Afirmamos que

$$\mathscr{P}_2(\mathbb{R}) = U_o \oplus U_1 \oplus U_2\,.$$

Mostremos, primeiramente, que

$$\mathscr{P}_2(\mathbb{R}) = U_o + U_1 + U_2\,.$$

Para isto, seja $p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$.

Logo existem $a_o, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, tais que

$$\begin{aligned} p(x) &= a_o + a_1\,x + a_2\,x^2 \\ &= \underbrace{p_o(x)}_{\in U_o\,,\ \text{por }(4.68)} + \underbrace{p_1(x)}_{\in U_1\,,\ \text{por }(4.69)} + \underbrace{p_2(x)}_{\in U_2\,,\ \text{por }(4.70)}\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,, \end{aligned}$$

mostrando que

$$\mathscr{P}_2(\mathbb{R}) = U_o + U_1 + U_2\,.$$

Verifiquemos que a soma é direta.

1. Afirmamos que
$$U_o \cap (U_1 + U_2) = \{O\}.$$
Para mostrarmos isto, seja
$$\begin{aligned} & p \in U_o \cap (U_1 + U_2)\,, \\ \text{isto é,} \quad & p \in U_o \quad \text{e} \quad p \in (U_1 + U_2)\,. \end{aligned}$$
Então existem $a_o\,, a_1\,, a_2 \in \mathbb{R}$, tais que
$$p(x) = \underbrace{p_o(x)}_{\in U_o} \overset{(4.68)}{=} a_o \tag{4.71}$$
e
$$p(x) = \underbrace{p_1(x)}_{\in U_1} + \underbrace{p_2(x)}_{\in U_2} \overset{(4.69) \text{ e } (4.70)}{=} a_1\,x + a_2\,x^2\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{4.72}$$
Se o polinômio $\underline{p}$ não fosse o polinômio nulo teríamos, por (4.71), que o polinômio $\underline{p}$ deveria ter grau 0, e coincidindo com o polinômio $\underline{p}$, dado por (4.72), que tem grau no mínimo 1, o que seria um absurdo.

Logo, o polinômio $\underline{p}$ deve ser o polinômio nulo, ou seja,
$$p(x) = 0\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,,$$
mostrando que
$$U_o \cap (U_1 + U_2) = \{O\}.$$

2. Afirmamos que
$$U_1 \cap (U_o + U_2) = \{O\}.$$
Para mostrarmos isto, seja
$$\begin{aligned} & p \in U_1 \cap (U_o + U_2)\,, \\ \text{isto é,} \quad & p \in U_1 \quad \text{e} \quad p \in (U_o + U_2)\,. \end{aligned}$$
Então existem $a_o\,, a_1\,, a_2 \in \mathbb{R}$, tais que
$$p(x) = \underbrace{p_1(x)}_{\in U_1} \overset{(4.69)}{=} a_1\,x \tag{4.73}$$
e
$$p(x) = \underbrace{p_o(x)}_{\in U_o} + \underbrace{p_2(x)}_{\in U_2} = a_o + a_2\,x^2\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{4.74}$$

Se o polinômio $\underline{p}$ não fosse o polinômio nulo teríamos, por (4.73), que o polinômio $\underline{p}$ teria grau 1, e coincidindo com o polinômio $\underline{p}$, dado por (4.74), que tem grau 0 (se $a_2 = 0$) ou 2 (se $a_2 \neq 0$), o que seria um absurdo.

Logo, o polinômio $\underline{p}$ deve ser o polinômio nulo, ou seja,

$$p(x) = 0, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R},$$

mostrando que

$$U_1 \cap (U_o + U_2) = \{O\}.$$

3. Afirmamos que

$$U_2 \cap (U_o + U_1) = \{O\}.$$

Para mostramos isto, seja

$$p \in U_2 \cap (U_o + U_1),$$
$$\text{isto é,} \qquad p \in U_2 \quad \text{e} \quad p \in (U_o + U_1).$$

Então existem $a_o, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} p(x) &= \underbrace{p_2(x)}_{\in U_2} \\ &\overset{(4.70)}{=} a_2\, x^2 \end{aligned} \tag{4.75}$$

e

$$\begin{aligned} p(x) &= \underbrace{p_o(x)}_{\in U_o} + \underbrace{p_1(x)}_{\in U_1} \\ &= a_o + a_1\, x, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{4.76}$$

Se o polinômio $\underline{p}$ não fosse o polinômio nulo teríamos que o polinômio $\underline{p}$, dado por (4.75), deveria ter grau 2, e coincidindo com o polinômio $\underline{p}$, dado por (4.76), que tem grau 0 (se $a_1 = 0$) ou gaur 1 (se $a_1 \neq 0$), o que seria um absurdo.

Logo, o polinômio $\underline{p}$ deve ser o polinômio nulo, ou seja,

$$p(x) = 0, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R},$$

mostrando que

$$U_2 \cap (U_o + U_1) = \{O\}.$$

Com isto, podemos conlcuir que

$$\mathscr{P}_2(\mathbb{R}) = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3.$$

□

4.3 Exercícios

Capítulo 5

Combinações Lineares

5.1 Introdução e Exemplos

Vimos no capítulo anterior que um subespaço vetorial é um subconjunto de um espaço vetorial real que é fechado com relação à adição de vetores e também com relação à multiplicação de vetor por escalar. Em outras palavras, quando somamos dois vetores de um subespaço vetorial ou multiplicamos um vetor do subespaço por um escalar, o resultado é um elemento deste subespaço. Quando combinamos repetidas vezes estas ações temos o que chamamos de *combinação linear entre vetores.*

Mais precisamente,

Definição 5.1 *Sejam* $u_1, u_2, \cdots, u_n$ *vetores de um espaço vetorial real (respectivamente, complexo)* $(V, +, \cdot)$.

Diremos que o vetor $u \in V$ *é uma* **combinação linear** *dos vetores*

$$u_1, u_2, \cdots, u_n,$$

se existirem escalares

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ (respectivamente, } \mathbb{C}),$$

de modo que

$$u = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n. \tag{5.2}$$

Observação 5.3 *Sejam* $(V, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) e* $U \subseteq V$ *é um subespaço vetorial de* $(V, +, \cdot)$.

Se

$$u_1, u_2, \cdots, u_n \in U \quad e \quad \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ (respectivamente, } \mathbb{C}),$$

então a combinação linear

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n$$

pertence a U, *isto é,*

$$(\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n) \in U.$$

Apliquemos essas ideais ao:

Exemplo 5.4 *Consideremos o espaço vetorial real* $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de adição de funções e multiplicação de número real por função, respectivamente) e o polinômio* $p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$*, dado por*

$$p(x) \doteq 2 + x^2, \quad \textit{para cada,} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{5.5}$$

Mostre que o polinômio $\underline{p}$ *é uma combinação dos polinômios* $p_o, p_1, p_2 \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$*, onde*

$$p_o(x) \doteq 1, \quad p_1(x) \doteq x, \quad p_2(x) \doteq x^2, \quad \textit{para cada,} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{5.6}$$

Resolução:

Observemos que

$$\begin{aligned} p(x) &= 2 + x^2 \\ &= 2 \cdot \underbrace{1}_{=p_o(x)} + 0 \cdot \underbrace{x}_{=p_1(x)} + 1 \cdot \underbrace{x^2}_{=p_2(x)} \\ &= \underbrace{2}_{\doteq \alpha_o} \cdot p_o(x) + \underbrace{0}_{\doteq \alpha_1} \cdot p_1(x) + \underbrace{1}_{\doteq \alpha_2} \cdot p_2(x), \end{aligned}$$

para cada $x \in \mathbb{R}$, isto é,

$$p = 2 \cdot p_o + 0 \cdot p_1 + 1 \cdot p_2, \tag{5.7}$$

mostrando que realmente o polinômio $p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, dado por (5.5), é uma combinação dos polinômios $p_o, p_1, p_2 \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, dados por (5.6).

□

Exemplo 5.8 *Mostre que no espaço vetorial real* $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de adição de funções e multiplicação de número real por função, respectivamente), o polinômio* $p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ *dado por*

$$p(x) \doteq 1 + x^2, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}, \tag{5.9}$$

é uma combinação dos polinômios $q_o, q_1, q_2 \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$*, onde*

$$q_o(x) \doteq 1, \quad q_1(x) \doteq 1 + x \quad \textit{e} \quad q_2(x) \doteq 1 + x + x^2, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{5.10}$$

Resolução:

Para mostrarmos o que é pedido precisamos encontrar números reais $\alpha_o, \alpha_1, \alpha_2$, de modo que

$$p = \alpha_o \cdot q_o + \alpha_1 \cdot q_1 + \alpha_2 \cdot q_2. \tag{5.11}$$

Ou seja, para cada $x \in \mathbb{R}$, precisamos encontrar $\alpha_o, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, de tal modo que:

$$\begin{aligned} 1 + x^2 &\overset{(5.9)}{=} p(x) \\ &\overset{(5.11)}{=} \alpha_o\, q_o(x) + \alpha_1\, q_1(x) + \alpha_2\, q_2(x) \\ &\overset{(5.10)}{=} \alpha_o + \alpha_1\,(1 + x) + \alpha_2\,\left(1 + x + x^2\right) \\ &= (\alpha_o + \alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_1 + \alpha_o)\, x + \alpha_2\, x^2, \end{aligned}$$

que é equivalente ao sistema linear:

$$\begin{cases} \alpha_o + \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases},$$

cuja (única) solução será: $$\begin{cases} \alpha_o = 1\,, \\ \alpha_1 = -1 \\ \alpha_2 = 1\,, \end{cases}$$

ou seja, $$p = 1 \cdot q_o + (-1) \cdot q_1 + 1 \cdot q_2\,, \tag{5.12}$$

mostrando que o polinômio $\underline{p}$ é combinação linear dos vetores $q_o\,, q_1\,, q_2$, em $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

□

20.08.2015 - 6.a

5.2 Geradores

Tendo a definição de combinação linear podemos introduzir a:

Definição 5.13 *Sejam* $(V\,,+\,,\cdot)$ *um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) e* S *um subconjunto não vazio de* V.

Denotaremos por $[S]$, *o conjunto formado por todas as combinações lineares dos elementos do conjunto* S.

Em outras palavras, $u \in [S]$ *se, e somente se, existirem*

$$\alpha_1\,, \alpha_2\,, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ (respectivamente, } \mathbb{C}) \quad e \quad u_1\,, u_2\,, \cdots, u_n \in S\,,$$

tais que

$$u = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n\,, \tag{5.14}$$

ou ainda,

$$[S] \doteq \{\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n\,; \\ \text{com } u_i \in S \text{ e } \alpha_i \in \mathbb{R} \text{ (respectivamente, } \mathbb{C})\,, \text{ para } i \in \{1\,,2\,,\cdots,n\}\}. \tag{5.15}$$

Com isto temos a:

Proposição 5.16 *Sejam* $(V\,,+\,,\cdot)$ *um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) e* S *um subconjunto não vazio de* V.

Então o conjunto $[S]$ *é um subespaço vetorial do espaço vetorial real (respectivamente, complexo)* $(V\,,+\,,\cdot)$.

Demonstração:

1. Como, por hipoótese, $S \neq \emptyset$, existe $u \in S$.

   Com isto teremos que
$$O \overset{\text{item 2. da Proposição (3.31)}}{=} 0 \cdot u \overset{(5.15)}{\in} [S],$$
   ou seja, o vetor nulo é uma combinação linear (o escalar será o número real 0) do vetor $u \in S$, assim
$$O \in [S].$$

2. Se $u, v \in [S]$, de (5.15), deverão existir escalares
$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m \in \mathbb{R} \text{ (respectivamente, } \mathbb{C})$$
   e vetores
$$u_1, u_2, \cdots, u_n, v_1, v_2, \cdots, v_m \in S,$$
   de modo que
$$u = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n \quad \text{e} \quad v = \beta_1 \cdot v_1 + \beta_2 \cdot v_2 + \cdots + \beta_m \cdot v_m. \quad (5.17)$$
   Assim, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, segue, das propriedades básicas de espaços vetoriais reais, que
$$\begin{aligned} u + \lambda \cdot v &\overset{(5.17)}{=} [\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n] + \lambda \cdot [\beta_1 \cdot v_1 + \beta_2 \cdot v_2 + \cdots + \beta_m \cdot v_m] \\ &= \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n \\ &\quad + (\lambda\, \beta_1) \cdot v_1 + (\lambda\, \beta_2) \cdot v_2 + \cdots + (\lambda\, \beta_m) \cdot v_m \overset{(5.15)}{\in} [S], \end{aligned}$$
   mostrando que
$$(u + \lambda \cdot v) \in [S].$$
   Portanto, dos itens 1. e 2. acima e da Observação (4.8), segue que o conjunto $[S]$ será um subespaço vetorial do espaço vetorial real (respectivamente, complexo) $(V, +, \cdot)$, completando a demonstração do resultado.

∎

Definição 5.18 *Sejam S e $(V, +, \cdot)$, como na Definição (5.13) acima.*
Diremos que o subespaço vetorial $[S]$ é o **subespaço vetorial gerado pelo conjunto S.**

Os elementos do conjunto S serão denominados **geradores** *do subespaço vetorial $[S]$. Se*
$$S = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$$
utilizaremos a seguinte notação
$$[u_1, u_2, \cdots, u_n] \doteq [S].$$

Observação 5.19 *Com as Definições* (5.13) *e* (5.18) *acima, se* $u_1, u_2, \cdots, u_n \in V$, *temos que*

$$[u_1, u_2, \cdots, u_n] \doteq \{\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n \; ; \; \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ (respectivamente, } \mathbb{C})\} . \tag{5.20}$$

Com isto temos a:

Proposição 5.21 *Sejam* S *e* T *subconjuntos, não-vazios, de um espaço vetorial real (respectivamente, complexo)* $(V, +, \cdot)$.

1. *Temos que*
$$S \subseteq [S] . \tag{5.22}$$

2. *Se*
$$S \subseteq T , \quad \textit{então} \quad [S] \subseteq [T] . \tag{5.23}$$

3. *Temos que*
$$[[S]] = [S] . \tag{5.24}$$

4. *Se* S *é um subespaço vetorial do espaço vetorial real (respectivamente, complexo)* $(V, +, \cdot)$, *então*
$$S = [S] . \tag{5.25}$$

5. *Vale a seguinte identidade:*
$$[S \cup T] = [S] + [T] . \tag{5.26}$$

Demonstração:

1. Notemos que
$$\text{se} \quad u \in S , \quad \text{então} \quad u = 1 \cdot u ,$$
ou seja, o vetor $\underline{u}$ é combinação linear (com escalar igual a 1) do próprio vetor $\underline{u}$, que pertence a S.

   Logo
$$u = 1 \cdot u \in [S] ,$$
mostrando que
$$S \subseteq [S] ,$$
como queríamos demonstrar.

2. Notemos que, se $u \in [S]$, de (5.15), segue que existirão escalares
$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ (respectivamente, } \mathbb{C})$$
e vetores
$$u_1, u_2, \cdots, u_n \in S ,$$

tais que
$$u = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n .$$
Como
$$S \subseteq T , \quad \text{teremos que} \quad u_1 , u_2 , \cdots , u_n \in T .$$
Portanto, o vetor $\underline{u}$ é combinação linear de vetores de T, ou seja,
$$u \in [T] ,$$
ou seja,
$$[S] \subseteq [T] ,$$
como queríamos demonstrar.

3. Pelo item 1. desta Proposição, segue que
$$S \subseteq [S] .$$
Logo, do mesmo resultado, segue que
$$[S] \subseteq [[S]] .$$
Para mostrar a outra inclusão, consideremos
$$u \in [[S]] .$$
Segue, da Definição (5.13) de subespaço gerado, que o vetor $\underline{u}$ é uma combinação linear de elementos de $[S]$.

Novamente pela Definição (5.13), como cada elemento de $[S]$ é uma combinação linear de elementos de S, resulta que o vetor $\underline{u}$ será uma combinação linear de elementos de S, ou seja, $u \in [S]$, mostrando que
$$[[S]] \subseteq [S] .$$
Portanto
$$[[S]] = [S] ,$$
como queríamos demonstrar.

4. Pelo item 1. desta Proposição, segue que
$$S \subseteq [S] .$$
Mostremos a outra inclusão.

Para isto, seja $u \in [S]$.

Então, o vetor $\underline{u}$ é uma combinação linear de elementos de S.

Como S é um subespaço vetorial do espaço vetorial real (respectivamente, complexo) $(V, +, \cdot)$, esta combinação linear será um elemento de S, ou seja,

$$[S] \subseteq S.$$

Portanto

$$S = [S],$$

como queríamos demonstrar.

5. Mostremos que

$$[S \cup T] \subseteq [S] + [T].$$

Para isto, seja

$$u \in [S \cup T].$$

Da Definição (5.13) de subespaço gerado segue que, existirão escalares

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m \in \mathbb{R} \text{ (respectivamente, } \mathbb{C})$$

e vetores

$$u_1, u_2, \cdots, u_n \in S \quad \text{e} \quad v_1, v_2, \cdots, v_m \in T,$$

tais que

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n + \beta_1 \cdot v_1 + \beta_2 \cdot v_2 + \cdots + \beta_m \cdot v_m \\ &= (\underbrace{\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n}_{\in [S]}) + (\underbrace{\beta_1 \cdot v_1 + \beta_2 \cdot v_2 + \cdots + \beta_m \cdot v_m}_{\in [T]}) \in [S] + [T], \end{aligned}$$

ou seja, vale

$$[S \cup T] \subseteq [S] + [T].$$

Mostremos agora que

$$[S] + [T] \subseteq [S \cup T].$$

Para isto, seja

$$u \in [S] + [T].$$

Então

$$u = v + w, \quad \text{onde} \quad v \in [S] \quad \text{e} \quad w \in [T].$$

Da Definição (5.13) de subespaço gerado, deverão existir escalares

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_q \in \mathbb{R} \text{ (respectivamente, } \mathbb{C})$$

e vetores

$$v_1, v_2, \cdots, v_p \in S \quad \text{e} \quad w_1, w_2, \cdots, w_q \in T,$$

tais que

$$\begin{aligned} u &= v + w \\ &= (\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \cdots + \alpha_p \cdot v_p) + (\beta_1 \cdot w_1 + \beta_2 \cdot w_2 + \cdots + \beta_q \cdot w_q) \\ &= \alpha_1 \cdot \underbrace{v_1}_{\in S \subseteq S \cup T} + \cdots + \alpha_p \cdot \underbrace{v_p}_{\in S \subseteq S \cup T} + \beta_1 \cdot \underbrace{w_1}_{\in T \subseteq S \cup T} + \cdots + \beta_q \cdot \underbrace{w_q}_{\in T \subseteq S \cup T} \in [S \cup T], \end{aligned}$$

ou seja, vale

$$[S] + [T] \subseteq [S \cup T],$$

completando a demonstração do resultado.

∎

Com as definições acima podemos introduzir a:

Definição 5.27 *Dizemos que um espaço vetorial real (respectivamente, complexo)* $(V, +, \cdot)$ *é* **finitamente gerado**, *se existir um subconjunto* **finito** $S \subseteq V$, *tal que*

$$V = [S], \tag{5.28}$$

ou seja, V *é igual ao subespaço gerado pelo conjunto* S.

A seguir exibiremos alguns exemplos de espaços vetoriais reais finitamente gerados e não finitamente gerado.

Exemplo 5.29 *O espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de soma de 4-uplas e multiplicação de número real por 4-uplas, respectivamente) é finitamente gerado.*

Resolução:

De fato, consideremos os seguintes vetores de $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$:

$$e_1 \doteq (1, 0, 0, 0), \quad e_2 \doteq (0, 1, 0, 0), \quad e_3 \doteq (0, 0, 1, 0) \quad \text{e} \quad e_4 \doteq (0, 0, 0, 1).$$

Então, se

$$u \in \mathbb{R}^4,$$

temos que existem escalares

$$a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R},$$

tais que

$$u = (a_1, a_2, a_3, a_4).$$

ou seja,

$$\begin{aligned} u &= (a_1, a_2, a_3, a_4) \\ &= (a_1, 0, 0, 0) + (0, a_2, 0, 0, 0) + (0, 0, a_3, 0) + (0, 0, 0, a_4) \\ &= a_1 \cdot (1, 0, 0, 0) + a_2 \cdot (0, 1, 0, 0, 0) + a_3 \cdot (0, 0, 1, 0) + a_4 \cdot (0, 0, 0, 1) \\ &= a_1 \cdot e_1 + a_2 \cdot e_2 + a_3 \cdot e_3 + a_4 \cdot e_4, \end{aligned}$$

mostrando que qualquer vetor $u \in \mathbb{R}^4$, pode ser escrito como combinação linear dos vetores $e_1, e_2, e_3, e_4 \in \mathbb{R}^4$, ou seja,

$$\mathbb{R}^4 = [e_1, e_2, e_3, e_4].$$

Portanto o espaço vetorial real $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ é finitamente gerado.

□

Observação 5.30 *Notemos que o conjunto*

$$S \doteq \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$$

é um conjunto finito formado por geradores do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$.

Podemos estender o exemplo acima a seguinte situação:

Exercício 5.31 *Seja $n \in \mathbb{N}$ fixado. O espaço vetorial real $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ (onde $+$ e $\cdot$ são as operações usuais de soma de n-uplas e multiplicação de número real por n-uplas, respectivamente) é finitamente gerado.*

Resolução:

De fato, consideremos os seguintes vetores de $\mathbb{R}^n$:

$$e_1 \doteq (1, 0, \cdots, 0), \quad e_2 \doteq (0, 1, 0, \cdots, 0), \cdots, \; e_n \doteq (0, \cdots, 0, 1).$$

Então, se

$$u \in \mathbb{R}^n,$$

temos que existem escalares

$$a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R},$$

tais que

$$u = (a_1, a_2, \cdots, a_n).$$

ou seja,

$$\begin{aligned} u &= (a_1, a_2, \cdots, a_n) \\ &= (a_1, 0, \cdots, 0) + (0, a_2, 0, \cdots, 0) + \cdots + (0, \cdots, 0, a_n) \\ &= a_1 \cdot (1, 0, \cdots, 0) + a_2 \cdot (0, 1, 0, \cdots, 0) + \cdots + a_n \cdot (0, \cdots, 0, 1) \\ &= a_1 \cdot e_1 + a_2 \cdot e_2 + \cdots + a_n \cdot e_n, \end{aligned}$$

mostrando que o vetor $u \in \mathbb{R}^n$, pode ser escrito como combinação linear dos vetores

$$e_1, e_2, \cdots, e_n \in \mathbb{R}^n,$$

ou seja,

$$\mathbb{R}^n = [e_1, e_2, \cdots, e_n].$$

Portanto o espaço vetorial real $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ é finitamente gerado.

□

Observação 5.32 *Notemos que o conjunto*

$$S \doteq \{e_1 , e_2 , \cdots , e_n\}$$

é um conjunto finito formado por geradores do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^n , + , \cdot)$.

Exemplo 5.33 *O espaço vetorial real* $(M_{2\times 3}(\mathbb{R}) , + , \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de soma de matrizes e multiplicação de número real por matrizes, respectivamente) é gerado pelas seguintes 6 seguintes matrizes, de tipo* 2×3*:*

$$E_{11} \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad E_{12} \doteq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad E_{13} \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$
$$E_{21} \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad E_{22} \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad E_{23} \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Em particular, $(M_{2\times 3}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *é finitamente gerado.*

Resolução:

De fato, se

$$A \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}) ,$$

segue que existirão escalares

$$a_{11} , a_{12} , a_{13} , a_{21} , a_{22} , a_{23} \in \mathbb{R} ,$$

tais que

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} ,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \end{pmatrix} \\ &= a_{11} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{13} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\qquad + a_{21} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{22} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{23} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= a_{11} \cdot E_{11} + a_{12} \cdot E_{12} + a_{13} \cdot E_{13} + a_{21} \cdot E_{21} + a_{22} \cdot E_{22} + a_{23} \cdot E_{23} , \end{aligned}$$

mostrando que a matriz $A \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$, pode ser escrita como combinação linear das matrizes $E_{11} , E_{12} , E_{13} , E_{21} , E_{22} , E_{23} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$, ou seja,

$$M_{2\times 3}(\mathbb{R}) = [E_{11} , E_{12} , E_{13} , E_{21} , E_{22} , E_{23}] .$$

Portanto o espaço vetorial real $(M_{2\times 3}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ é finitamente gerado.

□

Observação 5.34 *Notemos que o conjunto*

$$S \doteq \{E_{11}\,,E_{12}\,,E_{13}\,,E_{21}\,,E_{22}\,,E_{23}\}$$

é um conjunto finito formado por geradores do espaço vetorial real $(M_{2\times 3}(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$*.*

Podemos estender o Exemplo acima acima ao seguinte Exercício, cuja resolução será deixada para o leitor:

Exercício 5.35 *Sejam* $m\,,n \in \mathbb{N}$ *fixados. O espaço vetorial real* $(M_{m\times n}(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais soma de matrizes e multiplicação de número real por matrizes, respectivamente) é gerado pelas* $m\cdot n$ *matrizes:*

$$E_{kl} \doteq \left(\delta_{i,j}^{(k,l)}\right)\,, \quad \textit{para cada} \quad k \in \{1\,,2\,,\cdots\,,m\} \quad \textit{e} \quad l \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}\,,$$

onde, para cada $k \in \{1\,,2\,,\cdots\,,m\}$ *e* $l \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}$ *fixados, temos que:*

$$\delta_{i,j}^{(k,l)} \doteq \begin{cases} 1\,, & \textit{para} \quad (i\,,j) = (k\,,l)\,, \\ 0\,, & \textit{para} \quad (i\,,j) \neq (k\,,l) \end{cases}.$$

Exemplo 5.36 *O espaço vetorial real* $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de soma de funções e multiplicação de número real por função, respectivamente) é finitamente gerado.*

Resolução:

De fato, consideremos $p_o\,,p_1\,,p_2 \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ os seguintes polinômios:

$$p_o(x) \doteq 1\,, \quad p_1(x) \doteq x\,, \quad p_2(x) \doteq x^2\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Então se

$$p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})\,,$$

temos que existirão escalares

$$a_o\,,a_1\,,a_2 \in \mathbb{R}\,,$$

tais que

$$p(x) = a_o + a_1\,x + a_2\,x^2\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} p(x) &= a_o.\underbrace{1}_{=p_o(x)} + a_1\cdot\underbrace{x}_{=p_1(x)} + \cdots + a_2\cdot\underbrace{x^2}_{=p_2(x)} \\ &= (a_o.p_o + a_1\cdot p_1 + a_2\cdot p_2)(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,, \end{aligned}$$

mostrando que o polinômio $p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ pode ser escrito como combinação linear dos polinômios $p_o\,,p_1\,,p_2 \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, ou seja,

$$\mathscr{P}_2(\mathbb{R}) = [p_o\,,p_1\,,p_2]\,.$$

Portanto o espaço vetorial real $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$ é finitamente gerado.

$\square$

Observação 5.37 *Notemos que o conjunto*

$$S \doteq \{p_o, p_1, p_2\}$$

é um conjunto finito formado por geradores do espaço vetorial real $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Podemos estender o Exemplo acima a seguinte situação:

Exercício 5.38 *Seja* $n \in \mathbb{N}$ *fixado. O espaço vetorial real* $(\mathscr{P}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de soma de funções e multiplicação de número real por função, respectivamente) é finitamente gerado.*

Resolução:

De fato, consideremos $p_o, p_1, p_2, \cdots, p_n \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ os seguintes polinômios:

$$p_o(x) \doteq 1, \quad p_1(x) \doteq x, \quad p_2(x) \doteq x^2, \cdots, \quad p_n(x) \doteq x^n, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Então se

$$p \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$$

temos que existirão escalares

$$a_o, a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R},$$

tais que

$$p(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2 \cdots + a_n x^n, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} p(x) &= a_o . \underbrace{1}_{=p_o(x)} + a_1 \cdot \underbrace{x}_{=p_1(x)} + a_2 \cdot \underbrace{x^2}_{=p_2(x)} + \cdots + a_n \cdot \underbrace{x^n}_{=p_n(x)} \\ &= (a_o \cdot p_o + a_1 \cdot p_1 + a_2 \cdot p_2 + \cdots + a_n \cdot p_n)(x), \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

mostrando que o polinômio $p \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ pode ser escrito como combinação linear dos polinômios $p_o, p_1, p_2, \cdots, p_n \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$, ou seja,

$$\mathscr{P}_n(\mathbb{R}) = [p_o, p_1, p_2, \cdots, p_n].$$

Portanto o espaço vetorial real $(\mathscr{P}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ é finitamente gerado.

$\square$

Observação 5.39 *Notemos que conjunto*

$$S \doteq \{p_o, p_1, p_2, \cdots, p_n\}$$

é um conjunto finito formado por geradores do espaço vetorial real $(\mathscr{P}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Um outro caso importante é dado pelo:

Exemplo 5.40 *Consideremos o espaço vetorial real* $(\mathscr{P}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de soma de funções e multiplicação de número real por função, respectivamente), onde* $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ *denota o conjunto formado por todos os polinômios com coeficientes reais.*

Afirmamos que $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ **não** *é finitamente gerado.*

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor verificar que $(\mathscr{P}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ é um espaço vetorial real.

Note que

$$\mathscr{P}_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{R}),$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado.

Suponhamos, por absurdo, que o espaço vetorial real $(\mathscr{P}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ é finitamente gerado, ou seja, existe um número finito de polinômios $p_1, p_2, \cdots, p_n \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ tais que

$$\mathscr{P}(\mathbb{R}) = [p_1, p_2, \cdots, p_n].$$

Seja $N \in \mathbb{N}$, o grau mais alto entre os polinômios da coleção

$$p_1, p_2, \cdots, p_n,$$

que existe pois, temos somente um número finito de polinômios da coleção acima.

Com isto temos que o polinômio $p \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$, dado por

$$p(x) \doteq x^{N+1}, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R},$$

não poderá ser escrito como combinação linear dos polinômios

$$p_1, p_2, \cdots, p_n,$$

pois o maior grau dentre esse polinômios é N, que é menor que o grau do polinômio p, que é $N + 1$.

Assim,

$$p \notin [p_1, p_2, \cdots, p_n] = \mathscr{P}(\mathbb{R}),$$

o que seria um absurdo, pois $p \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$.

Portanto o espaço vetorial real $(\mathscr{P}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ **não** é finitamente gerado.

□

Observação 5.41 *Observemos que*

$$[p_o, p_1, \cdots, p_n, \cdots] = \mathscr{P}(\mathbb{R}),$$

onde, os polinômios $p_j \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$*, para* $j \in \{0, 1, 2, \cdots\}$*, são dados por:*

$$p_o(x) \doteq 1, \quad p_1(x) \doteq x, \quad p_2(x) \doteq x^2, \cdots, \quad p_n(x) \doteq x^n, \cdots, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

O próximo resultado será de grande importância nas próximas seções:

Proposição 5.42 *Seja* $(V, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) gerado pelos vetores* $u_1, u_2, \cdots, u_n$*, isto é,*

$$V = [u_1, u_2, \cdots, u_n].$$

Suponhamos que o vetor $\underline{u_1}$ *é uma combinação linear dos vetores*

$$u_2, u_3, \cdots, u_n,$$

ou seja,

$$u_1 \in [u_2, u_3, \cdots, u_n].$$

Então o espaço vetorial real (respectivamente, complexo) $(V, +, \cdot)$ *será gerado pelos vetores*

$$u_2, u_3, \cdots, u_n,$$

isto é,

$$[u_2, u_3, \cdots, u_n] = [u_1, u_2, \cdots, u_n] = V.$$

Demonstração:

Devemos mostrar que qualquer vetor $u \in V$, pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores

$$u_2, u_3, \cdots, u_n,$$

ou seja,

$$V = [u_2, u_3, \cdots, u_n].$$

Notemos que se

$$u \in V = [u_1, u_2, \cdots, u_n],$$

temos que existirão escalares

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ (respectivamente, } \mathbb{C}),$$

tais que

$$u = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n. \tag{5.43}$$

Mas, por hipótese,

$$u_1 \in [u_2, u_3, \cdots, u_n],$$

isto é, o vetor $\underline{u_1}$ é uma combinação linear dos vetores $u_2, u_3, \cdots, u_n$, ou seja, deverão existir escalares

$$\beta_2, \beta_3, \cdots, \beta_n \in \mathbb{R} \text{ (respectivamente, } \mathbb{C}),$$

de modo que

$$u_1 = \beta_2 \cdot u_2 + \beta_3 \cdot u_3 + \cdots + \beta_n \cdot u_n. \tag{5.44}$$

Logo, de (5.43) e (5.44), e das propriedades básicas de espaços vetoriais, podemos obter:

$$\begin{aligned} u &\overset{(5.43)}{=} \alpha_1 \cdot \underbrace{u_1}_{\overset{(5.44)}{=} \beta_2 \cdot u_2 + \cdots + \beta_n \cdot u_n} + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n \\ &= \alpha_1 \cdot (\beta_2 \cdot u_2 + \cdots + \beta_n u_n) + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n \\ &= (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2) \cdot u_2 + \cdots + (\alpha_1 \beta_n + \alpha_n) \cdot u_n, \end{aligned}$$

ou seja, o vetor $\underline{u}$ pode ser escrito como como uma combinação linear dos vetores

$$u_2, u_3, \cdots, u_n,$$

isto é,

$$u \in [u_2, u_3, \cdots, u_n], \quad \text{ou ainda,} \quad V = [u_2, u_3, \cdots, u_n],$$

como queriamos mostrar.

∎

Observação 5.45 *O resultado acima nos diz que se um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) é gerado por um número finito de vetores e um desses vetores pode ser escrito como combinação linear dos restantes, então o espaço vetorial real (respectivamente, complexo), dado incialmente, poderá ser gerado pelos vetores restantes, retirando-se o vetor que pode ser obtido como combinação linear dos outros da lista dada inicialmente.*

25.08.2015 - 7.a

Apliquemos isto ao:

Exemplo 5.46 *Consideremos o espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ *(onde + e · são as operações usuais de soma de 4-uplas e multiplicação de número real por 4-uplas, respectivamente) e os seguintes seus subespaços vetoriais*

$$\begin{aligned} U &\doteq \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \; ; \; x - y + t + z = 0\} \\ W &\doteq \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \; ; \; x + y - t + z = 0\} . \end{aligned} \tag{5.47}$$

Encontre um conjunto finito de geradores para os seguintes subespaços vetoriais do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$*:*

$$U, \quad W, \quad U \cap W \quad e \quad U + W.$$

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação que U e W são subespaços vetoriais de $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$.

Encontremos geradores para cada um dos subespaços vetoriais acima:

1. Para o subespaço vetorial U:

   Notemos que se
$$u \doteq (x\,,y\,,z\,,t) \in U\,,$$
   então, de (5.47), deveremos ter
$$x - y + t + z = 0 \qquad \text{ou, equivalentemente,} \qquad y = x + z + t\,.$$
   Portanto,
$$\begin{aligned}(x\,,\underbrace{y}_{=x+z+t}\,,z\,,t) &= (x\,,x+z+t\,,z\,,t)\\ &= (x\,,x\,,0\,,0) + (0\,,z\,,z\,,0) + (0\,,t\,,0\,,t)\\ &= x\cdot\underbrace{(1\,,1\,,0\,,0)}_{\doteq u_1} + z\cdot\underbrace{(0\,,1\,,1\,,0)}_{\doteq u_2} + t\cdot\underbrace{(0\,,1\,,0\,,1)}_{\doteq u_3}\,,\end{aligned}$$
   ou seja, o vetor $u \in U$, pode ser escrito como combinação linear dos vetores
$$u_1\,,u_2\,,u_3$$
   (os coeficientes serão os números reais x, z e t, respectivamente), isto é,
$$\begin{aligned}U &= [u_1\,,u_2\,,u_3]\\ &= [(1\,,1\,,0\,,0)\,,(0\,,1\,,1\,,0)\,,(0\,,1\,,0\,,1)]\,,\end{aligned} \tag{5.48}$$
   mostrando que o subespaço vetorial U é finitamente gerado.

2. Para o subespaço vetorial W:

   Notemos que se
$$u \doteq (x\,,y\,,z\,,t) \in W\,,$$
   então, de (5.48), deveremos ter
$$x + y - t + z = 0 \qquad \text{ou, equivalentemente,} \qquad t = x + y + z\,.$$
   Portanto,
$$\begin{aligned}(x\,,y\,,z\,,\underbrace{t}_{=x+y+z}) &= (x\,,y\,,z\,,x+y+z)\\ &= (x\,,0\,,0\,,x) + (0\,,y\,,0\,,y) + (0\,,0\,,z\,,z)\\ &= x\cdot\underbrace{(1\,,0\,,0\,,1)}_{\doteq w_1} + y\cdot\underbrace{(0\,,1\,,0\,,1)}_{\doteq w_2} + z\cdot\underbrace{(0\,,0\,,1\,,1)}_{\doteq w_3},\end{aligned}$$
   ou seja, o vetor $u \in U$, pode ser escrito como combinação linear dos vetores
$$w_1\,,w_2\,,w_3$$

(os coeficientes serão os números reais x, y e z, respectivamente), isto é,

$$\begin{aligned} W &= [w_1\,, w_2\,, w_3] \\ &= [(1\,,0\,,0\,,1)\,,(0\,,1\,,0\,,1)\,,(0\,,0\,,1\,,1)]\,, \end{aligned} \tag{5.49}$$

mostrando que o subespaço vetorial W é finitamente gerado.

3. Para o subespaço vetorial $U \cap W$:

   Notemos que se

$$(x\,,y\,,z\,,t) \in U \cap W\,,$$

   então

$$(x\,,y\,,z\,,t) \in U \quad \text{e} \quad (x\,,y\,,z\,,t) \in W\,,$$

   ou seja, de (5.47), deveremos ter que resolver o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} x - y + t + z = 0 \\ x + y - t + z = 0 \end{cases}\,,$$

$$\text{cujas soluções são:} \quad \begin{cases} z = -x \\ t = y \end{cases}\,,$$

   para cada $x\,,y \in \mathbb{R}$.

   Deste modo, teremos:

$$\begin{aligned} (x\,,y\,,\underbrace{z}_{=-x}\,,\underbrace{t}_{=y}) &= (x\,,y\,,-x\,,y) \\ &= (x\,,0\,,-x\,,0) + (0\,,y\,,0\,,y) \\ &= x \cdot \underbrace{(1\,,0\,,-1\,,0)}_{\doteq v_1} + y \cdot \underbrace{(0\,,1\,,0\,,1)}_{\doteq v_2} \end{aligned}$$

   ou seja, o vetor $u \in U$, pode ser escrito como combinação linear dos vetores

$$v_1\,,v_2$$

   (os coeficientes serão os números reais x e y, respectivamente), isto é,

$$\begin{aligned} U \cap W &= [v_1\,,v_2] \\ &= [(1\,,0\,,-1\,,0)\,,(0\,,1\,,0\,,1)]\,, \end{aligned} \tag{5.50}$$

   mostrando que o subespaço vetorial $U \cap W$ é finitamente gerado.

   Em particular, temos que a soma dos subespaços vetoriais $U + W$ **<u>não</u>** é uma soma direta.

4. Para o subespaço vetorial $U + W$:

   Do item 4. da Proposição (5.21), segue que

$$U = [U] \quad \text{e} \quad W = [W] \,,$$

   assim

$$\begin{aligned} U + W &\overset{U \overset{(5.48)}{=} [u_1, u_2, u_3] \text{ e } W \overset{(5.49)}{=} [w_1, w_2, w_3]}{=} [u_1 \,, u_2 \,, u_3] + [w_1 \,, w_2 \,, w_3] \\ &\overset{\text{do item 5. da Prop. (5.21)}}{=} [u_1 \,, u_2 \,, u_3 \,, w_1 \,, w_2 \,, w_3] \,. \end{aligned}$$

   Com isto teremos que:

$$\begin{aligned} U + W &= [(1,1,0,0), (0,1,1,0), \underbrace{(0,1,0,1)}, (1,0,0,1), \underbrace{(0,1,0,1)}, (0,0,1,1)] \\ &\overset{w_2 = u_3}{=} [(1,1,0,0), (0,1,1,0), (0,1,0,1), (1,0,0,1), (0,0,1,1)] \,, \end{aligned} \tag{5.51}$$

   mostrando que o subespaço vetorial $U + W$ é finitamente gerado.

□

Observação 5.52 *Observemos que no Exemplo (5.46) acima, temos que:*

$$\begin{aligned} (1,1,0,0) &= (1,0,0,1) + (0,1,1,0) - (0,0,1,1) \,. \\ &= w_1 + u_2 + w_3 \,. \end{aligned}$$

Portanto, pela Proposição (5.42), segue que podemos excluir o vetor

$$(1,1,0,0)$$

da lista dos geradores do subespaço vetorial real $U + W$, que os vetores restantes continuarão gerando o subespaço vetorial $U + W$, isto é:

$$U + V = [(0,1,1,0), (0,1,0,1), (1,0,0,1), (0,0,1,1)] \,. \tag{5.53}$$

Veremos mais adiante que, no Exemplo (5.46) acima, este será o número mínimo de geradores para o subespaço vetorial $U + V$, ou seja, **não** *podemos retirar mais nenhum vetor da lista formada pelos quatro vetores em (5.53) e ainda continuar gerando o subespaço vetorial $U + V$.*

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação desta afirmação.

5.3 Exercícios

Capítulo 6

Dependência Linear

6.1 Introdução e Exemplos

No Capítulo anterior, ao estudarmos os geradores de um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) procuramos encontrar um determinado conjunto de vetores do mesmo, de modo que qualquer vetor, do espaço vetorial real (respectivamente, complexo) em questão, pudesse ser escrito como combinação linear dos vetores deste conjunto.

Por exemplo, se os vetores

$$v \quad \text{e} \quad w$$

geram o espaço vetorial real (respectivamente, complexo) $(V\,,+\,,\cdot)$ então, para qualquer $u \in V$, será possível encontrar escalares

$$\alpha\,,\beta \in \mathbb{R} \text{ (respectivamente, } \mathbb{C})\,,$$

tais que

$$u = \alpha \cdot v + \beta \cdot w\,, \tag{6.1}$$

ou, equivalentemente,

$$\alpha \cdot v + \beta \cdot w - 1 \cdot u = O\,. \tag{6.2}$$

Note que a combinação linear acima é igual ao vetor nulo, embora **nem todos** os escalares que aparecem em (6.2), sejam **necessariamente** nulos.

Vejamos agora a seguinte situação: será sempre possível encontrar escalares

$$\alpha\,,\beta\,,\gamma \in \mathbb{R}\,,$$

não todos NECESSARIAMENTE nulos, de modo que, em $\left(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot\right)$, tenhamos

$$\alpha \cdot (1\,,0\,,0) + \beta \cdot (0\,,1\,,0) + \gamma \cdot (0\,,0\,,1) = (0\,,0\,,0)\,? \tag{6.3}$$

É fácil verificar que a resposta, neste caso, é **não**.

Deixaremos como exercício para o leitor mostrar essa afirmação.

Logo a resposta a questão (6.3), significa que **não** será possível escrever um dos vetores da combinação linear acima, como combinação linear dos outros dois, no espaço vetorial $\left(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot\right)$.

Isto contrasta com o que ocorreu com os vetores

$$u\,, \quad v \quad \text{e} \quad w\,,$$

que satisfazem (6.1) ou, equivalentemente (6.2).

Em um certo sentido, os vetores que satisfazem (6.1), ou equivalentemente, (6.2), guardam uma certa *"dependência"* entre eles, enquanto no caso (6.3), os três vetores são, em certo sentido, *"independentes"*.

Vejamos, com as definições que se seguem, como podemos tornar estes conceitos mais precisos.

Definição 6.4 *Sejam* $(V\,,+\,,\cdot)$ *um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) e*

$$u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_n \in V\,.$$

Diremos que os vetores

$$u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_n$$

são **linearmente independentes,** *em* $(V\,,+\,,\cdot)$, *ou abreviadamente* **L.I.**, *se a combinação linear*

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n = O \tag{6.5}$$

ocorrerá, **SOMENTE** *quando os escalares*

$$\alpha_1\,,\alpha_2\,,\cdots\,,\alpha_n \in \mathbb{R} \text{ (respectivamente, } \mathbb{C}\text{)}$$

forem todos **necessariamente** *nulos, isto é, se, e somente se,*

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0\,. \tag{6.6}$$

Observação 6.7

1. *Na situação da Definição* (6.4) *acima, se os vetores*

$$u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_n$$

são L.I., em $(V\,,+\,,\cdot)$, *diremos que o conjunto*

$$S \doteq \{u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_n\}$$

é um **conjunto L.I.**, *em* $(V\,,+\,,\cdot)$.

2. *Notemos que se*

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0\,,$$

então, das propriedades básicas de espaço vetorial real (respectivamente, complexo), necessariamente, deveremos ter:

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n = O.$$

Porém, a recíproca **nem sempre** *é válida, isto é, podemos ter uma coleção finita de vetores,*

$$v_1\,, v_2\,, \cdots, v_n$$

pertencentes a um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) e escalares

$$\alpha_1\,, \alpha_2\,, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}\ \textit{(respectivamente, } \mathbb{C}\textit{)}\,,$$

não todos necessariamente nulos*, de tal modo que*

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n = O\,. \tag{6.8}$$

Como um exemplo desta situação, consideremos no espaço vetorial real $\left(\mathbb{R}^2, +, \cdot\right)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de soma de pares ordenados e multiplicação de número real por par ordenado, respectivamente) os vetores*

$$v_1 \doteq (1\,,1) \quad e \quad v_2 \doteq (-1\,,-1)\,.$$

Neste caso temos que:

$$\begin{aligned} O &= (0\,,0) \\ &= 1 \cdot (1\,,1) + 1 \cdot (-1\,,-1) \\ &= \underbrace{1}_{\doteq\alpha_1} \cdot v_1 + \underbrace{1}_{\doteq\alpha_2} \cdot v_2\,, \end{aligned}$$

mostrando que existem escalares

$$\alpha_1\,, \alpha_2 \in \mathbb{R}\,,$$

não todos **necessariamente** *nulos (no caso ambos são iguais a* 1*), de tal modo que* (6.8) *se verifica.*

3. *A noção de independência linear para os vetores*

$$u_1\,, u_2\,, \cdots, u_n\,,$$

introduzida na Definição (6.4) *acima, é equivalente a dizer que: se existe*

$$\beta_i \neq 0\,, \qquad \textit{para algum} \quad i \in \{1\,,2\,,\cdots,n\}\,,$$

então, **necessariamente***, deveremos ter*

$$\beta_1 \cdot u_1 + \beta_2 \cdot u_2 + \cdots + \beta_n \cdot u_n \neq O\,,$$

independente dos escalares

$$\beta_1\,, \cdots, \beta_{i-1}\,, \beta_{i+1}\,, \cdots, \beta_n \in \mathbb{R}\ \textit{(respectivamente, } \mathbb{C}\textit{)}$$

escolhidos, ou seja, se os vetores

$$u_1, u_2, \cdots, u_n$$

são L.I., em $(V, +, \cdot)$, *podemos escrever o vetor nulo*

$$O \in V$$

de uma, **<u>única</u>**, *maneira como combinação linear dos vetores*

$$u_1, u_2, \cdots, u_n,$$

a saber:

$$O = 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + \cdots + 0 \cdot u_n .$$

Podemos também introduzir a:

Definição 6.9 *Sejam* $(V, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) e* $u_1, u_2, \cdots, u_n \in V$.

Dizemos que os vetores

$$u_1, u_2, \cdots, u_n$$

são ditos **<u>linearmente dependentes</u>** *em* $(V, +, \cdot)$ *ou abreviadamente,* **<u>L.D.</u>**, *se os vetores* **<u>não</u>** *forem linearmente independentes em* $(V, +, \cdot)$.

Observação 6.10

1. *Na situação da Definição (6.9) acima, se os vetores*

$$u_1, u_2, \cdots, u_n$$

são L.D., em $(V, +, \cdot)$, *diremos que o conjunto*

$$S \doteq \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$$

é um **<u>conjunto L.D.</u>**, *em* $(V, +, \cdot)$.

2. *A Definição (6.9), de dependência linear acima, para os vetores*

$$u_1, u_2, \cdots, u_n,$$

é equivalente a dizer que é possível encontrar números reais (ou complexos)

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n,$$

<u>não todos nulos</u> *(ou seja, existe, pelo menos, um ínidce* $i_o \in \{1, 2, \cdots, n\}$, *de modo que* $\alpha_{i_o} \neq 0$*), tais que*

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n = O,$$

ou seja, se os vetores

$$u_1, u_2, \cdots, u_n$$

são L.D., em $(V, +, \cdot)$, *podemos escrever o vetor nulo* $O \in V$ *de,* **<u>pelo menos</u>**, *dois modos diferentes, a saber:*

$$0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + \cdots + 0 \cdot u_n = O \qquad e \qquad \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n = O .$$

Com isto temos a:

Proposição 6.11 *Sejam* $(V,+,\cdot)$ *um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) e* $u_1, u_2, \cdots, u_n \in V$.

Os vetores

$$O, u_1, u_2, \cdots, u_n$$

são vetores L.D., em $(V,+,\cdot)$*, onde* O *denota o vetor nulo do espaço vetorial real (respectivamente, complexo)* $(V,+,\cdot)$.

Demonstração:

De fato, basta verificar que

$$\underbrace{1}_{\doteq\alpha}\cdot O+\underbrace{0}_{\doteq\alpha_1}\cdot u_1+\underbrace{0}_{\doteq\alpha_2}\cdot u_2+\cdots+\underbrace{0}_{\doteq\alpha_n}\cdot u_n=O,$$

ou seja, existem escalares

$$\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ (respectivamente, } \mathbb{C}),$$

não todos nulos (pois $\alpha = 1$), de modo que

$$\alpha\cdot O+\alpha_1\cdot u_1+\alpha_2\cdot u_2+\cdots+\alpha_n\cdot u_n=O,$$

mostrando que os vetores

$$O, u_1, u_2, \cdots, u_n$$

são de vetores L.D. em $(V,+,\cdot)$, completando a demonstração do resultado.

∎

Observação 6.12 *A Proposição (6.11) acima nos diz que qualquer conjunto formado por vetores de* $(V,+,\cdot)$*, que contenha o vetor nulo será L.D., em* $(V,+,\cdot)$.

Apliquemos as ideias acima ao:

Exemplo 6.13 *Consideremos o espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de soma de ternas e multiplicação de número real por ternas, respectivamente).*

Mostre que os vetores

$$\underbrace{(1,1,1)}_{\doteq u_1}, \underbrace{(1,1,0)}_{\doteq u_2}, \underbrace{(1,0,0)}_{\doteq u_3} \in \mathbb{R}^3$$

são L.I. em $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$.

Resolução:

Para tanto, precisamos encontrar **todas** as possíveis soluções da equação vetorial

$$\alpha \cdot u_1 + \beta \cdot u_2 + \gamma \cdot u_3 = O\,,$$

ou seja, de: $\quad \alpha \cdot (1\,,1\,,1) + \beta \cdot (1\,,1\,,0) + \gamma \cdot (1\,,0\,,0) = (0\,,0\,,0)\,,$

que é equivalente a: $\quad (0\,,0\,,0) = (\alpha\,,\alpha\,,\alpha) + (\beta\,,\beta\,,0) + (\gamma\,,0,0) = (\alpha + \beta + \gamma\,,\ \alpha + \beta\,,\ \alpha)\,.$

Isto equivale a resolver o sistema linear

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}\,,$$

que possui uma **única** solução, a saber :

$$\alpha = \beta = \gamma = 0\,.$$

A verificação deste fato é simples e será deixada como exercício para leitor (para maiores informações veja o Apêndice (B)).

Logo, os vetores

$$(1\,,1\,,1)\,,(1\,,1\,,0)\,,(1\,,0\,,0) \in \mathbb{R}^3$$

são L.D. em $(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot)$, completando a resolução.

$\square$

Temos também o:

Exemplo 6.14 *Consideremos o espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de soma de ternas e multiplicação de número real por ternas, respectivamente).*

Consideremos os vetores em $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$*, dados por:*

$$u_1 \doteq (x_1\,,y_1\,,z_1)\,, \quad u_2 \doteq (x_2\,,y_2\,,z_2) \quad e \quad u_3 \doteq (x_3\,,y_3\,,z_3)\,. \tag{6.15}$$

Encontre uma **condição necessária e suficiente** *para que os vetores*

$$u_1\,,\ u_2\,,\ u_3\,,$$

sejam L.I., em $(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot)$ *.*

Resolução:

Observemos que, os vetores

$$u_1\,,\ u_2\,,\ u_3$$

serão L.I., em $(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot)$, se, e somente se, a equação vetorial

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \alpha_3 \cdot u_3 = O\,, \tag{6.16}$$

apresentar como **único** solução os escalares

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0\,. \tag{6.17}$$

Por outro lado, observemos que

$$\begin{aligned}
\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \alpha_3 \cdot u_3 &= \alpha_1 \cdot (x_1\,,y_1\,,z_1) + \alpha_2 \cdot (x_2\,,y_2\,,z_2) + \alpha_3 \cdot (x_3\,,y_3\,,z_3) \\
&= (\alpha_1\, x_1\,, \alpha_1\, y_1\,, \alpha_1\, z_1) + (\alpha_2\, x_2\,, \alpha_2\, y_2\,, \alpha_2\, z_2) + (\alpha_3\, x_3\,, \alpha_3\, y_3\,, \alpha_3\, z_3) \\
&= (\underbrace{\alpha_1\, x_1 + \alpha_2\, x_2 + \alpha_3\, x_3}\,, \underbrace{\alpha_1\, y_1 + \alpha_2\, y_2 + \alpha_3\, y_3}\,, \underbrace{\alpha_1\, z_1 + \alpha_2\, z_2 + \alpha_3\, z_3})\,,
\end{aligned}$$

que é equivalente ao sistema linear, de três equações a três incógnitas (que são os escalares $\alpha_1\,,\alpha_2\,,\alpha_3$):

$$\begin{cases}
\alpha_1\, x_1 + \alpha_2\, x_2 + \alpha_3\, x_3 = 0 \\
\alpha_1\, y_1 + \alpha_2\, y_2 + \alpha_3\, y_3 = 0 \\
\alpha_1\, z_1 + \alpha_2\, z_2 + \alpha_3\, z_3 = 0
\end{cases},$$

$$\text{ou equivalentemente:} \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{6.18}$$

Logo, para que a equação vetorial (6.16) possua **somente** a solução (6.17), é necessário e suficiente, que o sistema linear ou a equção matricial (6.18), **somente** admita a solução (6.17).

Mas, como se sabe, isto é equivalente a dizer que a matriz dos coeficientes do sistema linear ou da equação matricial (6.18), isto é, a matriz

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$$

possua determinante diferente de zero (veja o Corolário (B.43) do Apêndice (B)).

Notemos que as colunas desta matriz acima, são formadas pelas entradas que compõem os vetores

$$u_1\,, \quad u_2 \quad \text{e} \quad u_3$$

em (6.15).

□

Observação 6.19 *O mesmo resultado vale se colocarmos os coeficientes dos vetores*

$$u_1\,, \quad u_2 \quad e \quad u_3$$

como as linhas de uma matriz. Por quê? justifique sua resposta.

Deixaremos como exercício para o leitor a extensão do Exemplo (6.14) acima, a saber:

Exercício 6.20 *Consideremos o espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de soma de* n*-uplas e multiplicação de número real por* n*-upla, respectivamente).*

Enuncie e demonstre um resultado análogo ao Exemplo (6.14) acima, para uma coleção

$$u_1, u_2, \cdots, u_k$$

de vetores do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$*, onde* $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ *está fixado.*

Temos também o:

Exemplo 6.21 *Consideremos o espaço vetorial real* $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $M_2(\mathbb{R})$*).*

Mostre que as matrizes

$$u_1 \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 \doteq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 \doteq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.22}$$

são L.D., em $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$*.*

Resolução:

Para isto, precisamos estudar todas as possíveis soluções, que denotaremos por

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R},$$

da equação vetorial:

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \alpha_3 \cdot u_3 = O, \tag{6.23}$$

onde O, denota a matriz nula de $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$, ou, equivalentemente, encontrar todas as possíveis soluções da equação matricial

$$\underbrace{\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_2 + \alpha_3 \\ 0 & \alpha_1 + \alpha_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que é equivalente a equação matricial

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_2 + \alpha_3 \\ 0 & \alpha_1 + \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{6.24}$$

ou ainda, equivalente ao sistema linear, de quatro equações a três incógnitas (a saber, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$):

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases}, \tag{6.25}$$

que possui soluções do tipo

$$(\alpha_1\,,\alpha_2\,,\alpha_3) = (\alpha_1\,,-\alpha_1\,,\alpha_1)\,,$$

para cada $\alpha_1 \in \mathbb{R}$.

A demonstração desta úlitma afirmação é simples e será deixada como exercício para o leitor.

Logo, escolhendo-se

$$\alpha_1 \doteq 1\,,$$

teremos que

$$\alpha_2 = -1 \quad \text{e} \quad \alpha_3 = 1\,,$$

serão soluções (não identicamente nulas) do sistema linear (6.25) ou, equivalentemente, da equação vetorial (6.23).

Dessa forma, os vetores

$$u_1\,, \quad u_2 \quad \text{e} \quad u_3$$

será L.D., em $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$, completando a resolução.

□

Observação 6.26 *Um outro modo de resolver o Exemplo (6.21) acima, é observar que*

$$u_2 = u_1 + u_3\,.$$

A verificação deste fato é simples e será deixada como exercício para o leitor.

Notemos que a identidade acima é equivalente a escrever

$$1 \cdot u_1 + (-1) \cdot u_2 + 1 \cdot u_3 = O\,,$$

ou seja, pela Definição (6.9), os vetores

$$u_1\,,\ u_2 \quad e \quad u_3$$

são L.D., em $(M_2(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$.

Temos também o:

Exemplo 6.27 *Consideremos o espaço vetorial real* $\left(C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})\,,+\,,\cdot\right)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de soma de funções e multiplicação de número real por função, respectivamente).*

Verifique se as funções $\underline{f}$ *e* $\underline{g}$ *são L.I. ou L.D., em* $\left(C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})\,,+\,,\cdot\right)$*, onde*

$$f(x) \doteq \cos(x) \quad e \quad g(x) \doteq \operatorname{sen}(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{6.28}$$

Resolução:

Como as funções $\underline{f}$ e $\underline{g}$ são funções definidas em $\mathbb{R}$, a equação vetorial

$$\alpha \cdot f + \beta \cdot f = O\,, \tag{6.29}$$

onde O, denota a função identicamente nula em $\mathbb{R}$, será equivalente a equação

$$\alpha\, f(x) + \beta\, g(x) = 0\,, \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Em particular, a identidade acima deverá ser válida para:

1. $x = 0$, ou seja:

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha\, f(0) + \beta\, g(0) \\ &\overset{(6.28)}{=} \alpha \underbrace{\cos(0)}_{=1} + \beta \underbrace{\operatorname{sen}(0)}_{=0} \\ &= \alpha\,, \\ \text{ou seja,} \qquad \alpha &= 0\,. \end{aligned}$$

2. $x = \frac{\pi}{2}$, ou seja:

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha\, f\left(\frac{\pi}{2}\right) + \beta\, g\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &\overset{(6.28)}{=} \alpha \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} + \beta \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1} \\ &= \beta\,, \\ \text{ou seja,} \qquad \beta &= 0\,. \end{aligned}$$

Conclusão: a única solução da equação vetorial (6.29) será

$$\alpha = \beta = 0\,,$$

portanto, as funções

$$f \quad e \quad g$$

são L.I., em $\left(C^1(\mathbb{R};\mathbb{R}), +, \cdot\right)$, completando a resolução.

$\square$

1.09.2015 - 8.a

Um outro semelhante é dado pelo:

Exemplo 6.30 *Consideremos o espaço vetorial real* $\left(C^1(\mathbb{R};\mathbb{R}), +, \cdot\right)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de soma de funções e multiplicação de número real por função, respectivamente).*

Verifique se as funções $\underline{f}$, $\underline{g}$ *e* $\underline{h}$ *são L.D. ou L.I. em* $\left(C^1(\mathbb{R};\mathbb{R}), +, \cdot\right)$, *onde*

$$f(x) \doteq \cos^2(x)\,, \quad g(x) \doteq \operatorname{sen}^2(x) \quad e \quad h(x) \doteq 1\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{6.31}$$

Resolução:

Observemos que

$$\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) = 1\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

ou seja,

$$\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) - 1 = 0\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

que, devido a (6.31), é equivalente a escrever

$$1 \cdot f + 1 \cdot g + (-1) \cdot h = O\,,$$

onde O, denota a função identicamente mula.

Logo a equação vetorial

$$\alpha \cdot f + \beta \cdot g + \gamma \cdot h = O ,$$

possui uma solução não trivial, a saber

$$\alpha \doteq 1 , \quad \beta \doteq 1 \quad \text{e} \quad \gamma \doteq -1 .$$

Portanto as funções

$$f , g \text{ e } h$$

são L.D., em $(C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}), +, \cdot)$.

□

Deixaremos a resolução para o leitor do:

Exercício 6.32 *Consideremos o espaço vetorial real* $\left(C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}), +, \cdot\right)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de soma de funções e multiplicação de número real por função, respectivamente).*

Sejam

$$f(x) \doteq \cos(2x) , \quad g(x) = \cos^2(x) \quad e \quad h(x) = \text{sen}^2(x) , \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R} .$$

Mostre que as funções

$$f , g \; e \; h$$

são L.D., em $\left(C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}), +, \cdot\right)$.

6.2 Propriedades da dependência linear

Começaremos pela seguinte caraterização equivalente de dependência linear:

Proposição 6.33 *Consideremos o espaço vetorial real (respectivamente, complexo)* $(V, +, \cdot)$ *e*

$$u_1 , u_2 , \cdots , u_n \in V .$$

Os vetores

$$u_1 , u_2 , \cdots , u_n$$

são L.D., em $(V, +, \cdot)$*, se, e somente se, pelo menos um dos vetores da coleção pode ser escrito como combinação linear dos restantes, ou seja, existem* $i_o \in \{1, \cdots, n\}$ *e escalares*

$$\alpha_1 , \cdots , \alpha_{i_o-1} , \alpha_{i_o+1} , \cdots \alpha_n \in \mathbb{R} \textit{ ou } (\mathbb{C}) ,$$

modo que

$$u_{i_o} = \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_{i_o-1} \cdot u_{i_o-1} + \alpha_{i_o+1} \cdot u_{i_o+1} + \cdots + \alpha_n \cdot u_n .$$

Demonstração:

Observemos que se um dos vetores da coleção de vetores

$$u_1\,, u_2\,, \cdots\,, u_n\,,$$

digamos u_{i_o}, para algum $i_o \in \{1\,, 2\,, \cdots\,, n\}$, se escreve como combinação linear dos restantes, ou seja, dos vetores

$$u_1\,, \cdots\,, u_{i_o-1}\,, u_{i_o+1}\,, \cdots\,, u_n\,,$$

então deverão existir escalares

$$\alpha_1, \cdots\,, \alpha_{i_o-1}, \alpha_{i_o+1}, \cdots\,, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ (respectivamente, } \mathbb{C})\,,$$

tais que

$$u_{i_o} = \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_{i_o-1} \cdot u_{i_o-1} + \alpha_{i_o+1} \cdot u_{i_o+1} + \cdots + \alpha_n \cdot u_n\,. \tag{6.34}$$

Mas (6.34) é equivalente a

$$\begin{aligned} O &= \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_{i_o-1} \cdot u_{i_o-1} - u_{i_o} + \alpha_{i_o+1} \cdot u_{i_o+1} + \cdots + \alpha_n \cdot u_n \\ &= \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_{i_o-1} \cdot u_{i_o-1} + (-1) \cdot u_{i_o} + \alpha_{i_o+1} \cdot u_{i_o+1} + \cdots + \alpha_n \cdot u_n, \end{aligned}$$

onde O, é o vetor nulo do espaço vetorial real (respectivamente, complexo) $(V\,, +\,, \cdot)$, ou seja, a equação vetorial

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_{i_o-1} \cdot u_{i_o-1} + \alpha_{i_o} \cdot u_{i_o} + \alpha_{i_o+1} \cdot u_{i_o+1} + \cdots + \alpha_n \cdot u_n = O$$

possui uma solução não trivial (a saber, $\alpha_{i_o} \doteq -1$), o que mostra que a coleção de vetores

$$u_1\,, u_2\,, \cdots\,, u_n$$

é L.D. em $(V\,, +\,, \cdot)$.

Por outro lado, se a coleção de vetores

$$u_1\,, u_2\,, \cdots\,, u_n$$

é L.D. em $(V\,, +\,, \cdot)$.

Então existem escalares

$$\alpha_1\,, \alpha_2\,, \cdots\,, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ (respectivamente, } \mathbb{C})\,,$$

não todos nulos, digamos que $\alpha_{i_o} \neq 0$, para algum $i_o \in \{1\,, 2\,, \cdots\,, n\}$, tais que

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_{i_o-1} \cdot u_{i_o-1} + \alpha_{i_o} \cdot u_{i_o} + \alpha_{i_o+1} \cdot u_{i_o+1} + \cdots + \alpha_n \cdot u_n = O,$$

ou, equivalentemente,

$$-\alpha_{i_o} \cdot u_{i_o} = \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_{i_o-1} \cdot u_{i_o-1} + \alpha_{i_o+1} \cdot u_{i_o+1} + \cdots + \alpha_n \cdot u_n\,.$$

Como

$$\alpha_{i_o} \neq 0\,,$$

teremos

$$u_{i_o} = \frac{\alpha_1}{-\alpha_{i_o}} \cdot u_1 + \cdots + \frac{\alpha_{i_o-1}}{-\alpha_{i_o}} \cdot u_{i_o-1} + \frac{\alpha_{i_o+1}}{-\alpha_{i_o}} \cdot u_{i_o+1} + \cdots + \frac{\alpha_n}{-\alpha_{i_o}} \cdot u_n,$$

ou seja, o vetor u_{i_o}, da coleção de vetores

$$u_1\,, u_2\,, \cdots, u_n\,,$$

pode ser obtido como combinação linear dos vetores restantes, a saber, dos vetores

$$u_1, \cdots, u_{i_o-1}, u_{i_o+1}, \cdots, u_n\,,$$

terminando a demonstração do resultado.

∎

Com isto temos a:

Proposição 6.35 *Consideremos o espaço vetorial real (respectivamente, complexo)* $(V\,,+\,,\cdot)$ *e*

$$u_1\,, u_2\,, \cdots, u_n \in V\,.$$

Suponhamos que o conjunto de vetores $S \doteq \{u_1\,, u_2\,, \cdots, u_n\}$ *é L.D. em* $(V\,,+\,,\cdot)$ *e* $T \subseteq V$*, satisfaz*

$$S \subseteq T\,.$$

Então o conjunto $\underline{T}$ *também será L.D. em* $(V\,,+\,,\cdot)$*.*

Demonstração:

Faremos a demonstração supondo que o conjunto T é formado por um número finito de vetores.

O caso em que o conjunto T é não finito é consequência do caso finito e será deixado como exercício para o leitor.

Vamos mostrar que se

$$u_1\,, \cdots, u_n\,, u_{n+1}\,, \cdots, u_m \in V$$

são tais que

$$S \doteq \{u_1\,, u_2\,, \cdots, u_n\}$$

é um conjunto formado por vetores que são L.D. em $(V\,,+\,,\cdot)$, então o conjunto

$$T \doteq \{u_1\,, u_2\,, \cdots, u_n\,, u_{n+1}, \cdots, u_m\}$$

também é um conjunto formado por vetores que são L.D. em $(V\,,+\,,\cdot)$.

Como o conjunto S é L.D. em $(V\,,+\,,\cdot)$, existem escalares

$$\alpha_1\,, \alpha_2\,, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ (respectivamente, } \mathbb{C})\,,$$

não todos nulos, ou seja,

$$\alpha_{i_o} \neq 0\,, \quad \text{para algum} \quad i_o \in \{1\,, 2\,, \cdots, n\}\,,$$

tais que

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_{i_o} \cdot u_{i_o} + \cdot + \alpha_n \cdot u_n = O\,. \tag{6.36}$$

Como $S \subseteq T$, segue que $u_{i_o} \in T$ e, de (6.36), segue também que

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_{i_o} \cdot u_{i_o} + \cdots + \alpha_n \cdot u_n + 0 \cdot u_{n+1} + \cdots + 0 \cdot u_m = O\,. \tag{6.37}$$

possui uma solução não identicamente nula, pois $\alpha_{i_o} \neq 0$.

Portanto o conjunto $\underline{T}$ é formado por vetores que são L.D. em $(V\,,+\,,\cdot)$, completando a demonstração do resultado.

∎

Observação 6.38 *O resultado acima nos diz que qualquer subconjunto de um espaço vetorial real (respectivamente, complexo)* $(V\,,+\,,\cdot)$*, que contenha como subconjunto, um conjunto que é L.D. em* $(V\,,+\,,\cdot)$*, deverá ser,* **<u>necessariamente</u>** *L.D. em* $(V\,,+\,,\cdot)$.

Um outro resultado importante é dado pela:

Proposição 6.39 *Consideremos o espaço vetorial real (respectivamente, complexo)* $(V\,,+\,,\cdot)$ *e*

$$u_1\,, u_2\,, \cdots, u_m \in V\,.$$

Suponhamos que os vetores

$$u_1\,, u_2\,, \cdots, u_m$$

são L.I. em $(V\,,+\,,\cdot)$.

Então **<u>qualquer</u>** *subcoleção destes vetores também será L.I. em* $(V\,,+\,,\cdot)$.

Demonstração:

Basta mostrar que se os vetores

$$u_1, \cdots, u_n\,, u_{n+1}, \cdots, u_m$$

são L.I. em $(V\,,+\,,\cdot)$, então os vetores

$$u_1, \cdots, u_n$$

também serão L.I. em $(V\,,+\,,\cdot)$.

Para isto suponhamos que

$$\beta_1 \cdot u_1 + \cdots + \beta_n \cdot u_n = O\,. \tag{6.40}$$

Notemos que a equação vetorial (6.40) pode ser reescrita como:

$$\beta_1 \cdot u_1 + \cdots + \beta_n \cdot u_n + 0 \cdot u_{n+1} + \cdots + 0 \cdot u_m = O\,. \tag{6.41}$$

Como os vetores

$$u_1\,, \cdots, u_n\,, u_{n+1}\,, \cdots, u_m$$

são L.I. em $(V, +, \cdot)$, segue que a única solução para a equação vetorial (6.41) será

$$\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_n = 0,$$

ou seja, os vetores

$$u_1, u_2, \cdots, u_n$$

são L.I. em $(V, +, \cdot)$, como queríamos demonstrar.

∎

Observação 6.42 *O resultado acima nos diz que* **qualquer** *subconjunto de um conjunto de vetores que é L.I., em* $(V, +, \cdot)$*, deverá,* **necessariamente***, ser L.I., em* $(V, +, \cdot)$*.*

Um outro resultado importante é dado pela:

Proposição 6.43 *Consideremos o espaço vetorial real (respectivamente, complexo)* $(V, +, \cdot)$ *e*

$$u, u_1, u_2, \cdots, u_n \in V.$$

Suponhamos que os vetores

$$u_1, u_2, \cdots, u_n, \quad \text{são L.I. em } (V, +, \cdot),$$

e os vetores

$$u, u_1, u_2, \cdots, u_n, \quad \text{são L.D. em } (V, +, \cdot).$$

Então o vetor u *deverá ser escrito como uma combinação linear dos vetores*

$$u_1, u_2 \cdots, u_n,$$

ou seja,

$$u \in [u_1, u_2, \cdots, u_n].$$

Demonstração:

Notemos que, como os vetores

$$u, u_1, u_2, \cdots, u_n,$$

são L.D. em $(V, +, \cdot)$, deverão existir escalares

$$\beta, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n+1}, \quad \text{não todos nulos}, \tag{6.44}$$

tais que

$$\beta \cdot u + \beta_1 \cdot u_1 + \beta_2 \cdot u_2 + \cdots + \beta_n \cdot u_n = O. \tag{6.45}$$

Afirmamos que

$$\beta \neq 0.$$

Suponhamos, por absurdo, que

$$\beta = 0.$$

A expressão (6.45) tornar-se-á:

$$\beta_1 \cdot u_1 + \beta_2 \cdot u_2 + \cdots + \beta_n \cdot u_n = 0.$$

Como, por hipótese, os vetores

$$u_1 , u_2 , \cdots , u_n$$

são L.I. em $(V , + , \cdot)$, deveríamos, necessariamente, ter

$$\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_n = 0 , \tag{6.46}$$

o que contrariaria (6.44) (pois estamos supondo que $\beta = 0$).

Portanto deveremos ter

$$\beta \neq 0 .$$

Com isto, (6.45) será equivalente a

$$-\beta \cdot u = \beta_1 \cdot u_1 + \cdots + \beta_n \cdot u_n$$

e como $\beta \neq 0$, teremos: $$u = \frac{\beta_1}{-\beta} \cdot u_1 + \cdots + \frac{\beta_n}{-\beta} \cdot u_n ,$$

ou ainda, o vetor $\underline{u}$ pode ser obtido como combinação linear dos vetores

$$u_1 , u_2 , \cdots , u_n ,$$

como queríamos demonstrar.

∎

Pra finalizar temos a:

Proposição 6.47 *Consideremos o espaço vetorial real (respectivamente, complexo)* $(V , + , \cdot)$ *e*

$$u_1 , u_2 , \cdots , u_n$$

vetores L.I. em $(V , + , \cdot)$.

Então cada vetor

$$v \in [u_1 , u_2 , \cdots , u_n]$$

se escreve, de maneira **<u>única</u>**, *como combinação linear dos vetores*

$$u_1 , u_2 , \cdots , u_n ,$$

isto é, existem **<u>únicos</u>** *escalares*

$$\alpha_1 , \alpha_2 , \cdots , \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ (respectivamente, } \mathbb{C}) ,$$

tais que

$$v = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n . \tag{6.48}$$

Prova:

De fato, se

$$v \in [u_1, u_2, \cdots, u_n],$$

temos que existem escalares

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ (respectivamente, } \mathbb{C}),$$

tais que (6.48) ocorre.

Suponhamos que existam escalares

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n \in \mathbb{R} \text{ (respectivamente, } \mathbb{C}),$$

tais que

$$\begin{aligned} v &= \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n \\ &= \beta_1 \cdot u_1 + \beta_2 \cdot u_2 + \cdots + \beta_n \cdot u_n, \end{aligned} \tag{6.49}$$

ou seja, o vetor $\underline{v}$ pode ser escrito de, pelo menos, duas maneiras como combinação linear dos vetores

$$u_1, u_2, \cdots, u_n.$$

Mostremos que

$$\alpha_j = \beta_j, \quad \text{para cada} \quad j \in \{1, 2, \cdots, n\}.$$

Para isto, observemos que (6.49) é equivalente a:

$$(\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n) - (\beta_1 \cdot u_1 + \beta_2 \cdot u_2 + \cdots + \beta_n \cdot u_n) = O,$$

que, por sua vez, pode ser escrita como

$$(\alpha_1 - \beta_1) \cdot u_1 + (\alpha_2 - \beta_2) \cdot u_2 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n) \cdot u_n = O.$$

Mas, por hipótese, os vetores

$$u_1, u_2, \cdots, u_n$$

são L.I. em $(V, +, \cdot)$.

Logo, necessariamente, deveremos ter

$$\begin{aligned} &\alpha_j - \beta_j = 0, \quad \text{para cada} \quad j \in \{1, 2, \cdots, n\}, \\ \text{isto é,} \quad &\alpha_j = \beta_j, \quad \text{para cada} \quad j \in \{1, 2, \cdots, n\}, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

∎

Observação 6.50 *Vale uma certa recíproca da Proposição* (6.47) *acima, a saber: se cada vetor*

$$v \in [u_1, u_2, \cdots, u_n],$$

se escreve, de maneira única, como combinação linear dos vetores

$$u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_n\,,$$

então os vetores

$$u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_n$$

deverão ser L.I. em $(V\,,+\,,\cdot)$.

De fato, pois, em particular, o vetor nulo $O \in V$, *por hipótese, se escreve de modo único como combinação linear dos vetores*

$$\begin{aligned} & u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_n\,, \\ \textit{isto é, se} \quad & O = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n\,, \\ \textit{necessariamente, deveremos ter:} \quad & \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0\,, \end{aligned} \tag{6.51}$$

pois este é o único modo de escrever o vetor nulo como combinçao linear dos vetores $u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_n$, *mostrando que os vetores*

$$u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_n$$

serão L.I. em $(V\,,+\,,\cdot)$, *como afirmamos.*

6.3 Exercícios

Capítulo 7

Base, Dimensão e Coordenadas

7.1 Base

A noção de base de um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) é semelhante a que foi introduzida no curso de Geometria Analítica para o $\mathbb{R}^2$ ou o $\mathbb{R}^3$.

Ela consiste em escolher um conjunto de geradores do espaço vetorial real (respectivamente, complexo) finitamente gerado em questão, que contenha o menor número de vetores possível, isto é, um conjunto que gere o espaço vetorial real (respectivamente, complexo), mas que se deste conjunto for retirado qualquer elemento, o conjunto que restará **não** gerará mais o espaço vetorial real (respectivamente, complexo) em questão.

Mais precisamente, temos a:

Definição 7.1 *Seja* $V \neq \{O\}$, $(V, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) finitamente gerado.*

Definimos uma **base do espaço vetorial real (respectivamente, complexo)** $(V, +, \cdot)$, *como sendo um conjunto finito de vetores, que indicaremos por* $\mathcal{B}$, *formado por vetores L.I. em* $(V, +, \cdot)$ *e que gera* $(V, +, \cdot)$, *isto é,*

$$[\mathcal{B}] = V \quad e \quad \mathcal{B} \text{ é L.I. em } (V, +, \cdot) \ .$$

Consideremos os seguintes exemplos:

Exemplo 7.2 *Consideremos o espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ *(onde + e · são as operações usuais de adição de ternas e multiplicação de número real por terna, respectivamente).*

Mostre que o conjunto

$$\mathcal{B} \doteq \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

é uma base de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Resolução:

Notemos que o espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ é finitamente gerado.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

É fácil mostrar que os vetores do conjunto $\mathcal{B}$ são L.I. em $(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot)$.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Além disso se $(x\,,y\,,z)\in\mathbb{R}^3$, temos que

$$\begin{aligned}(x\,,y\,,z)&=(x\,,0\,,0)+(0\,,y\,,0)+(0\,,0\,,z)\\&=x\cdot(1\,,0\,,0)+y\cdot(0\,,1\,,0)+z\cdot(0\,,0\,,1)\,,\end{aligned}$$

mostrando que os vetores do conjunto $\mathcal{B}$ geram $(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot)$, isto é,

$$[\mathcal{B}]=\mathbb{R}^3\,.$$

Logo, segue da Definição (7.1), que o conjunto $\mathcal{B}$ será uma base para $(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot)$.

□

Podemos estender o Exemplo (7.2) acima, como afirma o seguinte exercício abaixo, cuja resolução será deixada a cargo do leitor.

Exercício 7.3 *Consideremos o espaço vetorial real $(\mathbb{R}^n\,,+\,,\cdot)$ (onde $+$ e $\cdot$ são as operações usuais de soma de n-uplas e multiplicação de número real por n-upla, respectivamente).*

Mostre que o conjunto

$$\mathcal{B}\doteq\{e_1\,,e_2\,,\cdots\,,e_n\}\subseteq\mathbb{R}^n\,,$$

onde

$$e_1\doteq(1\,,0\,,\cdots\,,0),\ \cdots\,,e_j\doteq(0\,,\cdots\,,0\,,\underbrace{1}_{j-\text{ésima posição}}\,,\cdots\,,0),\ \cdots\ e_n\doteq(0\,,\cdots\,,0\,,1)$$

é uma base de $(\mathbb{R}^n\,,+\,,\cdot)$.

Temos também o:

Exemplo 7.4 *Consideremos o espaço vetorial real $(\mathbb{R}^2\,,+\,,\cdot)$ (onde $+$ e $\cdot$ são as operações usuais de soma de pares ordenados e multiplicação de número real por par ordenado, respectivamente).*

Mostre que o conjunto

$$\mathcal{B}\doteq\{(1\,,1)\,,\,(1\,,-1)\}$$

é uma base de $(\mathbb{R}^2\,,+\,,\cdot)$.

Resolução:

É preciso mostrar que os vetores de $\mathcal{B}$ são L.I. em $(\mathbb{R}^2\,,+\,,\cdot)$ e que todo vetor do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^2\,,+\,,\cdot)$, pode ser escrito como combinação linear dos vetores do conjunto $\mathcal{B}$.

Segue, da Observação (6.50), que basta mostrarmos que todo vetor de $(\mathbb{R}^2\,,+\,,\cdot)$ se escreve, de maneira única, como combinação linear dos vetores

$$u_1\doteq(1\,,1)\quad\text{e}\quad u_2\doteq(1\,,-1)\,.\tag{7.5}$$

Para isto, consideremos
$$u \doteq (x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

O nosso problema se resume a mostrar que existem <u>**únicos**</u>
$$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\,,$$
tais que
$$\begin{aligned} u &= (x\,,y) \\ &= \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 \\ &\overset{(7.5)}{=} \alpha_1 \cdot (1\,,1) + \alpha_2 \cdot (1\,,-1) \\ &= (\alpha_1\,,\alpha_1) + (\alpha_2\,,-\alpha_2) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2\,,\ \alpha_1 - \alpha_2)\,. \end{aligned}$$

Esta identidade é equivalente ao seguinte sistema linear:
$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = x \\ \alpha_1 - \alpha_2 = y \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema linear (deixaremos a resolução do mesmo como exercício para o leitor), obteremos uma <u>**única**</u> solução, dada por
$$\alpha_1 = \frac{x+y}{2} \quad \text{e} \quad \alpha_2 = \frac{x-y}{2}\,,$$
mostrando que o conjunto $\mathcal{B}$ é uma base para $(\mathbb{R}^2\,,+\,,\cdot)$.

□

Deixaremos, para o leitor, a resolução dos seguintes exercícios:

Exercício 7.6 *Consideremos o espaço vetorial real* $(M_2(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de soma de matrizes e multiplicação de número real por matrizes, respectivamente).*

Mostre que o conjunto
$$\mathcal{B} \doteq \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$
é uma base de $(M_2(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$

Exercício 7.7 *Consideremos o espaço vetorial real* $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de soma de funções e de multiplicação de número real por função, respectivamente).*

Mostre que o conjunto
$$\mathcal{B} \doteq \{p\,,q\,,r\}$$
é uma base de $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$*, onde*
$$p(x) \doteq 1 + x\,, \quad q(x) \doteq 1 - x \quad \text{e} \quad r(x) \doteq 1 - x^2\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Temos o seguinte resultado:

Proposição 7.8 *Consideremos o espaço vetorial real (respectivamente, complexo)* $(V\,,+\,,\cdot)$ *e suponhamos que o conjunto* $\mathcal{B} \doteq \{u_1\,, u_2\,,\,, \cdots, u_n\}$ *é uma base de* $(V\,,+\,,\cdot)$.

Então o conjunto

$$\mathcal{B}' \doteq \{u_1\,, u_2\,, \cdots, u_{n-1}\}$$

não *poderá ser uma base de* $(V\,,+\,,\cdot)$.

Demonstração:

Suponhamos, por absurdo, que o conjunto

$$\mathcal{B}' = \{u_1\,, u_2\,,\,, \cdots, u_{n-1}\}$$

é uma base de $(V\,,+\,,\cdot)$.

Como $u_n \in V$ e $\mathcal{B}'$ é uma base de $(V\,,+\,,\cdot)$, deverão existir escalares

$$\alpha_j \in \mathbb{R} \text{ (respectivamente, } \mathbb{C}), \quad \text{para} \quad j \in \{1\,,2\,,\cdots,n-1\},$$

de modo que

$$\begin{aligned} u_n &= \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_{n-1} \cdot u_{n-1}\,, \\ \text{isto é,} \qquad O &= \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_{n-1} \cdot u_{n-1} - u_n \\ &= \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_{n-1} \cdot u_{n-1} + (-1) \cdot u_n\,, \end{aligned}$$

ou seja, os vetores

$$u_1\,, u_2\,, \cdots, u_n$$

são L.D. em $(V\,,+\,,\cdot)$, o que seria um absurdo pois, por hipótese, os vetores

$$u_1\,, u_2\,, \cdots, u_n$$

são L.I. em $(V\,,+\,,\cdot)$ (pertencem a uma base de $(V\,,+\,,\cdot)$).

Portanto o conjunto

$$\mathcal{B}' = \{u_1\,, u_2\,, \cdots, u_{n-1}\},$$

não poderá ser uma base de $(V\,,+\,,\cdot)$, como queríamos demonstrar.

∎

Temos também o seguinte importante resultado:

Teorema 7.9 *Seja* $V \neq \{O\}$ *tal que* $(V\,,+\,,\cdot)$ *é um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) finitamente gerado.*

Então $(V\,,+\,,\cdot)$ *admite uma base.*

Em outras palavras, existe um conjunto finito $\mathcal{B}$*, formado por vetores de* $(V\,,+\,,\cdot)$*, que são L.I. em* $(V\,,+\,,\cdot)$ *e que gera* $(V\,,+\,,\cdot)$*, ou seja,*

$$[\mathcal{B}] = V \quad e \quad \mathcal{B} \text{ é L.I. em } (V\,,+\,,\cdot)\,.$$

Prova:

Como $V \neq \{O\}$ e $(V, +, \cdot)$ é um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) finitamente gerado, existem vetores

$$u_1, u_2, \cdots, u_n \in V,$$

tais que

$$V = [u_1, u_2, \cdots, u_n].$$

Notemos que, se o conjunto

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$$

for formado por vetores que são L.I. em $(V, +, \cdot)$, então o conjunto $\mathcal{B}$ será uma base de $(V, +, \cdot)$, terminando a demonstração.

Por outro lado, se o conjunto $\mathcal{B}$ é L.D. em $(V, +, \cdot)$ (isto é, os vetores $u_1, u_2, \cdots, u_n$ são L.D. em $(V, +, \cdot)$), como $V \neq \{O\}$, existe, pelo menos, um $j_o \in \{1, 2, \cdots, n\}$, de modo que

$$u_{j_o} \neq O.$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que

$$u_1 \neq O, \quad \text{isto é,} \quad j_o = 1.$$

Se todo vetor

$$u_j, \quad \text{para} \quad j \in \{2, 3, \cdots, n\}$$

puder ser escrito como combinação linear do vetor u_1, então segue que

$$V = [u_1]$$

e o conjunto $\mathcal{B} \doteq \{u_1\}$ será uma base de $(V, +, \cdot)$, terminando a demonstração.

Caso isto não ocorra, é porque existe um vetor

$$u_{j_1}, \quad \text{para algum} \quad j_1 \in \{2, 3, \cdots, n\},$$

tal que os vetores

$$u_1, u_{j_1}$$

são L.I. em $(V, +, \cdot)$.

Sem perda de generalidade, podemos supor que o vetor u_2 seja tal vetor, ou seja, $j_1 = 2$, isto é, os vetores

$$u_1, u_2$$

são L.I. em $(V, +, \cdot)$.

Se todos os vetores

$$u_3, u_4, \cdots, u_n,$$

puderem ser escritos como combinações lineares dos vetores

$$u_1, u_2,$$

então segue que

$$V = [u_1 , u_2]$$

e o conjunto $\mathcal{B} \doteq \{u_1 , u_2\}$ será uma base de $(V , + , \cdot)$.

Caso, contrário, podemos repetir o processo acima e como o número de elementos do conjunto

$$\{u_1 , u_2 , \cdots , u_n\}$$

é finito, o processo irá findar, após um número finito de passos.

Desse modo, podemos encontrar uma coleção finita de vetores L.I. em $(V , + , \cdot)$, dentre os vetores do conjunto

$$\{u_1 , u_2 , \cdots , u_n\}$$

que geram $(V , + , \cdot)$, isto é, uma base de $(V , + , \cdot)$, finalizando a demonstração.

∎

Observação 7.10 *Resumindo, o resultado acima nos diz que todo espaço vetorial real (respectivamente, complexo), não identicamente nulo, finitamente gerado tem, pelo menos, uma base, ou seja, uma coleção finita de vetores L.I. que geram o espaço vetorial real (respectivamente, complexo) em questão.*

O exemplo a seguir trata de dois espaços vetoriais, um sobre $\mathbb{R}$ e o outro sobre $\mathbb{C}$.

Exercício 7.11 *Consideremos $V \doteq \mathbb{C}$ munido das seguinte operações usuais e adição de números complexos e de multiplicação de número real por número complexo.*

Mais precisamente, temos:

$$\mathbb{C} = \{(a , b) ; a , b \in \mathbb{R}\} \quad \left(= \mathbb{R}^2\right) .$$

Consideremos a adição $+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida do seguinte modo: se

$$z = (a , b) , \ w = (c , d) \in \mathbb{C}$$

definimos

$$z + w \doteq (a + c , b + d) \in \mathbb{C} \tag{7.12}$$

e a multiplicação (por número real) $\cdot_{\mathbb{R}} \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida do seguinte modo: se

$$\lambda \in \mathbb{R} \quad e \quad z = (a , b) \in \mathbb{C}$$

definimos

$$\lambda \cdot_{\mathbb{R}} z \doteq (\lambda\, a , \lambda\, b) \in \mathbb{C} . \tag{7.13}$$

Por outro lado, podemos definir a multiplicação por número complexo, ou seja, $\cdot_{\mathbb{C}} \mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida do seguinte modo: se

$$\lambda = (c , d) \in \mathbb{C} \quad e \quad z = (a , b) \in \mathbb{C}$$

definimos

$$\lambda \cdot_{\mathbb{C}} z \doteq (a\,c - b\,d , a\,d + c\,b) \in \mathbb{C} , \tag{7.14}$$

que é a multiplicação usual de números complexos.

Encontrar uma base e a dimensão do espaço vetorial real $(\mathbb{C} , + , \cdot_{\mathbb{R}})$ e do espaço vetorial complexo $(\mathbb{C} , + , \cdot_{\mathbb{C}})$.

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor mostrar que $(\mathbb{C}\,,+\,,\cdot_{\mathbb{R}})$ é um espaço vetorial real e $(\mathbb{C}\,,+\,,\cdot_{\mathbb{C}})$ é um espaço vetorial complexo.

Encontremos uma base e a dimensão do espaço vetorial real $(\mathbb{C}\,,+\,,\cdot_{\mathbb{R}})$.

Notemos que o conjunto

$$\mathcal{B} \doteq \{(1\,,0)\,,(0\,,1)\}$$

é uma base para o espaço vetorial real $(\mathbb{C}\,,+\,,\cdot_{\mathbb{R}})$, pois o conjunto $\mathcal{B}$ é L.I. em $(\mathbb{C}\,,+\,,\cdot_{\mathbb{R}})$ e se $z = (a\,,b) \in \mathbb{C}$, segue que

$$\begin{aligned} z = (a\,,b) &\overset{(7.12)}{=} (a\,,0) + (0\,,b) \\ &\overset{(7.13)}{=} a \cdot_{\mathbb{R}} (1\,,0) + b \cdot_{\mathbb{R}} (0\,,1)\,, \end{aligned}$$

ou seja, o conjunto $\mathcal{B}$ gera o espaço vetorial real $(\mathbb{C}, +, \cdot_{\mathbb{R}})$.

Em particular, como veremos na próxima seção, teremos

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2\,.$$

Por outro lado, o conjunto

$$\mathcal{C} \doteq \{(1\,,0)\}$$

é uma base para o espaço vetorial complexo $(\mathbb{C}\,,+\,,\cdot_{\mathbb{C}})$.

De fato, pois o conjunto $\mathcal{C}$ é L.I. em $(\mathbb{C}\,,+\,,\cdot_{\mathbb{C}})$ e se $z = (a\,,b) \in \mathbb{C}$ segue que

$$\begin{aligned} z = (a\,,b) &\overset{(7.14)}{=} \underbrace{(a\,,b)}_{\doteq \lambda} \cdot_{\mathbb{C}} (1\,,0) \\ &= \lambda \cdot_{\mathbb{C}} (1\,,0)\,, \end{aligned}$$

ou seja, o conjunto $\mathcal{C}$ gera o espaço vetorial complexo $(\mathbb{C}, +, \cdot_{\mathbb{C}})$.

Em particular, , como veremos na próxima seção, teremos

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1\,.$$

<u>**Conclusão:**</u> considerar, quando possível, um espaço vetorial sobre os reais ou sobre os complexos pode alterar a sua dimensão, que será definida na próxima seção.

3.09.2015 - 9.a

7.2 Dimensão

Para iniciar esta seção temos o seguinte resultado fundamental para o que segue:

Teorema 7.15 *Seja* $V \neq \{O\}$ *tal que* $(V\,,+\,,\cdot)$ *é um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) finitamente gerado.*

Então toda base de $(V\,,+\,,\cdot)$ *possui o mesmo número de vetores.*

Prova:

Observemos primeiramente que, do Teorema (7.9), segue que $(V\,,+\,,\cdot)$ admite uma base.

Sejam

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_n\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} \doteq \{v_1\,,v_2\,,\cdots\,,v_m\}$$

duas bases do espaço vetorial real (respectivamente, complexo) $(V\,,+\,,\cdot)$.

Nosso objetivo é mostrar que

$$m = n\,,$$

ou seja, qualquer base de $(V\,,+\,,\cdot)$ deverá ter, exatamente, $\underline{n}$ elementos.

Suponhamos, por absurdo, que

$$n > m\,. \tag{7.16}$$

Como os vetores

$$v_1\,,v_2\,,\cdots\,,v_m$$

geram $(V\,,+\,,\cdot)$ (pois o conjunto $\mathcal{C}$ é uma base de $(V\,,+\,,\cdot)$), para cada $j \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}$, podemos escrever o vetor u_j, como combinação linear dos vetores

$$v_1\,,v_2\,,\cdots\,,v_m\,,$$

isto é, existem escalares

$$\alpha_{1j}\,,\alpha_{2j}\,,\cdots\,,\alpha_{mj} \in \mathbb{R} \text{ (respectivamente, } \mathbb{C})\,,$$

tais que

$$\begin{aligned} u_j &= \alpha_{1j}\cdot v_1 + \alpha_{12}\cdot v_2 + \cdots + \alpha_{mj}\cdot v_m \\ &= \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}\cdot v_i\,. \end{aligned} \tag{7.17}$$

Assim, de (7.17), segue que, se

$$\begin{aligned} O &= \beta_1 \cdot \underbrace{u_1}_{\substack{(7.17)\\ \sum_{i=1}^{m}\alpha_{i1}\cdot v_i}} + \cdots + \beta_n \cdot \underbrace{u_n}_{\substack{(7.17)\\ \sum_{i=1}^{m}\alpha_{in}\cdot v_i}} \\ &= \beta_1 \cdot \left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_{i1}\cdot v_i\right) + \cdots + \beta_n \cdot \left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_{in}\cdot v_i\right) \\ &= \sum_{i=j}^{n} \beta_j \cdot \left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}\cdot v_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j\,\alpha_{1i}\right)\cdot v_i\,, \end{aligned} \tag{7.18}$$

ou seja,

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j \, \alpha_{1j}\right) \cdot v_1 + \cdots + \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j \, \alpha_{mj}\right) \cdot v_m = O\,.$$

Como os vetores

$$v_1\,, v_2\,, \cdots, v_m$$

são L.I. em $(V\,,+\,,\cdot)$, deveremos ter

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \, \beta_j = 0\,, \quad \text{para cada} \quad i \in \{1\,,2\,,\cdots,m\}\,.$$

As identidades acima correspondem a um sistema linear homogêneo de $\underline{m}$ equações com $\underline{n}$ incógnitas, a saber,

$$\beta_j\,, \quad \text{para} \quad i \in \{j\,,2\,,\cdots,n\}\,.$$

Como

$$n > m\,,$$

existe uma solução não trivial deste sistema linear (há mais incógnitas (no caso, $\underline{n}$) do que equações (no caso, $\underline{m}$)), isto é, uma solução

$$\beta_1\,, \beta_2\,, \cdots, \beta_n$$

onde

$$\beta_{j_o} \neq 0\,, \quad \text{para algum} \quad j_o \in \{1\,,2\,,\cdots,n\}\,,$$

pois a solução trivial,

$$\beta_1 = \cdots = \beta_n = 0$$

é sempre solução de um sistema linear homogêneo (veja Apêndice (B)).

Logo, de (7.18), segue que os vetores

$$u_1\,, u_2\,, \cdots, u_n$$

deverão ser L.D. em $(V\,,+\,,\cdot)$, o que é um absurdo pois, por hipótese, o conjunto

$$\mathcal{B} = \{u_1\,, u_2\,, \cdots, u_n\}$$

é uma base de $(V\,,+\,,\cdot)$.

Logo deveremos ter

$$n \leq m\,.$$

De modo semelhante, mostra-se que

$$m \leq n\,,$$

ou seja,

$$n = m\,,$$

completando a demonstração do resultado.

∎

Observação 7.19 *Resumindo, o resultado acima nos diz que qualquer base de um espaço vetorial real (respectivamente, complexo), não identicamente nulo, finitamente gerado, tem o mesmo número de vetores.*

Com o resultado acima podemos introduzir a:

Definição 7.20 *Seja* $(V, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) finitamente gerado.*

Se

$$V = \{O\},$$

definiremos a **dimensão de V**, *como sendo* 0 *e escreveremos*

$$\dim(V) \doteq 0.$$

Se

$$V \neq \{O\},$$

definiremos a **dimensão de** $(V, +, \cdot)$, *como sendo o número de elementos de uma base qualquer de* $(V, +, \cdot)$ *e escreveremos*

$$\dim(V) \doteq \textit{número de elementos de uma base qualquer de } (V, +, \cdot),$$

ou seja, utilizaremos o símbolo $\dim(V)$, *para denotar a dimensão do espaço vetorial real (respectivamente, complexo)* $(V, +, \cdot)$ *que é finitamente gerado.*

Definição 7.21 *Se um espaço vetorial real (respectivamente, complexo)* $(V, +, \cdot)$ **não** *é finitamente gerado, diremos que ele tem* **dimensão não finita**.

Com isto temos a:

Proposição 7.22 *Seja* $(V, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) de dimensão não finita.*

Então $(V, +, \cdot)$ *possui, pelo menos, um subconjunto formado por um número não finito de vetores L.I. em* $(V, +, \cdot)$.

Prova:

Temos que

$$V \neq \{O\}$$

pois, caso contrário,

$$\dim(V) = 0,$$

o que contraria o fato de sua dimensão ser infinita.

Selecione $u_1 \in V$, de modo que

$$u_1 \neq O.$$

Como $(V, +, \cdot)$ não é finitamente gerado temos que

$$[u_1] \subseteq V \quad \text{e} \quad V \neq [u_1].$$

Logo, existe

$$u_2 \in V, \text{ tal que } \quad u_2 \notin [u_1].$$

Desta forma, os vetores u_1, u_2 são L.I. em $(V, +, \cdot)$ pois, caso contrário, se fosse L.D. em $(V, +, \cdot)$, deveríamos ter $u_2 \in [u_1]$ (pois $u_1 \neq O$).

Além disso, temos que

$$[u_1, u_2] \subseteq V \quad \text{e} \quad V \neq [u_1, u_2],$$

caso contrário, $(V, +, \cdot)$ teria dimensão finita (no caso, igual a 2).

Prosseguindo com as idéias acima, suponhamos que tenhamos encontrado vetores

$$u_1, u_2, \cdots, u_n \in V$$

L.I. em $(V, +, \cdot)$.

Como $(V, +, \cdot)$ não é finitamente gerado, segue que

$$[u_1, u_2, \cdots, u_n] \subseteq V \quad \text{e} \quad V \neq [u_1, u_2, \cdots, u_n].$$

Logo , existe

$$u_{n+1} \in V, \quad \text{ tal que } \quad u_{n+1} \notin [u_1, u_2, \cdots, u_n], \tag{7.23}$$

assim os vetores

$$u_1, u_2 \cdots, u_n, u_{n+1} \in V$$

deverão ser L.I. em $(V, +, \cdot)$ pois, caso contrário, como os vetores

$$u_1, \cdots, u_n$$

são L.I. em $(V, +, \cdot)$, pela Proposição (6.43), deveríamos ter

$$u_{n+1} \in [u_1, u_2, \cdots, u_n],$$

o que contrariaria (7.23).

Portanto, para qualquer conjunto finito de vetores L.I. em $(V, +, \cdot)$, podemos sempre encontrar um vetor, que não está no subespaço gerado por esse conjunto finito, e que, além disso, reunindo este vetor ao conjunto finito que tínhamos, obteremos um conjunto L.I. em $(V, +, \cdot)$, ou seja, existe em $(V, +, \cdot)$ um conjunto formado por infinitos de vetores L.I. em $(V, +, \cdot)$, como queríamos demonstrar.

∎

Como consequência da demonstração do Teorema (7.15) temos a:

Proposição 7.24 *Seja um espaço vetorial real (respectivamente, complexo)* $(V, +, \cdot)$ *de dimensão* $\underline{m}$ *fixada.*

Então qualquer conjunto de vetores de $(V, +, \cdot)$ *com mais de* $\underline{m}$ *elementos é, necessariamente, L.D. em* $(V, +, \cdot)$.

Demonstração:

Suponhamos, por absurdo que, os vetores

$$u_1 , u_2 , \cdots , u_n \in V$$

são L.I. em $(V , + , \cdot)$, com

$$n > m .$$

Então, seguindo a demonstração do Teorema (7.15), a partir de (7.16), obteremos um absurdo.

Logo, mais de $\underline{m}$ vetores em $(V , + , \cdot)$ deverão ser L.D. em $(V , + , \cdot)$, como queríamos demonstrar.

∎

Como consequência temos o:

Corolário 7.25 *Todo subespaço vetorial de um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) de dimensão finita, também terá dimensão finita.*

Prova:

Sejam $(V , + , \cdot)$ um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) de dimensão finita e W um subespaço vetorial de $(V , + , \cdot)$.

Suponhamos, por absurdo, que o espaço vetorial real (respectivamente, complexo) $(W , + , \cdot)$ tivesse dimensão não finita.

Pela Proposição (7.22), existiria um subconjunto L.I. em $(V , + , \cdot)$, formado por vetores de W, com um número não finito de elementos.

Como estes vetores também são L.I. em $(V , + , \cdot)$, pela Proposição (7.24), o número deles deveria ser menor do que a dimensão de V, que é finita, o que seria um absurdo.

Logo a dimensão do espaço vetorial real (respectivamente, complexo) W deverá ser finita, como queríamos demonstrar.

∎

Observação 7.26

1. *Na verdade podemos ser um pouco mais precisos na conclusão do Corolário* (7.25) *acima, a saber: suponhamos que W um subespaço vetorial de $(V , + , \cdot)$, que tem dimensão finita $\underline{n}$.*

   Então

   $$\dim(W) \leq n ,$$

   ou seja,

   $$\dim(W) \leq \dim(V) .$$

   Para mostrar isto basta supor, por absurdo, que

   $$\dim(W) > m .$$

Neste caso existiria uma base de $(W, +_V, \cdot_V)$, formada por mais que $\underline{m}$ vetores, em particular, existem mais que $\underline{m}$ vetores L.I. em $(W, +_V, \cdot_V)$ (onde $+_V$ e $\cdot_V$ indicam as operações de soma de elementos de V e multiplicação de elementos de V, respectivamente).

Assim os elementos desta base de $(W, +_V, \cdot_V)$ também serão L.I. em $(V, +, \cdot)$, ou seja, existe um subconjunto formado por vetores L.I. em $(V, +, \cdot)$ que têm mais que $\underline{m}$ elementos.

Como

$$m > \dim(V),$$

pela Proposição (7.24), teríamos um absurdo.

Portanto

$$\dim(W) \leq \dim(V).$$

2. *Se o espaço vetorial real (respectivamente, complexo) $(V, +, \cdot)$ tem dimensão $\underline{n}$, diremos que ele é um espaço vetorial real (respectivamente, complexo)* **$\underline{n}$-dimensional**.

Temos também o:

Corolário 7.27 *Suponhamos que $(V, +, \cdot)$ é um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) n-dimensional e os vetores*

$$u_1, u_2, \cdots, u_n$$

são L.I. em $(V, +, \cdot)$.

Então estes vetores formam uma base de $(V, +, \cdot)$.

Demonstração:

Seja

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$$

formado por $\underline{n}$ vetores L.I. em $(V, +, \cdot)$.

Mostremos que o conjunto $\mathcal{B}$ é uma base de $(V, +, \cdot)$, ou seja, que geram $(V, +, \cdot)$ (pois eles já são L.I. $(V, +, \cdot)$).

Suponhamos, por aburdo, que exista

$$u \in V, \quad \text{tal que} \quad u \notin [u_1, u_2, \cdots, u_n].$$

Isto implicará que os vetores

$$u, u_1, u_2, \cdots, u_n$$

são L.I. em $(V, +, \cdot)$.

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor (veja a Proposição (6.43)).

Mas isto contrariaria a Proposição (7.24), pois teríamos um conjunto L.I. em $(V, +, \cdot)$, com mais que $n = \dim(V)$ vetores.

Logo o conjunto $\mathcal{B}$ gera $(V, +, \cdot)$ e portanto o conjunto $\mathcal{B}$ será uma base de $(V, +, \cdot)$, como queríamos demonstrar.

∎

Exemplo 7.28 *Consideremos o espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ *(onde + e · são as operações usuais de soma de* n*-uplas e multiplicação de número real por* n*-uplas, respectivamente).*

Então

$$\dim(\mathbb{R}^n) = n.$$

Resolução:

Lembremos que, do Exemplo (7.3), temos que o conjunto

$$\mathcal{B} \doteq \{e_1, e_2, \cdots, e_n\} \subseteq \mathbb{R}^n,$$

onde

$$e_1 \doteq (1, 0, \cdots, 0), \cdots, e_j \doteq (0, \cdots, 0, \underbrace{1}_{j\text{–ésima posição}}, \cdots, 0), \ \cdots, \ e_n \doteq (0, \cdots, 0, 1)$$

é uma base de $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$.

Logo

$$\dim(\mathbb{R}^n) = n.$$

Exemplo 7.29 *Consideremos o espaço vetorial real* $(\mathscr{P}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *(onde + e · são as operações usuais de soma de funções e multiplicação de número real por função, respectivamente).*

Então a dimenão de $(\mathscr{P}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *é não finita.*

Resolução:

Lembremos que, do Exemplo (5.40), temos que $(\mathscr{P}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ não é finitamente gerado.

Logo sua dimensão não pode ser finita, completando a resolução.

□

Exemplo 7.30 *Consideremos o espaço vetorial real* $(\mathscr{P}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *(onde + e · são as operações usuais de soma de funções e multiplicação de número real por função, respectivamente).*

Então

$$\dim[\mathscr{P}_n(\mathbb{R})] = n + 1.$$

Resolução:

De fato, do Exemplo (5.38) temos que o conjunto

$$\mathcal{B} \doteq \{p_o, p_1, \cdots, p_n\} \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R}),$$

formado pelos seguintes polinômios:

$$p_o(x) \doteq 1, \quad p_1(x) \doteq x, \quad p_2(x) \doteq x^2, \quad \cdots, \quad p_n(x) \doteq x^n, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R},$$

geram $(\mathscr{P}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Deixaremos como exercício para o leitor mostrar que o conjunto $\mathcal{B}$ é um conjunto L.I. em $(\mathscr{P}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$, logo será uma base para $(\mathscr{P}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Portanto
$$\dim[\mathscr{P}_n(\mathbb{R})] = n + 1\,.$$

$\square$

Exemplo 7.31 *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ fixados e consideremos o espaço vetorial real $(M_{m\times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ (onde $+$ e $\cdot$ são as operações usuais soma de matrizes e multiplicção de númeor real por matriz, respectivamente).*

Então
$$\dim\,[M_{m\times n}] = m\,n\,.$$

Resolução:

Lembremos que, do Exemplo (5.35), temos que o conjunto

$$\mathcal{B} \doteq \{E_{k\,l}\,;\ \ k \in \{1, 2, \cdots, m\},\ \ l \in \{1, 2, \cdots, n\}\}$$

formado pelas matrizes de $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ dadas por:

$$E_{k,l} \doteq \left(\delta_{i,j}^{k,l}\right)_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}\,,$$

onde, para cada
$$k \in \{1, 2, \cdots, m\} \quad \text{e} \quad l \in \{1, 2, \cdots, n\}$$

temos que
$$\delta_{i,j}^{k,l} \doteq \begin{cases} 1\,, & \text{se } (i,j) = (k,l) \\ 0\,, & \text{se } (i,j) \neq (k,l) \end{cases}$$

formam uma base de $(M_{m\times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Portanto
$$\dim\,[M_{m\times n}] = m\,n\,.$$

$\square$

Deixaremos como exercício para o leitor o:

Exercício 7.32

1. *A dimensão do espaço vetorial das matrizes reais quadradas e simétricas de ordem $\underline{n}$ (veja Exemplo (4.17)) é igual a*
$$\frac{n\,(n+1)}{2}\,.$$

2. *Qual a dimensão do espaço vetorial das matrizes reais quadradas e anti-simétricas de ordem $\underline{n}$ (veja o Exercício (4.19)) ?*

Temos o seguinte importante resultado:

Teorema 7.33 (do completamento) *Seja* $(V, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) de dimensão* $\underline{n}$.

Suponhamos que os vetores

$$u_1, u_2, \cdots, u_m \in V$$

são L.I. em $(V, +, \cdot)$ *com*

$$m < n = \dim(V).$$

Então podemos encontrar $(m - n)$ *vetores, que indicaremos por*

$$u_{m+1}, u_{m+2}, \cdots, u_n \in V,$$

de modo que o conjunto

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1, u_2 \cdots, u_m, u_{m+1}, \cdots, u_n\}$$

é uma base de $(V, +, \cdot)$.

Demonstração:

Notemos que, como

$$m < n = \dim(V),$$

segue que

$$[u_1, u_2, \cdots, u_m] \neq V,$$

ou seja, existe

$$u_{m+1} \in V \setminus [u_1, u_2, \cdots, u_m]. \tag{7.34}$$

Afirmamos que os vetores

$$u_1, u_2, \cdots, u_m, u_{m+1} \in V$$

são L.I. em $(V, +, \cdot)$.

De fato, supondo, por absurdo, que os vetores

$$u_1, u_2, \cdots, u_m, u_{m+1} \in V$$

fossem vetores L.D. em $(V, +, \cdot)$, como os vetores

$$u_1, u_2, \cdots, u_m \in V$$

são L.I. em $(V, +, \cdot)$, da Proposição (6.43), teríamos que

$$u_{m+1} \in [u_1, u_2, \cdots, u_m],$$

o que contrariaria (7.34).

Notemos agora que, se

$$m + 1 = n,$$

então teríamos que o conjunto

$$\{u_1, u_2, \cdots, u_m, u_{m+1}\}$$

será uma base de $(V, +, \cdot)$ e este conjunto contém os vetores

$$u_1, u_2, \cdots, u_m$$

e assim terminaríamos a demonstração.

Caso contrário, isto é, se

$$m + 1 < n = \dim(V),$$

então segue que

$$[u_1, u_2, \cdots, u_{m+1}] \neq V,$$

ou seja, existe

$$u_{m+2} \in V \setminus [u_1, u_2, \cdots, u_{m+1}]. \tag{7.35}$$

Afirmamos que os vetores

$$u_1, u_2, \cdots, u_{m+1}, u_{m+2} \in V$$

são L.I. em $(V, +, \cdot)$.

De fato, pois se

$$u_1, u_2, \cdots, u_{m+1}, u_{m+2} \in V$$

fossem vetores L.D. em $(V, +, \cdot)$, como os vetores

$$u_1, u_2, \cdots, u_{m+1} \in V$$

são L.I. em $(V, +, \cdot)$, pela Proposição (6.43), teríamos que

$$u_{m+2} \in [u_1, u_2, \cdots, u_{m+1}],$$

o que contrariaria (7.35).

Como

$$\dim(V) = n < \infty$$

repetindo os argumentos acima, um número finito de vezes, encontraremos vetores

$$u_{m+1}, u_{m+2}, \cdots, u_{m+k} \in V,$$

com

$$m + k = n = \dim(V),$$

de forma que o conjunto

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1, \cdots, u_m, u_{m+1}, \cdots, u_{m+k}\}$$

seja L.I. em $(V, +, \cdot)$ e como

$$\dim(V) = n = m + k,$$

segue que o conjunto $\mathcal{B}$ será uma base de $(V, +, \cdot)$ e este conjunto contém os vetores

$$u_1, u_2, \cdots, u_m,$$

completando a demonstração do resultado.

∎

Exemplo 7.36 *Consideremos o espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de soma de ternas e multiplicação de número real por terna, respectivamente).*

Encontre uma base do $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ *que contenha o vetor* $(1, 1, -1)$.

Resolução:

Como

$$\dim(\mathbb{R}^3) = 3,$$

do Teorema do completamento (isto é, do Teorema (7.33)), precisamos encontrar dois vetores, que denotaremos por

$$u_1 \doteq (x_1, y_1, z_1) \quad \text{e} \quad u_2 \doteq (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3,$$

que juntamente com o vetor

$$u \doteq (1, 1, -1)$$

sejam L.I. em $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Porém, do Exemplo (6.14), sabemos que isto é equivalente ao determinante da matriz

$$\begin{aligned} A &\doteq \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & y_1 & y_2 \\ -1 & z_1 & z_2 \end{pmatrix} \\ &= x_2(y_1 + z_1) - y_2(x_1 + z_1) + z_2(y_1 - x_1) \end{aligned} \tag{7.37}$$

ser diferente de zero.

Há uma infinidade de possibilidades para que isto aconteça, por exemplo, considerando-se

$$(x_1, y_1, z_1) \doteq (0, 1, 1) \quad \text{e} \quad (x_2, y_2, z_2) \doteq (0, 0, 1).$$

Neste caso, teremos

$$\det(A) \overset{(7.37)}{=} 1 \neq 0.$$

Portanto uma base de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, que contenha o vetor

$$u = (1, 1, -1)$$

é, por exemplo, o conjunto

$$\mathcal{B} \doteq \{(1, 1, -1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}.$$

$\square$

7.3 Dimensão da Soma de Subespaços Vetoriais

Começaremos esta seção com o seguinte importante resultado:

Proposição 7.38 *Seja* $(V, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) de dimensão finita e* U *,* W *subespaços vetoriais de* $(V, +, \cdot)$.

Então deveremos ter:

$$\dim(U \cap W) + \dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) . \tag{7.39}$$

Demonstração:

Do Corolário (7.25), segue que todo subespaço de um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) de dimensão finita terá também dimensão finita, em particular, temos que

$$\dim(U) , \; \dim(W) , \; \dim(U \cap W) , \; \dim(U + W) \leq \dim(V) < \infty .$$

Se

$$m \doteq \dim(U \cap W) < \infty , \tag{7.40}$$

existirá um conjunto

$$\mathcal{C} \doteq \{v_1 , v_2 , \cdots , v_m\} ,$$

formado por vetores de $(V, +, \cdot)$, que é uma base de $(U \cap W, +_V, \cdot_V)$.

Como estes vetores são L.I. em $(V, +, \cdot)$, e pertencem a U, pelo Teorema (7.33), existirão vetores

$$u_1 , u_2 , \cdots , u_p \in U ,$$

tais que o conjunto

$$\mathcal{A} \doteq \{v_1 , v_2 , \cdots , v_m , u_1 , u_2 , \cdots , u_p\}$$

é uma base de $(U, +_V, \cdot_V)$.

Notemos que, neste caso, estamos supondo

$$\dim(U) = m + p . \tag{7.41}$$

Por outro lado, os vetores

$$v_1 , v_2 , \cdots , v_m$$

são L.I. em $(V, +, \cdot)$ e também pertencem a W.

Logo, pelo Teorema (7.33), é possível encontrar vetores

$$w_1 , w_2 , \cdots , w_q \in W ,$$

de modo que o conjunto

$$\mathcal{B} \doteq \{v_1 , v_2 , \cdots , v_m , w_1, \cdots , w_q\} ,$$

seja uma base de $(W, +_V, \cdot_V)$.

Notemos que, neste caso estamos supondo

$$\dim(W) = m + q . \tag{7.42}$$

Com a notação acima, teremos

$$\dim(U \cap W) = m\,, \quad \dim(U) = m + p \quad \text{e} \quad \dim(W) = m + q\,.$$

Sendo assim, a fim de mostrarmos a identidade (7.39), é necessário (e, na verdade, suficiente) mostrar que

$$\dim(U + W) = m + p + q\,.$$

Para tanto, basta mostrarmos que o conjunto

$$\mathcal{D} \doteq \{u_1\,, u_2\,, \cdots\,, u_p\,, w_1\,, w_2\,, \cdots\,, w_q\,, v_1\,, v_2\,, \cdots\,, v_m\} \tag{7.43}$$

é uma base de $(U + W\,, +_V\,, \cdot_V)$.

Mostremos primeiramente que os vetores do conjunto $\mathcal{D}$ geram $(U + W\,, +_V\,, \cdot_V)$.

Para isto, dado

$$v \in U + W\,,$$

segue que existem

$$u \in U \quad \text{e} \quad w \in W\,, \quad \text{tais que} \quad v = u + w\,.$$

Como $u \in U$, e o conjunto $\mathcal{A}$ é uma base de $(U\,, +_V\,, \cdot_V)$, segue que o vetor $\underline{u}$ pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores

$$u_1\,, u_2\,, \cdots\,, u_p\,, v_1\,, v_2\,, \cdots\,, v_m\,.$$

De modo semelhante, como $w \in W$, e $\mathcal{B}$ base de $(W\,, +_V\,, \cdot_V)$, segue que o vetor $\underline{w}$ pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores

$$w_1\,, w_2\,, \cdots\,, w_q\,, v_1\,, v_2\,, \cdots\,, v_m\,.$$

Logo o vetor

$$v = u + w$$

poderá ser escrito como uma combinação linear dos vetores

$$u_1\,, u_2\,, \cdots\,, u_p\,, v_1\,, v_2\,, \cdots\,, v_m\,, w_1\,, w_2\,, \cdots\,, w_q\,,$$

ou seja,

$$v \in [u_1\,, u_2\,, \cdots\,, u_p\,, v_1\,, v_2\,, \cdots\,, v_m\,, w_1\,, w_2\,, \cdots\,, w_q]\,,$$

mostrando que

$$U + W = [u_1\,, u_2\,, \cdots\,, u_p\,, v_1\,, v_2\,, \cdots\,, v_m\,, w_1\,, w_2\,, \cdots\,, w_q]\,,$$

ou seja, o conjunto $\mathcal{D}$ gera $(U + W\,, +_V\,, \cdot_V)$.

Mostremos agora, que o conjunto $\mathcal{D}$ é L.I. em $(V\,, +\,, \cdot)$.

Suponhamos que os escalares

$$\alpha_1\,, \alpha_2\,, \cdots\,, \alpha_p\,, \beta_1\,, \beta_2\,, \cdots\,, \beta_q\,, \delta_1\,, \delta_2\,, \cdots\,, \delta_m \in \mathbb{R} \text{ (respectivamente, } \mathbb{C})\,,$$

são tais que

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_p \cdot u_p + \beta_1 \cdot w_1 + \cdots + \beta_q \cdot w_q + \delta_1 \cdot v_1 + \cdots + \delta_m \cdot v_m = O\,, \tag{7.44}$$

que pode ser reescrita como:

$$\underbrace{\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_p \cdot u_p + \delta_1 \cdot v_1 + \cdots + \delta_m \cdot v_m}_{\in U} = \underbrace{-\beta_1 \cdot w_1 - \cdots - \beta_q \cdot w_q}_{\in W}\,.$$

Em particular, teremos que:

$$-\beta_1 \cdot w_1 - \cdots - \beta_q \cdot w_q \in U \cap W = [v_1\,, v_2\,, \cdots\,, v_m].$$

Consequentemente, existirão escalares

$$\gamma_1\,, \gamma_2\,, \cdots\,, \gamma_m \in \mathbb{R} \text{ (respectivamente, } \mathbb{C})\,,$$

tais que

$$-\beta_1 \cdot w_1 - \cdots - \beta_q \cdot w_q = \gamma_1 \cdot v_1 + \cdots + \gamma_m \cdot v_m\,,$$

ou, equivalentemente,

$$\beta_1 \cdot w_1 + \cdots + \beta_q \cdot w_q + \gamma_1 \cdot v_1 + \cdots + \gamma_m \cdot v_m = 0\,.$$

Como os vetores

$$w_1\,, w_2\,, \cdots\,, w_q\,, v_1\,, v_2\,, \cdots\,, v_m \in W$$

são L.I. em $(W\,, +_V\,, \cdot_V)$ (pois formam uma base de $(W\,, +_V\,, \cdot_V)$), segue-se que deveremos ter

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \cdots = \gamma_m = \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_q = 0\,. \tag{7.45}$$

Assim, a equação (7.44) reduz-se a:

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_p \cdot u_p + \delta_1 \cdot v_1 + \cdots + \delta_m \cdot v_m = 0.$$

Mas os vetores

$$u_1\,, u_2\,, \cdots\,, u_p\,, v_1\,, v_2\,, \cdots\,, v_m\,,$$

são L.I. em $(U, +_V, \cdot_V)$ (pois formam uma base de $(U\,, +_V\,, \cdot_V)$).

Logo segue-se que

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p = \delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_m = 0\,. \tag{7.46}$$

Portanto, de (7.45) e (7.46), segue que os vetores do conjunto $\mathcal{D}$ (dado por (7.43)) são L.I. em $(V\,, +\,, \cdot)$ e assim uma base de $(V\,, +\,, \cdot)$.

Portanto

$$\begin{aligned} \dim(U + W) &= m + p + q \\ &= (m + p) + (m + q) - m \\ &\overset{(7.40),\,(7.41)\text{ e }(7.42)}{=} \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)\,, \end{aligned}$$

ou seja, vale a identidade (7.39), completando a demonstração.

∎

15.09.2015 - 10.a

Corolário 7.47 *Seja* U *um subespaço vetorial de um espaço vetorial real (respectivamente, complexo)* $(V\,,+\,,\cdot)$ *de dimensão finita.*

Se

$$\dim(U) = \dim(V)\,,$$

então deveremos ter

$$U = V\,.$$

Demonstração:

Suponhamos, por absurdo, que

$$U \neq V$$

(temos que $U \subseteq V$), isto é, existe um vetor

$$u_1 \in V\,, \quad \text{tal que} \quad u_1 \notin U\,,$$

em particular,

$$u_1 \neq O$$

pois, se fosse o vetor O pertenceria a U (pois ele é subespaço vetorial).

Definamos

$$W \doteq [u_1]\,.$$

Logo

$$\dim(W) = 1\,.$$

Como

$$u_1 \notin U\,, \quad \text{segue que} \quad U \cap W = \{O\}\,.$$

Por outro lado, como

$$\dim(W) = 1\,,$$

da Proposição (7.38), segue que

$$\begin{aligned}\dim(U + W) &= \dim(U) + \underbrace{\dim(W)}_{=1} + \underbrace{\dim(U \cap W)}_{=0}\\ &= \dim(U) + 1\\ &\overset{\dim(U)=\dim(V)}{=} \dim(V) + 1\\ &> \dim(V)\,,\end{aligned}$$

o que é um absurdo, pois o conjunto $U + W$ é um subespaço vetorial de $(V\,,+\,,\cdot)$, logo da Observação (7.26), deveremos ter

$$\dim(U + W) \leq \dim(V)\,.$$

Portanto podemos concluir que

$$U = V\,,$$

como queríamos demonstrar.

∎

Observação 7.48 *Notemos que se* $(V, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) de dimensão finita,* U *e* W *são subespaços vetoriais de* $(V, +, \cdot)$ *(como na Proposição (7.38)) e se além disso, tivermos*

$$V = U + W \quad e \quad \dim(U) + \dim(W) > \dim(V),$$

então

$$U \cap W \neq \{O\}$$

ou seja, a soma $U + W$, **não** *será uma soma direta.*

De fato, se soma $U + W$, *fosse uma soma direta, deveríamos ter*

$$U \cap W = \{0\}.$$

Logo, pela Proposição (7.38), teríamos

$$\begin{aligned} 0 &= \dim(U \cap W) \\ &= \dim(U) + \dim(W) - \dim(\underbrace{U + W}_{=V}) \\ &= \dim(U) + \dim(W) - \dim(V) > 0, \end{aligned}$$

o que seria um absurdo.

Logo a soma $U + W$ **não** *pode ser uma soma direta.*

Também como consequência da Proposição (7.38) temos o:

Corolário 7.49 *Sejam* $(V, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) de dimensão finita e* U *e* W *são subespaços vetoriais de* $(V, +, \cdot)$ *de modo que*

$$V = U + W.$$

Então

$$V = U \oplus W \tag{7.50}$$

se, e somente se,

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W). \tag{7.51}$$

Demonstração:

Notemos que

$$V = U \oplus W$$

se, e somente se,

$$U \cap W = \{0\},$$

que é equivalente a dizer que

$$\dim[U \cap W] = 0,$$

que da Proposição (7.38) é equivalente a identidade

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W),$$

completando a demonstração do resultado.

∎

Temos os seguintes exemplos:

Exemplo 7.52 *Consideremos os subespaços vetoriais* U *e* W *de* $\left(\mathbb{R}^4,+,\cdot\right)$*, dados no Exemplo (5.46).*

Encontrar bases e as dimensões dos subespaços vetoriais

$$U\,,\ W\,,\ U\cap W \ \ e\ \ U+W\,.$$

Resolução:

Vimos no Exemplo (5.46) que:

$$\begin{aligned}
U &= [(1\,,1\,,0\,,0)\,,(0\,,1\,,1\,,0)\,,(0\,,1\,,0\,,1)]\,,\\
W &= [(1\,,0\,,0\,,1)\,,(0\,,1\,,0\,,1)\,,(0\,,0\,,1\,,1)]\,,\\
U\cap W &= [(1\,,0\,,-1\,,0)\,,(0\,,1\,,0\,,1)]\,,\\
U+W &= [(1\,,1\,,0\,,0)\,,(0\,,1\,,1\,,0)\,,(0\,,1\,,0\,,1)\,,(1\,,0\,,0\,,1)\,,(0\,,0\,,1\,,1)]\,.
\end{aligned}$$

Verifiquemos a dependência ou independência linear de cada um dos conjuntos de vetores acima que determinam os subespaços gerados.

Para o subespaço vetorial U:

Estudemos a dependência linear dos vetores que geram $(U\,,+\,,\cdot)$, ou seja, os vetores

$$(1\,,1\,,0\,,0)\ ,\ (0\,,1\,,1\,,0)\ ,\ (0\,,1\,,0\,,1)\,.$$

Para isto, sejam $\alpha\,,\beta\,,\gamma\in\mathbb{R}$, tais que

$$\alpha\cdot(1\,,1\,,0\,,0)+\beta\cdot(0\,,1\,,1\,,0)+\gamma\cdot(0\,,1\,,0\,,1)=(0\,,0\,,0\,,0)\,,$$

que será equivalente à:

$$(\alpha\,,\alpha+\beta+\gamma\,,\beta\,,\gamma)=(0\,,0\,,0\,,0)\,,$$

$$\text{ou seja,}\quad \begin{cases}\alpha=0\\ \alpha+\beta+\gamma=0\\ \beta=0\\ \gamma=0\end{cases}\,,$$

$$\text{ou ainda,}\quad \alpha=\beta=\gamma=0\,.$$

Logo podemos conclui que os vetores

$$(1\,,1\,,0\,,0)\ ,\ (0\,,1\,,1\,,0)\ ,\ (0\,,1\,,0\,,1)$$

são L.I. em $\left(\mathbb{R}^4\,,+\,,\cdot\right)$.

Portanto o conjunto

$$\mathcal{B}\doteq\{(1\,,1\,,0\,,0)\,,(0\,,1\,,1\,,0)\,,(0\,,1\,,0\,,1)\}$$

será uma base para $(U\,,+\,,\cdot)$.

Em particular, segue que

$$\dim(U) = 3\,. \tag{7.53}$$

Para o subespaço vetorial W:

Estudemos a dependência linear dos vetores que geram $(W\,,+\,,\cdot)$, isto é, dos vetores

$$(1\,,0\,,0\,,1)\;,\;(0\,,1\,,0\,,1)\;,\;(0\,,0\,,1\,,1)\,.$$

Para isto sejam $\alpha\,,\beta\,,\gamma \in \mathbb{R}$,tais que

$$\alpha\cdot(1\,,0\,,0\,,1) + \beta\cdot(0\,,1\,,0\,,1) + \gamma\cdot(0\,,0\,,1\,,1) = (0\,,0\,,0\,,0)\,,$$

que será equivalente à:

$$(\alpha\,,\beta\,,\gamma\,,\alpha+\beta+\gamma) = (0\,,0\,,0\,,0)\,,$$

$$\text{ou seja,}\qquad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \alpha+\beta+\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\text{ou ainda,}\qquad \alpha = \beta = \gamma = 0\,.$$

Logo podemos conclui que os vetores

$$(1\,,0\,,0\,,1)\;,\;(0\,,1\,,0\,,1)\;,\;(0\,,0\,,1\,,1)$$

são L.I. em $\left(\mathbb{R}^4\,,+\,,\cdot\right)$.

Portanto o conjunto

$$\mathcal{C} \doteq \{(1\,,0\,,0\,,1)\,,(0\,,1\,,0\,,1)\,,(0\,,0\,,1\,,1)\}$$

será uma base para $(W\,,+\,,\cdot)$.

Em particular, temos que

$$\dim(W) = 3\,. \tag{7.54}$$

Para o subespaço vetorial $U \cap W$:

Estudemos a dependência linear dos vetores que geram $(U\cap W\,,+\,,\cdot)$, isto é, os vetores

$$(1\,,0\,,-1\,,0)\;,\;(0\,,1\,,0\,,1)\,.$$

Para isto, sejam $\alpha\,,\beta \in \mathbb{R}$, tais que

$$\alpha\cdot(1\,,0\,,-1\,,0) + \beta\cdot(0\,,1\,,0\,,1) = (0\,,0\,,0\,,0)\,,$$

que será equiavelente à

$$(\alpha\,,\beta\,,-\alpha\,,\beta) = (0\,,0\,,0\,,0)\,,$$

$$\text{ou seja,}\qquad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ -\alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}\,,$$

$$\text{ou ainda,}\qquad \alpha = \beta = 0\,.$$

Logo podemos conclui que os vetores

$$(1\,,0\,,-1\,,0)\ ,\ (0\,,1\,,0\,,1)$$

são L.I. em $\left(\mathbb{R}^4\,,+\,,\cdot\right)$.

Portanto o conjunto

$$\mathcal{D} \doteq \{(1\,,0\,,-1\,,0)\,,(0\,,1\,,0\,,1)\}$$

será uma base para $(U \cap W\,,+\,,\cdot)$.

Em particular, temos que

$$\dim(U \cap W) = 2\,. \tag{7.55}$$

Para o subespaço vetorial $U + W$:

Pela Proposição (7.38), temos

$$\begin{aligned}\dim(U + W) &= \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)\\ &\overset{(7.53),(7.54)\text{ e }(7.55)}{=} 3 + 3 - 2 = 4 = \dim\left(\mathbb{R}^4\right)\ .\end{aligned}$$

Logo, pela Proposição (7.47), segue que

$$U + W = \mathbb{R}^4\,.$$

Logo podemos considerar a base canônica de $\left(\mathbb{R}^4\,,+\,,\cdot\right)$ com uma base para $(U+W,+,\cdot)$, ou seja,

$$\mathcal{D} \doteq \{(1\,,0\,,0\,,0)\,,(0\,,1\,,0\,,0)\,,(0\,,0\,,1\,,0)\,,(0\,,0\,,0\,,1)\}$$

será uma base para $(U + W\,,+\,,\cdot)$.

Observação 7.56 *Notemos que, no Exemplo (7.52) acima, temos que*

$$\dim(U \cap W) \overset{(7.55)}{=} 2 > 0\,.$$

Logo

$$U \cap W \neq \{0\}$$

e assim segue

$$\mathbb{R}^4 = U + W\,,$$

mas esta soma **não** *é uma soma direta.*

Exemplo 7.57 *Consideremos o espaço vetorial real* $(\mathscr{P}_3(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de soma de polinômios e multiplicação de número real por polinômio, respectivamente).*

Sejam

$$U \doteq \{p \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})\,;\, p(0) = p(1) = 0\} \quad e \quad W \doteq \{q \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})\,;\, q(-1) = 0\}\,.$$

Encontrar bases e as dimensões para os subespaços vetoriais

$$U\,,\ W\,,\ U \cap W \quad e \quad U + W$$

do espaço vetorial real $(\mathscr{P}_3(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$.

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor mostrar que os conjunto U e W são subespaços vetoriais do espaço vetorial real $(\mathscr{P}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

<u>Para o subespaço vetorial U :</u>

Se $p \in U \subseteq \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$, devem existir

$$a_o, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R},$$

tais que

$$p(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R},$$

assim

$$p(0) = a_o \quad \text{e} \quad p(1) = a_o + a_1 + a_2 + a_3. \tag{7.58}$$

Logo,

$$\begin{aligned} & p \in U \\ \text{se, e somente se,} \quad & p(0) = p(1) = 0 \\ \text{ou seja, de(7.58)} \quad & \begin{cases} a_o = 0 \\ a_o + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \end{cases} \\ \text{ou seja,} \quad & \begin{cases} a_o = 0 \\ a_1 = -a_2 - a_3 \end{cases}, \\ \text{ou ainda,} \quad & p(x) = -(a_2 + a_3)x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = a_2\left(x^2 - x\right) + a_3\left(x^3 - x\right). \end{aligned} \tag{7.59}$$

para cada $x \in \mathbb{R}$.

Definindo-se $p_1, p_2 \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ dados por

$$p_1(x) \doteq x^2 - x, \quad \text{e} \quad p_2(x) \doteq x^3 - x, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R},$$

temos que $p_1, p_2 \in U$, pois

$$p_1(0) = p_1(1) = 0 \quad \text{e} \quad p_2(0) = p_2(1) = 0.$$

Logo, de (7.59), teremos que

$$U = [p_1, p_2].$$

Além disso os vetores p_1, p_2 são L.I. em $(\mathscr{P}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$, pois têm graus diferentes.
Deixaremos os detalhes da demonstração deste fato como exercício para o leitor.
Logo, o conjunto $\mathcal{B} \doteq \{p_1, p_2\}$ é uma base de $(U, +, \cdot)$, em particular,

$$\dim(U) = 2. \tag{7.60}$$

<u>Para o subespaço vetorial W :</u>

Se $q \in W \subseteq \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$, devem existir

$$a_o, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R},$$

tais que

$$q(x) = a_o + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

assim

$$\begin{aligned} q(-1) &= a_o + a_1 \cdot (-1) + a_2 \cdot (-1)^2 + a_3 \cdot (-1)^3 \\ &= a_o - a_1 + a_2 - a_3\,. \end{aligned} \tag{7.61}$$

Logo,

$$\begin{array}{rl} & q \in W \\ \text{se, e somente se,} & q(-1) = 0\,, \\ \text{ou seja, de (7.61)} & a_o - a_1 + a_2 - a_3 = 0 \\ \text{ou ainda,} & a_3 = a_o - a_1 + a_2\,, \\ \text{portanto,} & \end{array}$$

$$\begin{aligned} q(x) &= a_o + a_1\,x + a_2\,x^2 + (a_o - a_1 + a_2)\,x^3 \\ &= a_o\,\left(1 + x^3\right) + a_1\,\left(x - x^3\right) + a_2\,\left(x^2 + x^3\right) \end{aligned} \tag{7.62}$$

para cada $x \in \mathbb{R}$.

Definindo-se $q_1, q_2, q_3 \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ dados por

$$q_1(x) \doteq 1 + x^3, \quad \text{e} \quad q_2(x) \doteq x - x^3, \quad q_3(x) \doteq x^2 + x^3\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

temos que $q_1, q_2, q_3 \in W$, pois

$$q_1(-1) = q_2(-1) = q_3(-1) = 0\,.$$

Logo, de (7.62), temos que

$$W = [q_1\,, q_2\,, q_3]\,.$$

Além disso os vetores $q_1\,, q_2\,, q_3$ são L.I. em $(\mathscr{P}_3(\mathbb{R})\,, +\,, \cdot)$.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Logo o conjunto $\mathcal{C} \doteq \{q_1\,, q_2\,, q_3\}$ é uma base de $(W\,, +\,, \cdot)$, em particular,

$$\dim(W) = 3\,. \tag{7.63}$$

Para o subespaço vetorial $U \cap W$:

Se $p \in U \cap W \subseteq \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$, devem existir

$$a_o\,, a_1\,, a_2\,, a_3 \in \mathbb{R}\,,$$

tais que

$$p(x) = a_o + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

assim, como vimos anteriormente:

$$p(0) = a_o\,, \quad p(1) = a_o + a_1 + a_2 + a_3 \quad \text{e} \quad p(-1) = a_o - a_1 + a_2 - a_3\,. \tag{7.64}$$

Logo

$$p \in U \cap W$$

se, e somente se, $\begin{cases} a_o = 0 \\ a_o + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_o - a_1 + a_2 - a_3 = 0 \end{cases}$,

ou seja (Exercício), $\begin{cases} a_o = a_2 = 0 \\ a_3 = -a_1 \end{cases}$

ou ainda, $p(x) = a_1\left(x - x^3\right)$, (7.65)

para cada $x \in \mathbb{R}$.

Definindo-se $r \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ por

$$r(x) \doteq x - x^3, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R},$$

temos que $r \in W$, pois

$$r(0) = r(1) = r(-1) = 0.$$

Logo, de (7.65) temos que

$$U \cap W = [r].$$

Além disso o vetor $r \neq O \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$, logo é L.I. em $(\mathscr{P}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$, assim o conjunto $\mathcal{D} \doteq \{r\}$ é uma base de $(U \cap W, +, \cdot)$, em particular,

$$\dim(U \cap W) = 1. \tag{7.66}$$

<u>Para o subespaço vetorial $U + W$:</u>

Notemos que, da Proposição (7.38), segue que

$$\begin{aligned} \dim(U + W) &= \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) \\ &\overset{(7.60),(7.63),(7.66)}{=} 2 + 3 - 1 = 4 \\ &= \dim\left[\mathscr{P}_3(\mathbb{R})\right]. \end{aligned}$$

Logo, da Proposição (7.47), segue que

$$U + W = \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$$

e assim podemos tomar como base para o subespaço vetorial $U + W$, o conjunto formado pelos polinômios $s_o, s_1, s_2, s_3 \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$, dados por

$$s_o(x) \doteq 1, \quad s_1(x) \doteq x, \quad s_2(x) \doteq x^2, \quad s_3(x) \doteq x^3, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R},$$

ou seja, a base canônica do espaço vetorial real $(\mathscr{P}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$. □

Observação 7.67 *Como*

$$\dim(U \cap W) = 1 \neq 0,$$

temos que

$$U \cap W \neq \{0\},$$

assim segue

$$\mathscr{P}_3(\mathbb{R}) = U + W,$$

mas esta soma **não** *é uma soma direta.*

7.4 Coordenadas

Sejam $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) finitamente gerado e

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$$

uma base de $(V, +, \cdot)$.

Observação 7.68 *A partir de agora uma base de um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) tem uma ordenação dos seus elementos, ou seja, se troacarmos a ordem dos elementos de conjunto de vetores L.I. que geram $(V, +, \cdot)$,ou seja, de uma base, isto produzira uma nova base, diferente da que iniciamos.*

Em alguns textos, para diferenciá-las, dá-se o nomde de **base ordenada** *de $(V, +, \cdot)$*

Como $\mathcal{B}$ é uma base (ordenada) de $(V, +, \cdot)$, todo vetor de $u \in V$ se escreve como combinação linear dos elementos de $\mathcal{B}$, isto é, existem escalares

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ (respectivamente, } \mathbb{C}),$$

tais que

$$u = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 \cdots + \alpha_n \cdot u_n .$$

Fixada a base (ordenada) $\mathcal{B}$, pela Proposição (6.47), os escalares $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ (respectivamente, $\mathbb{C}$), obtidos acima, são **unicamente** determinados pelo vetor $\underline{u}$.

Definição 7.69 *Os coeficientes*

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ (respectivamente, } \mathbb{C})$$

obtidos (de modo único) acima, serão denominados **coordenadas do vetor u** *em relação à base $\mathcal{B}$, de $(V, +, \cdot)$.*

Denotaremos por $[u]_{\mathcal{B}}$ (ou por $u_{\mathcal{B}}$), a matriz de $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ (ou $M_n(\mathbb{C})$), definida por:

$$[u]_{\mathcal{B}} \doteq \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix},$$

que será denominada **matriz das coordenadas do vetor u** *em relação à base (ordenada) $\mathcal{B}$, do espaço vetorial real (respectivamente, complexo) $(V, +, \cdot)$.*

Com isto temos o:

Exemplo 7.70 *Mostre que o conjunto*

$$\mathcal{B} \doteq \{(1\,,1\,,1)\,,(0\,,1\,,1)\,,(0\,,0\,,1)\}$$

é uma base do espaço vetorial real $\left(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot\right)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $\mathbb{R}^3$*).*

Encontre as coordenadas do vetor

$$u \doteq (1\,,2\,,0) \in \mathbb{R}^3$$

em relação à base (ordenada) $\mathcal{B}$ *e a matriz das coordenadas do vetor* $\underline{u}$ *(isto é,* $[u]_{\mathcal{B}}$*), em relação à base (ordenada)* $\mathcal{B}$*.*

Resolução:

Sabemos que

$$\dim\left(\mathbb{R}^3\right) = 3\,.$$

Logo, para saber se o conjunto $\mathcal{B}$ é uma base de $\left(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot\right)$, basta verificar se os vetores do conjunto $\mathcal{B}$ são L.I. em $\left(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot\right)$.

Utilizando-se o Exemplo (6.14), vemos que estes vetores são de fato L.I. em $\left(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot\right)$, pois

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{Exercício}}{=} 1 \neq 0\,.$$

Logo, o conjunto $\mathcal{B}$ será uma base de $\left(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot\right)$.

Para encontrarmos as coordenadas do vetor $\underline{u}$ em relação à base (ordenada) $\mathcal{B}$, vale observar que precisaremos encontrar escalares

$$\alpha\,,\beta\,,\gamma \in \mathbb{R}\,,$$

tais que

$$\begin{aligned} (1\,,2\,,0) &= \alpha\cdot(1\,,1\,,1) + \beta\cdot(0\,,1\,,1) + \gamma\cdot(0\,,0\,,1) \\ &= (\alpha\,,\alpha+\beta\,,\alpha+\beta+\gamma) \end{aligned} \tag{7.71}$$

que é equivalente ao sistema linear

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha + \beta = 2 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

cuja (única) solução será

$$\alpha = 1\,, \quad \beta = 1\,, \quad \gamma = -2\,.$$

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Portanto, estas serão as coordenadas do vetor $\underline{u}$ em relação à base (ordenada) $\mathcal{B}$.

Desse modo, a matriz das coordenadas do vetor

$$u = (1\,,2\,,0)\,,$$

em relação à base (ordenada) $\mathcal{B}$, será dada por:

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Temos também o:

Exemplo 7.72 *Mostre que os polinômios* $p_o, p_1, p_2 \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ *dados por*

$$p_o(x) \doteq 1\,, \quad p_1(x) \doteq x\,, \quad p_2(x) \doteq x^2 - x\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,, \tag{7.73}$$

formam uma base, que denotaremos por $\mathcal{B}$, *do espaço vetorial real* $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de adição de polinômios e multiplicação de número real por polinômio, respectivamente).*

Encontre as coordenadas e a matriz das coordenadas do vetor $p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ *dado por*

$$p(x) \doteq 1 + x + x^2\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,, \tag{7.74}$$

com relação à base (ordenada) $\mathcal{B}$.

Encontre também as coordenadas e a matriz das coordenadas do vetor $\underline{p}$ *acima, em relação à base (ordenada)* $\mathcal{C} \doteq \{q_o, q_1, q_2\}$, *onde*

$$q_o(x) \doteq 1\,, \quad q_1(x) \doteq x\,, \quad q_2(x) \doteq x^2\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,, \tag{7.75}$$

isto é, o conjunto $\mathcal{C}$ *é a base canônica de* $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$.

Resolução:

Para verificar que o conjunto $\mathcal{B}$ é uma base de $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$, basta mostrar que todo vetor $q \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ se escreve de maneira única como combinação linear dos vetores do conjunto $\mathcal{B}$.

Notemos que se $q \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, existirão

$$a_o\,, a_1\,, a_2 \in \mathbb{R}\,,$$

tais que

$$q(x) = a_o + a_1\,x + a_2\,x^2\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{7.76}$$

Logo basta mostrar que existem <u>**únicos**</u> escalares

$$\alpha\,, \beta\,, \gamma \in \mathbb{R}\,,$$

tais que

$$\begin{aligned}
& q = \alpha \cdot p_o + \beta \cdot p_1 + \gamma \cdot p_2\,, \\
\text{ou seja,} \quad & q(x) = \alpha\, p_o(x) + \beta\, p_1(x) + \gamma\, p_2(x)\,, \quad \text{para cada} \ \ x \in \mathbb{R}\,, \\
\text{ou ainda,} \quad & a_o + a_1\,x + a_2\,x^2 = \alpha + \beta\,x + \gamma\,\left(x^2 - x\right)\,, \quad \text{para cada} \ \ x \in \mathbb{R}\,, \\
\text{equivalentemente,} \quad & a_o + a_1\,x + a_2\,x^2 = \alpha + (\beta - \gamma)\,x + \gamma\,x^2\,, \quad \text{para cada} \ \ x \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

A identidade acima é equivalente ao sistema linear

$$\begin{cases} \alpha = a_o \\ \beta - \gamma = a_1 \\ \gamma = a_2, \end{cases}$$

que possui uma **<u>única</u>** solução, dada por:

$$\alpha = a_o\,, \ \ \beta = a_1 + a_2\,, \ \ \gamma = a_2\,. \tag{7.77}$$

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Com isto teremos que o conjunto $\mathcal{B}$ é uma base de $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$.

Os escalares obtidos em (7.77), serão as coordenadas do vetor $q \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ em relação à base (ordenada) $\mathcal{B}$ de $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$.

Logo a matriz das coordenadas do vetor $p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ dado por (7.74), em relação à base (ordenada) $\mathcal{B}$ de $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$, será dada por (faça $a_o = 1, a_1 = 1$ e $a_2 = 1$ em (7.77))

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Notemos que, em relação à base (ordenada) $\mathcal{C}$ de $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$, teremos que:

$$\begin{aligned} p(x) &= 1 + x + x^2 \\ &= 1\underbrace{1}_{=q_o(x)} + 1.\underbrace{x}_{=q_1(x)} + 1.\underbrace{x^2}_{=q_2(x)} \\ &= \underbrace{1}_{=\alpha}.q_o(x) + \underbrace{1}_{=\beta}.q_1(x) + \underbrace{1}_{=\gamma}.q_2(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,, \end{aligned}$$

assim

$$\alpha = \beta = \gamma = 1$$

serão as coordenadas do vetor $p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ em relação à base (ordenada) $\mathcal{C}$ de $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$.

Logo a matriz das coorrdenadas do vetor $p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ dado por

$$p(x) \doteq 1 + x + x^2\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

em relação à base (ordenada) $\mathcal{C}$, será dada por

$$[u]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Observação 7.78 *Observemos que no Exemplo (7.72) acima as base (ordenadas) $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ de $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$, são distintas e as matrizes das coordenadas do vetor $\underline{p}$, dado por (7.74), em relação a cada uma das bases (ordenadas) também são diferentes.*

<u>Conclusão:</u> *existe, pelo menos, duas maneiras diferentes de se obter o vetor $\underline{p}$, dado por (7.74), em termos de combinações lineares de elementos de bases (ordenadas) distintas de $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$.*

Para finalizar este capítulo temos os seguintes resultados:

Proposição 7.79 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *espaço vetorial real (respectivamente, complexo) finitamente gerado, o conjunto* $\mathcal{B} \doteq \{u_1, \cdots, u_n\}$ *uma base (ordenada) de* $(U, +, \cdot)$ *e* $u, v \in U$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$ *(respectivamente,* $\mathbb{C}$*).*

Então

$$[u + v]_{\mathcal{B}} = [u]_{\mathcal{B}} + [v]_{\mathcal{B}} \tag{7.80}$$

e

$$[\lambda \cdot u]_{\mathcal{B}} = \lambda [u]_{\mathcal{B}} . \tag{7.81}$$

Prova:

Como o conjunto $\mathcal{B}$ é base (ordenada) de $(U, +, \cdot)$ e $u, v \in U$, segue que existem únicos escalares

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n \in \mathbb{R} \text{ (respectivamente, } \mathbb{C}),$$

tais que

$$u = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n \tag{7.82}$$

e

$$v = \beta_1 \cdot u_1 + \beta_2 \cdot u_2 + \cdots + \beta_n \cdot u_n . \tag{7.83}$$

Com isto temos que

$$\begin{aligned} u + v &= (\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n) + (\beta_1 \cdot u_1 + \beta_2 \cdot u_2 + \cdots + \beta_n \cdot u_n) \\ &= (\alpha_1 + \beta_1) \cdot u_1 + (\alpha_2 + \beta_2) \cdot u_2 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n) \cdot u_n \end{aligned} \tag{7.84}$$

e

$$\begin{aligned} \lambda \cdot u &= \lambda \cdot (\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n) \\ &= (\lambda\, \alpha_1) \cdot u_1 + (\lambda\, \alpha_2) \cdot u_2 + \cdots + (\lambda\, \alpha_n) \cdot u_n \end{aligned} \tag{7.85}$$

Com isto temos que:

$$[u]_{\mathcal{B}} \overset{(7.82)}{=} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [v]_{\mathcal{B}} \overset{(7.83)}{=} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \tag{7.86}$$

$$[u + v]_{\mathcal{B}} \overset{(7.84)}{=} \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [\lambda \cdot u]_{\mathcal{B}} \overset{(7.85)}{=} \begin{pmatrix} \lambda\, \alpha_1 \\ \lambda\, \alpha_2 \\ \vdots \\ \lambda\, \alpha_n \end{pmatrix} . \tag{7.87}$$

Portanto

$$[u+v]_{\mathcal{B}} \overset{(7.87)}{=} \begin{pmatrix} \alpha_1+\beta_1 \\ \alpha_2+\beta_2 \\ \vdots \\ \alpha_n+\beta_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

$$\overset{(7.86)}{=} [u]_{\mathcal{B}} + [v]_{\mathcal{B}}$$

e

$$[\lambda \cdot u]_{\mathcal{B}} \overset{(7.87)}{=} \begin{pmatrix} \lambda\,\alpha_1 \\ \lambda\,\alpha_2 \\ \vdots \\ \lambda\,\alpha_n \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$\overset{(7.86)}{=} \lambda[u]_{\mathcal{B}}\,,$$

completando a demonstração do resultado.

∎

Temos também a:

Proposição 7.88 *Sejam* $(U\,,+\,,\cdot)$, $(M_{n\times 1}(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$ *(respectivamente,* $(M_{n\times 1}(\mathbb{C})\,,+\,,\cdot)$*) vetoriais reais (respectivamente, complexos) (onde em* $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ *(respectivamente,* $(M_{n\times 1}(\mathbb{C}),+,\cdot)$*),* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais),*

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_n\}$$

base (ordenada) de $(U\,,+\,,\cdot)$ *e* $v_1\,,v_2\,,\cdots\,,v_m \in U$.

O conjunto

$$\{v_1\,,v_2\,,\cdots\,,v_m\}$$

é L.I. em $(U\,,+\,,\cdot)$ *se, e somente se, o conjunto*

$$\{[v_1]_{\mathcal{B}}\,,[v_2]_{\mathcal{B}}\,,\cdots\,,[v_m]_{\mathcal{B}}\}$$

é L.I. em $(M_{n\times 1}(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$ *(respectivamente,* $(M_{n\times 1}(\mathbb{C})\,,+\,,\cdot)$*).*

Prova:

Como $\mathcal{B}$ é base (ordenada) de $(U\,,+\,,\cdot)$ e, para cada $j \in \{1, \cdots, m\}$, temos que $v_j \in U$, segue que existem únicos escalares

$$\alpha_{1j}\,,\alpha_{2j}\,,\cdots\,,\alpha_{nj} \in \mathbb{R} \text{ (respectivamente, } \mathbb{C})\,,$$

tais que

$$v_j = \alpha_{1j}\cdot u_1 + \alpha_{2j}\cdot u_2 + \cdots + \alpha_{nj}\cdot u_n\,,$$

isto é,

$$[v_j]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \vdots \\ \alpha_{nj} \end{pmatrix}.$$

Logo o conjunto de vetores $\{v_1\,,v_2\,,\cdots\,,v_m\}$ é L.I. em $(U\,,+\,,\cdot)$ se, e somente se,

$$\beta_1\cdot v_1 + \beta_2\cdot v_2 + \cdots + \beta_m\cdot v_m = O\,, \quad \text{implicar que} \quad \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_m = 0\,,$$

que é equivalente a

$$\underbrace{[\beta_1\cdot v_1 + \beta_2\cdot v_2 + \cdots + \beta_m\cdot v_m]_{\mathcal{B}}}_{\overset{\text{Prop. (7.79)}}{=}\beta_1\,[v_1]_{\mathcal{B}}+\beta_2\,[v_2]_{\mathcal{B}}+\cdots+\beta_m\,[v_m]_{\mathcal{B}}} = \underbrace{[O]_{\mathcal{B}}}_{=O\in M_{n\times 1}(\mathbb{R})}\,, \quad \text{implicar que} \quad \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_m = 0\,,$$

que, por sua vez, é equivalente a

$$\beta_1\,[v_1]_{\mathcal{B}} + \beta_2\,[v_2]_{\mathcal{B}} + \cdots + \beta_m\,[v_m]_{\mathcal{B}} = O\,, \quad \text{implicar que} \quad \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_m = 0\,,$$

que é o mesmo que dizer que o conjunto $\{[v_1]_{\mathcal{B}}\,,[v_2]_{\mathcal{B}}\,,\cdots\,,[v_m]_{\mathcal{B}}\}$ é L.I. em $(M_{n\times 1}(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$ (respectivamente $(M_{n\times 1}(\mathbb{C})\,,+\,,\cdot)$), completando a demonstração do resultado.

∎

Como consequência temos o:

Corolário 7.89 *Sejam* $(U\,,+\,,\cdot)$ *espaço vetorial real (respectivamente, complexo) finitamente gerado, o conjunto*

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_n\}$$

uma base (ordenada) de $(U\,,+\,,\cdot)$ *e os vetores* $v_1\,,v_2\,,\cdots\,,v_n \in U$.

O conjunto

$$\mathcal{C} \doteq \{v_1\,,v_2\,,\cdots\,,v_n\}$$

será base de $(U\,,+\,,\cdot)$ *se, e somente se,*

$$\det\,[[v_1]_{\mathcal{B}}\cdots[v_n]_{\mathcal{B}}] \neq 0\,.$$

Prova:

Notemos que, da Proposição (7.88) acima, temos que o conjunto $\{v_1\,,v_2\,,\cdots\,,v_n\}$ é L.I. em $(U\,,+\,,\cdot)$ se, e somente se, o conjunto $\{[v_1]_{\mathcal{B}}\,,[v_2]_{\mathcal{B}}\,\cdots\,,[v_n]_{\mathcal{B}}\}$ é L.I. em $(M_{n\times 1}(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$ (respectivamente, $(M_{n\times 1}(\mathbb{C})\,,+\,,\cdot)$), ou equivalentemente,

$$\beta_1\,[v_1]_{\mathcal{B}} + \beta_2\,[v_2]_{\mathcal{B}} + \cdots + \beta_m[v_m]_{\mathcal{B}} = O\,, \quad \text{implicar que} \quad \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_m = 0\,.$$

Utilizando a notação da demonstração da Proposição (7.88) acima, segue que o lado esquerdo da identidade acima torna-ser-á:

$$\underbrace{\beta_1 \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \vdots \\ \alpha_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + \beta_n \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \vdots \\ \alpha_{nn} \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{implicar que} \quad \beta_1 = \cdots = \beta_m = 0,$$

isto é,

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{implicar que} \quad \beta_1 = \cdots = \beta_m = 0,$$

que, pelo Apêndice (A) e (B), é equiavelente a dizer que a matriz $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$ é uma matriz inversível, ou ainda (pelo Apêndice (A)) que,

$$\det \left[[v_1]_{\mathcal{B}} \ [v_2]_{\mathcal{B}} \cdots [v_n]_{\mathcal{B}} \right] = \det \left[\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \right] \neq 0,$$

completando a demonstração do resultado.

∎

7.5 Exercícios

Capítulo 8

Mudança de Base

8.1 Introdução, Exemplos e Propriedades

Como vimos no Exemplo (7.72) a matriz das coordenadas de um vetor de um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) podem variar quando se consideram bases (ordenadas) distintas do espaço vetorial real (respectivamente, complexo) em questão.

O que passaremos a estudar agora é como esta mudança ocorre, ou seja, como é possível encontrar a matriz das coordenadas de um vetor em relação a uma base (ordenada), conhendo-se sua a matriz das coordenadas em relação a uma outra base (ordenada) do mesmo espaço vetorial real (respectivamente, complexo).

Para isto seja $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) finitamente gerado.

Consideremos

$$\mathcal{B} \doteq \{b_1, b_2, \cdots, b_n\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} \doteq \{c_1, c_2, \cdots, c_n\}$$

bases (ordenadas) de $(V, +, \cdot)$.

Como o conjunto $\mathcal{B}$ é uma base (ordenada) de $(V, +, \cdot)$, podemos escrever cada um dos vetores da base (ordenada) $\mathcal{C}$ como combinação linear dos vetores da base $\mathcal{B}$, isto é, para cada $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ podemos encontrar escalares

$$\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \cdots, \alpha_{nj} \in \mathbb{R} \text{ (respectivamente, } \mathbb{C}),$$

de modo que

$$c_j = \alpha_{1j} \cdot b_1 + \alpha_{2j} \cdot b_2 + \cdots + \alpha_{nj} \cdot b_n, \tag{8.1}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} c_1 &= \alpha_{11} \cdot b_1 + \alpha_{21} \cdot b_2 + \cdots + \alpha_{n1} \cdot b_n \\ c_2 &= \alpha_{12} \cdot b_1 + \alpha_{22} \cdot b_2 + \cdots + \alpha_{n2} \cdot b_n \\ &\vdots \\ c_n &= \alpha_{1n} \cdot b_1 + \alpha_{2n} \cdot b_2 + \cdots + \alpha_{nn} \cdot b_n. \end{aligned}$$

Desta forma, para cada $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, a matriz das coordenadas do vetor c_j da base $\mathcal{C}$, será dada por:

$$[c_j]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \vdots \\ \alpha_{nj} \end{pmatrix},$$

ou seja, a matriz das coordenadas de cada um dos vetores da base (ordenada) $\mathcal{C}$ (isto é, dos vetores $c_1, c_2, \cdots, c_n$) em relação à base (ordenada) $\mathcal{B}$ serão, respectivamente,

$$[c_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{pmatrix}, \ [c_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{n2} \end{pmatrix}, \ \cdots, \ [c_n]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \\ \vdots \\ \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Com estas informações sobre as coordenadas de cada um dos vetores da base (ordenada) $\mathcal{C}$, em relação à base (ordenada) $\mathcal{B}$, podemos construir a seguinte matriz quadrada de ordem $\underline{n}$:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}, \tag{8.2}$$

cujas **colunas** são formadas pelas coordenadas de cada um dos vetores

$$c_1, c_2, \cdots, c_n$$

em relação à base (ordenada) $\mathcal{B}$.

Com isto temos a:

Definição 8.3 *A matriz (8.2), será denominada de* **matriz mudança de base, da base (ordenada) $\mathcal{B}$ para a base (ordenada) $\mathcal{C}$** *e denotada por $M_{\mathcal{BC}}$ (ou por $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$) , ou seja,*

$$M_{\mathcal{BC}} \doteq \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}. \tag{8.4}$$

Observação 8.5 *Para obter a matriz de mudança de base, da base (ordenada) $\mathcal{B}$ para a base (ordenada) $\mathcal{C}$, precisamos escrever os vetores da* base (ordenada) $\mathcal{C}$*, como combinação linear dos vetores da* base (ordenada) $\mathcal{B}$ *e com os respectivos coeficientes construimos as* **colunas** *da matriz de mudança de base $M_{\mathcal{BC}}$.*

Antes de encontrarmos uma relação que existe entre a matriz de mundança da base (ordenada) $\mathcal{B}$ para a base (ordenada) $\mathcal{C}$, isto é, a matriz $M_{\mathcal{BC}}$, e as coordenadas de um dado vetor com relação às bases (ordenadas) $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, vejamos como podemos encontrar a matriz de mudança de base no seguinte exemplo:

Exemplo 8.6 *Seja* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de adição de ternas e multiplicação de número real por ternas, respectivamente).*

Consideremos as bases (ordenadas)

$$\mathcal{B} \doteq \{\underbrace{(1,0,1)}_{\doteq b_1}, \underbrace{(1,1,1)}_{\doteq b_2}, \underbrace{(1,1,2)}_{\doteq b_3}\} \quad e \quad \mathcal{C} \doteq \{\underbrace{(1,0,0)}_{\doteq c_1}, \underbrace{(0,1,0)}_{\doteq c_2}, \underbrace{(0,0,1)}_{\doteq c_3}\} \tag{8.7}$$

de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Encontre a matriz de mudança de base, da base (ordenada) $\mathcal{B}$*, para a base (ordenada)* $\mathcal{C}$ *(isto é,* $M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$*).*

Resolução:

Sabemos que $\mathcal{C}$ é uma base de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ (é a base canônica de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$).

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação que o conjunto $\mathcal{B}$ também é uma base de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Para encontrar a matriz de mudança de base, da base (ordenada) $\mathcal{B}$, para a base (ordenada) $\mathcal{C}$, precisamos escrever cada um dos vetores da base (ordenada) $\mathcal{C}$, como uma combinação linear dos vetores da base (ordenada) $\mathcal{B}$, isto é, precisamos encontrar escalares

$$\alpha_{ij} \in \mathbb{R}, \quad \text{para cada} \quad i, j \in \{1, 2, 3\},$$

de modo que

$$c_j = \alpha_{1j} \cdot b_1 + \alpha_{2j} \cdot b_2 + \alpha_{3j} \cdot b_3, \tag{8.8}$$

ou seja, de (8.7), precisamos resolver o seguinte sistema matricial:

$$\begin{aligned}
(1,0,0) &= \alpha_{11} \cdot (1,0,1) + \alpha_{21} \cdot (1,1,1) + \alpha_{31} \cdot (1,1,2) \\
&= (\alpha_{11}, 0, \alpha_{11}) + (\alpha_{21}, \alpha_{21}, \alpha_{21})) + (\alpha_{31}, \alpha_{31}, 2\,\alpha_{31}) \\
&= (\alpha_{11} + \alpha_{21} + \alpha_{31}, \ \alpha_{21} + \alpha_{31}, \ \alpha_{11} + \alpha_{21} + 2\,\alpha_{31}) \\
(0,1,0) &= \alpha_{12} \cdot (1,0,1) + \alpha_{22} \cdot (1,1,1) + \alpha_{32} \cdot (1,1,2) \\
&= (\alpha_{12}, 0, \alpha_{12}) + (\alpha_{22}, \alpha_{22}, \alpha_{22}) + (\alpha_{32}, \alpha_{32}, 2\,\alpha_{32}) \\
&= (\alpha_{12} + \alpha_{22} + \alpha_{32}, \ \alpha_{22} + \alpha_{32}, \ \alpha_{12} + \alpha_{22} + 2\,\alpha_{32}) \\
(0,0,1) &= \alpha_{13} \cdot (1,0,1) + \alpha_{23} \cdot (1,1,1) + \alpha_{33} \cdot (1,1,2) \\
&= (\alpha_{13}, 0, \alpha_{13}) + (\alpha_{23}, \alpha_{23}, \alpha_{23}) + (\alpha_{33}, \alpha_{33}, 2\,\alpha_{33}) \\
&= (\alpha_{13} + \alpha_{23} + \alpha_{33}, \ \alpha_{23} + \alpha_{33}, \ \alpha_{13} + \alpha_{23} + 2\,\alpha_{33}),
\end{aligned}$$

ou, equivalentemente:

$$(1,0,0) = (\alpha_{11} + \alpha_{21} + \alpha_{31}, \ \alpha_{21} + \alpha_{31}, \ \alpha_{11} + \alpha_{21} + 2\,\alpha_{31}) \tag{8.9}$$

$$(0,1,0) = (\alpha_{12} + \alpha_{22} + \alpha_{32}, \ \alpha_{22} + \alpha_{32}, \ \alpha_{12} + \alpha_{22} + 2\,\alpha_{32}) \tag{8.10}$$

$$(0,0,1) = (\alpha_{13} + \alpha_{23} + \alpha_{33}, \ \alpha_{23} + \alpha_{33}, \ \alpha_{13} + \alpha_{23} + 2\,\alpha_{33}) . \tag{8.11}$$

Um momento de reflexão nos poupará um pouco de trabalho para a resolução do sistema vetorial acima.

Notemos que cada um dos sistemas de equações lineares obtidos das equações vetoriais (8.9), (8.10) ou (8.11), representa um sistema de três equações com três incógnitas e que a matriz associada a cada um desses sistemas lineares é a mesma, a saber, a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

O que muda em cada um dos sistemas lineares associados às equações vetoriais a (8.9), (8.10) ou (8.11), são os nomes das variáveis, além dos respectivos segundos membros em questão (que correspondem aos lados esquerdos de (8.9), (8.10) ou (8.11)).

Utilizando-se como variáveis

$$x, y, z \in \mathbb{R},$$

basta resolvermos a seguinte a equação matricial

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\doteq A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

onde

$$a, b, c \in \mathbb{R},$$

serão escolhidos de acordo com os respectivos membros à esquerda das equações vetoriais (8.9), (8.10) ou (8.11) .

Utilizando-se escalonamento de matrizes (ver os Apêndices (A) e (B)) podemos verificar que a equação matricial acima é equivalente a seguinte equação matricial (cuja matriz está na forma escalonada reduzida por linhas, ver os Apêndices (A) e (B)):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c-a \end{pmatrix}$$

Deixaremos como exercício para o leitor verificar que a única solução desta equação matricial é dada por

$$x = a - b, \quad y = a + b - c \quad \text{e} \quad z = c - a. \tag{8.12}$$

Assim para encontrar uma (única) solução da equação vetorial (8.9), basta tomarmos (lado esquerdo de (8.9))

$$(a, b, c) = (1, 0, 0)$$

e, por (8.12), obter a seguinte solução

$$\begin{aligned}
\alpha_{11} &= a - b \\
&= 1 - 0 \\
&= 1\,, \\
\alpha_{21} &= a + b - c \\
&= 1 + 0 - 0 \\
&= 1\,, \\
\alpha_{31} &= c - a \\
&= 0 - 1 \\
&= -1\,,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$(\alpha_{11}\,,\alpha_{21}\,,\alpha_{31}) = (1\,,1\,,-1)\,, \tag{8.13}$$

será a única solução da equação vetorial (8.9).

Para encontrar uma (única) solução da equação vetorial (8.10), basta tomarmos (lado esquerdo de (8.10))

$$(a\,,b\,,c) \doteq (0\,,1\,,0)$$

e, por (8.12), obter

$$\begin{aligned}
\alpha_{12} &= a - b \\
&= 0 - 1 \\
&= -1\,, \\
\alpha_{22} &= a + b - c \\
&= 0 + 1 - 0 \\
&= 1\,, \\
\alpha_{32} &= c - a \\
&= 0 - 0 \\
&= 0\,,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$(\alpha_{12}\,,\alpha_{22}\,,\alpha_{32}) = (-1\,,1\,,0)\,, \tag{8.14}$$

será a única solução da equação vetorial (8.10).

Finalmente, para encontrar uma (única) solução da equação vetorial (8.11), basta tomarmos (lado esquerdo de (8.11))

$$(a\,,b\,,c) = (0\,,0\,,1)$$

e, por (8.12), obter

$$\begin{aligned}
\alpha_{13} &= a - b \\
&= 0 - 0 \\
&= 0\,, \\
\alpha_{23} &= a + b - c \\
&= 0 + 0 - 1 \\
&= -1 \\
\alpha_{33} &= c - a \\
&= 1 - 0 \\
&= 1\,,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$(\alpha_{13}\,, \alpha_{23}\,, \alpha_{33}) = (0\,, -1\,, 1)\,, \tag{8.15}$$

será a única solução da equação vetorial (8.11).

Desta forma, de (8.13), (8.14) e (8.15), obtemos que a matriz de mudança de base, da base (ordenada) $\mathcal{B}$, para a base (ordenada) $\mathcal{C}$ será dada por:

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Temos também o:

Exemplo 8.16 *Com as notações do Exemplo* (8.6) *acima, encontre a matriz de mudança de base, da base (ordenada) $\mathcal{C}$, para a base (ordenada) $\mathcal{B}$ (isto é, $M_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$).*

Resolução:

Para encontrar a matriz de mudança da base $\mathcal{C}$ para a base $\mathcal{B}$, precisaremos escrever cada um dos vetores da base (ordenada) $\mathcal{B}$, como combinação linear dos vetores da base (ordenada) $\mathcal{C}$, ou seja, precisaremois encontrar

$$\beta_{ij} \in \mathbb{R}\,, \qquad \text{para cada} \quad i\,, j \in \{1\,, 2\,, 3\}\,,$$

tais que

$$b_j = \beta_{1j} \cdot c_1 + \beta_{2j} \cdot c_2 + \beta_{3j} \cdot c_3\,, \tag{8.17}$$

ou seja, de (8.7), precisamos resolver o seguinte sistema vetorial:

$$\begin{aligned}
(1\,, 0\,, 1) &= \beta_{11} \cdot (1\,, 0\,, 0) + \beta_{21} \cdot (0\,, 1\,, 0) + \beta_{31} \cdot (0\,, 0\,, 1) \\
(1\,, 1\,, 1) &= \beta_{12} \cdot (1\,, 0\,, 0) + \beta_{22} \cdot (0\,, 1\,, 0) + \beta_{32} \cdot (0\,, 0\,, 1) \\
(1\,, 1\,, 2) &= \beta_{13} \cdot (1\,, 0\,, 0) + \beta_{23} \cdot (0\,, 1\,, 0) + \beta_{33} \cdot (0\,, 0\,, 0)\,,
\end{aligned}$$

que é uma tarefa simples já que:

$$
\begin{aligned}
(1\,,0\,,1) &= 1\cdot(1\,,0\,,0)+0\cdot(0\,,1\,,0)+1\cdot(0\,,0\,,1)\\
(1\,,1\,,1) &= 1\cdot(1\,,0\,,0)+1\cdot(0\,,1\,,0)+1\cdot(0\,,0\,,1)\\
(1\,,1\,,2) &= 1\cdot(1\,,0\,,0)+1\cdot(0\,,1\,,0)+2\cdot(0\,,0\,,0)\,.
\end{aligned}
$$

Portanto a matriz de mudança de base, da base (ordenada) $\mathcal{C}$, para a base (ordenada) $\mathcal{B}$ será dada por:

$$M_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

□

Observação 8.18 *Segue dos dos Exemplos (8.6) e (8.16) acima, que vale a seguinte igualdade:*

$$M_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}^{-1}\,.$$

Deixaremos a verificação deste fato como exerício para o leitor.

Vejamos agora como as matrizes das coordenadas de um vetor, em respeito a duas bases (ordenadas), de um mesmos espaço vetorial real (respectivamente, complexo) de dimensão finita, se relacionam.

Sejam

$$\mathcal{B} \doteq \{b_1\,,b_2\,,\cdots\,,b_n\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} \doteq \{c_1\,,c_2\,,\cdots\,,c_n\},$$

bases (ordenadas) de um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) $(V\,,+\,,\cdot)$ de dimensão finita.

Dado um vetor $v \in V$, sejam

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} \tag{8.19}$$

$$[v]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} \tag{8.20}$$

as matrizes das coordenadas do vetor $\underline{v}$ em relação às bases (ordenadas) $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, respectivamente, ou seja,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\, b_i \overset{(8.19)}{=} v \overset{(8.20)}{=} \sum_{j=1}^{n} y_j\, c_j\,. \tag{8.21}$$

Suponhamos que

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = (\alpha_{ij})_{i\,,j\in\{1\,,2\,,\cdots\,,n\}}\,, \tag{8.22}$$

denota a matriz de mudança de base, da (ordenada) base $\mathcal{B}$, para base (ordenada) $\mathcal{C}$.

Por ser a matriz mudança de base, da base (ordenada) $\mathcal{B}$, para a base (ordenada) $\mathcal{C}$, segue que, para cada $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, teremos

$$c_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} \, b_i \,. \tag{8.23}$$

Logo, (8.21) e (8.23), segue que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} x_i \, b_i &\overset{(8.21)}{=} v \\ &\overset{(8.21)}{=} \sum_{j=1}^{n} y_j \, c_j \\ &\overset{(8.23)}{=} \sum_{j=1}^{n} y_j \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} \, b_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} y_j \right) b_i \,, \end{aligned} \tag{8.24}$$

onde, na última igualdade, trocamos a ordem dos somatórios.

Como os vetores

$$b_1 \,, b_2 \,, \cdots \,, b_n$$

são L.I. em $(V, +, \cdot)$ (pois são elementos de uma base de $(V, +, \cdot)$), segue-se que o vetor $\underline{v}$ pode ser representado, de modo único, como combinação linear destes vetores.

Portanto, (8.24) implicará que, para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, teremos

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \, y_j \,.$$

Porém, estas $\underline{n}$ equações lineares, podem ser escritas na seguinte fórmula matricial (veja os Apêndices (A) e (B)):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

ou seja, de (8.22), (8.19) e (8.20), isto será equivalente a escrever:

$$[v]_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}\mathcal{C}} \, [v]_{\mathcal{C}} \,.$$

Com isto acabamos de demonstrar a:

Proposição 8.25 *Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ bases (ordenadas) de um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) $(V, +, \cdot)$ de dimensão finita.*

Se

$$[v]_{\mathcal{B}} \quad e \quad [v]_{\mathcal{C}}\,,$$

representam as matrizes das coordenadas de um dado vetor $v \in V$ *em relação às bases (ordenadas)* $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{C}$*, respectivamente, e se* $M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ *é a matriz de mudança de base, da base (ordenada)* $\mathcal{B}$*, para a base (ordenada)* $\mathcal{C}$*, então teremos a seguinte identidade*

$$[v]_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}\,[v]_{\mathcal{C}}\,. \tag{8.26}$$

Apliquemos o resultado acima a alguns exemplos.

Exemplo 8.27 *Seja* $\left(\mathbb{R}^2, +, \cdot\right)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de adição de pares e multiplicação de número real por par, respectivamente).*

Fixado $\theta \in \mathbb{R}$*, consideremos os vetores*

$$u_1 \doteq (\cos(\theta)\,,\,\mathrm{sen}(\theta)) \qquad e \qquad u_2 \doteq (-\,\mathrm{sen}(\theta)\,,\cos(\theta))\,. \tag{8.28}$$

Mostre que o conjunto

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1\,,u_2\}$$

é uma base de $\left(\mathbb{R}^2\,,+\,,\cdot\right)$*.*

Encontre a matriz de mudança de base, da base (ordenada) $\mathcal{B}$*, para a base (ordenada)* $\mathcal{C} \doteq \{e_1\,,e_2\}$*, onde*

$$e_1 \doteq (1\,,0) \quad e \quad e_2 \doteq (0\,,1)\,. \tag{8.29}$$

Se $a\,,b \in \mathbb{R}$ *estão fixados, encontre a matriz das coordenadas do vetor*

$$u \doteq a \cdot e_1 + b \cdot e_2 \tag{8.30}$$

em relação às bases (ordenadas) $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{C}$ *de* $\left(\mathbb{R}^2\,,+\,,\cdot\right)$*.*

Resolução:

Como

$$\dim\left(\mathbb{R}^2\right) = 2\,,$$

basta mostrarmos que os vetores do conjunto $\mathcal{B}$ são L.I. em $\left(\mathbb{R}^2, +, \cdot\right)$.

Para isto, sejam $\alpha\,,\beta \in \mathbb{R}$ escalares tais que

$$\begin{aligned}(0\,,0) &= \alpha \cdot (\cos(\theta)\,,\,\mathrm{sen}(\theta)) + \beta \cdot (-\,\mathrm{sen}(\theta)\,,\cos(\theta))\\ &= (\alpha\,\cos(\theta)\,,\alpha\,\mathrm{sen}(\theta)) + (-\beta\,\mathrm{sen}(\theta)\,,\beta\,\cos(\theta))\\ &= (\alpha\,\cos(\theta) - \beta\,\mathrm{sen}(\theta)\,,\alpha\,\mathrm{sen}(\theta) + \beta\,\cos(\theta))\,,\end{aligned}$$

ou, equivalentemente, $\alpha\,,\beta \in \mathbb{R}$ são as soluções do sistema linear

$$\begin{cases}\alpha\,\cos(\theta) - \beta\,\mathrm{sen}(\theta) = 0\\ \alpha\,\mathrm{sen}(\theta) + \beta\,\cos(\theta) = 0\end{cases}\,. \tag{8.31}$$

Observemos que matriz dos coeficiente deste sistema, dada pela matriz:

$$A \doteq \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

tem determinante igual a $1 \neq 0$.

Logo (ver Apêndice (A) e (B)) o sistema linear (8.31) acima só admite a solução trivial, isto é,

$$\alpha = \beta = 0\,,$$

é a única solução do sistema linear (8.31) acima e assim os vetores $u_1\,, u_2$ são L.I. em $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

Como

$$\dim\left(\mathbb{R}^2\right) = 2\,,$$

segue que que o conjunto $\mathcal{B}$ é uma base de $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

A matriz de mudança de base, da base (ordenada) $\mathcal{B}$, para a base (ordenada) $\mathcal{C}$ (isto é, $M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$), será obtida escrevendo-se cada um dos vetores da base (ordenada) $\mathcal{C}$, como combinação linear dos vetores da base (ordenada) $\mathcal{B}$.

Mais precisamente, esta matriz, que denotaremos por

$$(\alpha_{ij})_{i\,,j\in\{1\,,2\}}\,,$$

deverá ter seus elementos satisfazendo:

$$\begin{aligned}(1\,,0) =& \alpha_{11} \cdot (\cos(\theta)\,,\, \operatorname{sen}(\theta)) + \alpha_{21} \cdot (-\operatorname{sen}(\theta)\,, \cos(\theta)) \\ (0\,,1) =& \alpha_{12} \cdot (\cos(\theta)\,,\, \operatorname{sen}(\theta)) + \alpha_{22} \cdot (-\operatorname{sen}(\theta)\,, \cos(\theta)),\end{aligned}$$

que é equivalente a

$$\begin{aligned}(1\,,0) = &\quad (\alpha_{11}\cos(\theta) - \alpha_{21}\operatorname{sen}(\theta)\,, \alpha_{11}\operatorname{sen}(\theta) + \alpha_{21}\cos(\theta)) \\ (0\,,1) = &\quad (\alpha_{12}\cos(\theta) - \alpha_{22}\operatorname{sen}(\theta)\,, \alpha_{12}\operatorname{sen}(\theta) + \alpha_{22}\cos(\theta)),\end{aligned}$$

que por sua vez pode ser colocada na forma da seguinte equação matricial:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}}_{\doteq A} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

onde $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ será igual a

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Como a matriz A é inversível (pois $\det(A) = 1 \neq 0$), segue que a (única) solução da equação matricial acima será dada por

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta)\\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\\ &\overset{\text{Exercício}}{=} \begin{pmatrix}\cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta)\\ -\operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}x\cos(\theta) + y\operatorname{sen}(\theta)\\ y\cos(\theta) - x\operatorname{sen}(\theta)\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{8.32}$$

Fazendo-se

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$

em (8.32), obteremos

$$\begin{pmatrix}\alpha_{11}\\ \alpha_{21}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\theta)\\ -\operatorname{sen}(\theta)\end{pmatrix}.$$

Fazendo-se

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

em (8.32), obteremos

$$\begin{pmatrix}\alpha_{12}\\ \alpha_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\operatorname{sen}(\theta)\\ \cos(\theta)\end{pmatrix}.$$

Assim, a matriz de mudança de base, da base (ordenada) $\mathcal{B}$ para a base (ordenada) $\mathcal{C}$, será dada por:

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix}\cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta)\\ -\operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}. \tag{8.33}$$

Notemos que se $[u]_{\mathcal{B}}$, denotar a matriz das coordenadas do

$$u = a \cdot e_1 + b \cdot e_2\,,$$

em relação à base (ordenada) $\mathcal{B}$, então

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}.$$

Logo, se $[u]_{\mathcal{C}}$ representa a matriz das coordenadas do mesmo vetor, em relação à base (ordenada) $\mathcal{C}$, pela Proposição (8.25), temos que:

$$\begin{aligned}
[u]_{\mathcal{B}} &= M_{\mathcal{BC}}\,[u]_{\mathcal{C}} \\
&\overset{(8.33)}{=} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) \\ -\operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a\cos(\theta) + b\operatorname{sen}(\theta) \\ b\cos(\theta) - a\operatorname{sen}(\theta) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a\cos(\theta) + b\operatorname{sen}(\theta) \\ b\cos(\theta) - a\operatorname{sen}(\theta) \end{pmatrix}.$$

□

Observação 8.34 *Notemos que, como foi visto na disciplina de Geometria Analítica, a matriz $M_{\mathcal{BC}}$, dada por (8.33), produz, geometricamente, uma rotação de ângulo θ, no sentido horário.*

O resultado a seguir é extremamente útil:

Proposição 8.35 *Sejam $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ bases (ordenadas) de um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) $(V, +, \cdot)$ de dimensião finita.*

Temos que

$$M_{\mathcal{BD}} = M_{\mathcal{BC}}\, M_{\mathcal{CD}}\,. \tag{8.36}$$

Demonstração:

Suponhamos que

$$\dim(V) = n$$

e que

$$\mathcal{B} \doteq \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}, \quad \mathcal{C} \doteq \{c_1, c_2, \cdots, c_n\} \quad \text{e} \quad \mathcal{D} \doteq \{d_1, d_2, \cdots, d_n\},$$

sejam as base de $(V, +, \cdot)$.

Além disso, suponhamos também que

$$M_{\mathcal{BC}} \doteq (\alpha_{ij}), \quad M_{\mathcal{CD}} \doteq (\beta_{ij}) \quad \text{e} \quad M_{\mathcal{BD}} \doteq (\gamma_{ij})\,. \tag{8.37}$$

Logo, de (8.37) e da definição de matriz de mudança de base, segue que, para cada

$$j, k \in \{1, 2, \cdots, n\},$$

teremos:

$$c_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\, b_i\,, \tag{8.38}$$

$$d_k = \sum_{j=1}^{n} \beta_{jk}\, c_j\,, \tag{8.39}$$

$$d_k = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ik}\, b_i\,. \tag{8.40}$$

Assim, de (8.38) e (8.39), teremos

$$
\begin{aligned}
d_k &\overset{(8.39)}{=} \sum_{j=1}^{n} \beta_{jk} \underbrace{c_j}_{\overset{(8.38)}{=} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} b_i} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \beta_{jk} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\, b_i \right) \\
&\overset{\text{trocando-se a ordem dos somatórios}}{=} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\, \beta_{jk} \right) b_i \,. \qquad (8.41)
\end{aligned}
$$

Como os vetores

$$b_1 \,, b_2 \,, \cdots \,, b_n$$

são L.I. em $(V\,,+\,,\cdot)$, comparando com as expressões (8.40) e (8.41), obteremos

$$\gamma_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\, \beta_{jk} \,, \quad \text{para cada} \quad i\,,k \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\} \,.$$

Observemos que o lado direito da expressão acima representa o elemento da i-ésima linha e da k-ésima coluna da matriz $M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}\, M_{\mathcal{C}\mathcal{D}}$ (ver Apêndices (A) e (B)).

Portanto, a identidade acima nos diz que

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{D}} = M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}\, M_{\mathcal{C}\mathcal{D}} \,,$$

como queríamos demonstrar.

∎

Como consequência da Proposição (8.35) acima, podemos estender o que ocorreu na Observação (8.18), mais precisamente:

Proposição 8.42 *Sejam $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ bases (ordenadas) de um espaço vetorial real (ou complaxo) $(V\,,+\,,\cdot)$ de dimensão finita.*

Então a matriz de mudança de base, da base (ordenada) $\mathcal{B}$, para a base (ordenada) $\mathcal{C}$ (isto é, $M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$), é uma matriz inversível e a sua matriz inversa é dada pela matriz de mudança de base, da base (ordenada) $\mathcal{C}$, para a base (ordenada) $\mathcal{B}$ (isto é, $M_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$), ou seja,

$$M_{\mathcal{C}\mathcal{B}}{}^{-1} = M_{\mathcal{B}\mathcal{C}} \,. \qquad (8.43)$$

Demonstração:

Pela Proposição (8.35) temos que:

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}\, M_{\mathcal{C}\mathcal{B}} \qquad \text{e} \qquad M_{\mathcal{C}\mathcal{C}} = M_{\mathcal{C}\mathcal{B}}\, M_{\mathcal{B}\mathcal{C}} \,. \qquad (8.44)$$

Logo, basta mostrarmos que

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B}\mathcal{B}} &= M_{\mathcal{C}\mathcal{C}} \\ &= I_n \\ &= (\delta_{ij}), \end{aligned}$$

$$\text{onde} \qquad \delta_{ij} \doteq \begin{cases} 1, & \text{para} \quad i = j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

ou seja, I_n é a matriz identidade de ordem $\underline{n}$.

Mostremos que

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = I_n .$$

Se

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$$

e

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = (\alpha_{ij}) \tag{8.45}$$

então, para cada $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, deveremos ter:

$$u_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\, u_i . \tag{8.46}$$

Como os vetores

$$u_1, u_2 \cdots, u_n$$

são L.I. em $(V, +, \cdot)$, para cada $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, a única solução de cada uma destas equações vetoriais deverá ser dada por:

$$u_j = 0 \cdot u_1 + \cdots + 0 \cdot u_{j-1} + 1 \cdot u_j + 0 \cdot u_{j+1} + \cdots + 0 \cdot u_n ,$$

ou seja,

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{para} \quad i = j \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

ou ainda, para cada

$$i, j \in \{1, 2, \cdots, n\},$$

teremos

$$\alpha_{ij} = \delta_{ij}, \quad \text{ou seja,} \quad M_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = I_n ,$$

completando a demonstração do resultado.

∎

Observação 8.47 *Em particular, da demonstração da Proposição (8.42) acima, segue que a matriz de mudança de base, da base (ordenada) $\mathcal{B}$, para a própria base (ordenada) $\mathcal{B}$, será a matriz identidade, ou seja,*

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = I_n . \tag{8.48}$$

Apliquemos as idéias acima para resolver o:

Exercício 8.49 *Utilize a Proposição (8.42) acima para refazer o Exemplo (8.16).*

Resolução:

Basta ver que

$$M_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = {M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}}^{-1} .$$

□

Para finalizar este capítulo, temos o seguinte resultado:

Proposição 8.50 *Seja $\mathcal{B}$ uma base (ordenada) do espaço vetorial real (respectivamente, complexo) $(V\,,+\,,\cdot)$ de dimensão finita e $M = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ (ou $M \in M_n(\mathbb{C})$) uma matriz inversível.*

Se, para cada $j \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}$, definirmos o vetor

$$v_j \doteq \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, u_i\,. \tag{8.51}$$

então o conjunto

$$\mathcal{C} \doteq \{v_1\,,v_2\,,\cdots\,,v_n\}\,, \tag{8.52}$$

será uma base de $(V\,,+\,,\cdot)$.

Além disso, teremos

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = M\,. \tag{8.53}$$

Demonstração:

Notemos que, para cada $j_o \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}$, de (8.51), segue que

$$[v_{j_o}] = \begin{pmatrix} a_{1j_o} \\ a_{2j_o} \\ \vdots \\ a_{nj_o} \end{pmatrix} . \tag{8.54}$$

Como, por hipótese, a matriz quadrada $M = (a_{ij})$ é inversível, segue que (ver Apêndice (A))

$$\begin{aligned} 0 &\neq \det(M) \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \\ &\overset{(8.54)}{=} \det\left([v_1]\ [v_2] \cdots [v_n]\right) . \end{aligned}$$

Logo, do Corolário (7.89), segue que o conjunto

$$\mathcal{C} = \{v_1\,,v_2\,,\cdots\,,v_n\}\,,$$

será uma base de $(V, +, \cdot)$.

Além disso, de (8.51) e da definição de matriz mudança de base, segue (8.53), completando a demonstração do resultado.

■

8.2 Exercícios

Capítulo 9

Exercícios Resolvidos

$\boxed{\textbf{24.09.2015 - 13.a}}$

Neste capítulo apresentamos alguns de exercícios resolvidos relacionados com os conceitos apresentados nos capítulos anteriores.

Exemplo 9.1 *Seja*

$$V \doteq \left\{(x\,,y\,,z\,,w) \in \mathbb{R}^4\,;\;\; y = x\,,\; z = w^2\right\}\;.$$

Verifique se $(V\,,+\,,\cdot)$ *é um espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de soma de quádruplas e multiplicação de número real por quádruplas, respectivamente).*

Resolução:

Observemos que

$$(0\,,0\,,1\,,1) \in V\,, \qquad \text{mas} \qquad -1\cdot(0\,,0\,,1\,,1) = (0\,,0\,,-1\,,-1) \notin V.$$

Assim, $(V\,,+\,,\cdot)$ **<u>não</u>** é um espaço vetorial real.

□

Exemplo 9.2 *Sejam* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *uma matriz quadrada de ordem* n *fixada e*

$$W \doteq \{X \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})\,;\, A\,X = O\}\;,$$

onde $O \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ *denota a matriz coluna identicamente nula.*

Verifique se $(W\,,+\,,\cdot)$ *é um subespaço vetorial real de* $(M_{n\times 1}(\mathbb{R}),+,\cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de soma de matrizes e multiplicação de número real por matrizes, respectivamente).*

Resolução:

Observemos que,

$$W \subseteq M_{n\times 1}(\mathbb{R})\,.$$

1. Seja

   $$O \doteq (0)$$

   a matriz coluna de tamanho $n \times 1$, onde todas suas entradas são nulas.

   Como

   $$A\,O = O\,, \quad \text{segue que} \quad O \in W\,.$$

2. Suponhamos que $X, Y \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

   Então, pelas propriedades de soma e de multiplicação por escalar usuais entre as matrizes e, também, pelas propriedades do produto entre matrizes, temos

$$\begin{aligned} A\,(X + \lambda \cdot Y) &= A\,X + A\,(\lambda \cdot Y) \\ &= \underbrace{A\,X}_{\overset{X \in W}{=} O} + \lambda \cdot (\underbrace{A\,Y}_{\overset{X \in W}{=} O}) \\ &= O + \lambda \cdot O \\ &= O\,. \end{aligned}$$

   Portanto

$$(X + \lambda \cdot Y) \in W\,.$$

Portanto, dos itens (1) e (2), podemos afirmar que o conjunto W é um subespaço vetorial de $(M_{n\times 1}(\mathbb{R})\,, +\,, \cdot)$.

□

Exemplo 9.3 *Consideremos o espaço vetorial real $(\mathscr{P}_3(\mathbb{R})\,, +\,, \cdot)$ (onde $+$ e $\cdot$ são as operações usuais de soma de polinômios e multiplicação de número real por polinômio, respectivamente).*

Encontre o subespaço vetorial de $(\mathscr{P}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$, gerado pelo conjunto

$$S \doteq \{p\,, q\,, r\,, s\} \subseteq \mathscr{P}_3(\mathbb{R})\,,$$

onde

$$p(t) \doteq 1\,, \quad q(t) \doteq t\,, \quad r(t) \doteq t^2\,, \quad s(t) \doteq 1 + t^3\,, \quad \textit{para cada} \quad t \in \mathbb{R}\,. \tag{9.4}$$

Resolução:

Observemos que

$$\begin{aligned} t^3 &= \left(t^3 + 1\right) - 1 \\ &\overset{(9.4)}{=} s(t) - p(t)\,, \quad \text{para cada} \quad t \in \mathbb{R}\,. \end{aligned} \tag{9.5}$$

Logo, dado $u \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$, existem escalares

$$a_o\,, a_1\,, a_2\,, a_3 \in \mathbb{R}\,,$$

tais que

$$u(t) = a_o + a_1\,t + a_2\,t^2 + a_3\,t^3\,, \quad \text{para cada} \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Logo

$$\begin{aligned} u(t) &= a_o + a_1\,t + a_2\,t^2 + a_3\,t^3 \\ &\overset{(9.5)}{=} a_o + a_1\,t + a_2\,t^2 + a_3\,\left[\left(t^3 + 1\right) - 1\right] \\ &= (a_o - a_3) + a_1\,t + a_2\,t^2 + a_3\,\left(t^3 + 1\right) \\ &\overset{(9.4)}{=} (a_o - a_3)\,p(t) + a_1\,q(t) + a_2\,r(t) + a_3\,s(t)\,, \quad \text{para cada} \quad t \in \mathbb{R}\,, \end{aligned}$$

ou, equivalentemente:

$$u = (a_o - a_3) \cdot p + a_1 \cdot q + a_2 \cdot r + a_3 \cdot s\,,$$

ou seja, o vetor $u \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ pode ser obtido como combinação linear dos vetores de S, isto é,

$$u \in [S]\,.$$

Portanto

$$[S] = \mathscr{P}_3(\mathbb{R})\,.$$

□

Exemplo 9.6 *Encontre o subespaço vetorial do espaço vetorial* $(M_2(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de soma de matrizes e multiplicação de número real por matriz, respectivamente), gerado por*

$$S \doteq \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Resolução:

Temos que

$$A \in [S]$$

se, e somente se, existem $\alpha\,,\beta \in \mathbb{R}$, tais que

$$\begin{aligned} A &= \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$A \in [S]$$

se, e somente se, os elementos da diagonal principal de A são nulos, ou seja, $[S]$ é o subespaço vetorial de $(M_2(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$ formado por todas as matrizes quadradas de ordem dois, cujos elementos da diagonal principal são iguais a zero, ou ainda,

$$[S] = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} ;\, a\,,b \in \mathbb{R} \right\}.$$

□

Exemplo 9.7 *Encontre um conjunto finito de geradores para o subespaço vetorial*

$$W \doteq \{u \in M_{3\times 1}(\mathbb{R})\,;\, A\,u = 0\}\,,$$

do espaço vetorial real $(M_{3\times 1}(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de soma de matrizes e multiplicação de número real por matriz, respectivamente) onde*

$$A \doteq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor mostrar que W é um subespaço vetorial de $(M_{3\times1}(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Observemos que

$$u = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in W$$

$$\begin{aligned}
\text{se, e somente se,}\quad & A\,u = 0 \\
\text{se, e somente se,}\quad & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\text{ou, equivalentemente,}\quad & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\text{ou seja,}\quad & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\text{ou ainda,}\quad & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\text{isto é,}\quad & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\text{se, e somente se,}\quad & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\text{ou, equivalentemente,}\quad & \alpha = \beta = \gamma = 0\,.
\end{aligned}$$

Portanto

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

□

Exemplo 9.8 *Encontre um conjunto finito de geradores para o susbepaço vetorial*

$$W \doteq \{u \in M_{4\times1}(\mathbb{R})\,;\, Au = 0\}$$

do espaço vetorial real $(M_{4\times1}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *(onde* $+$, $\cdot$ *são as operações usuais de soma de* *matrizes e multiplicação de número real por matriz, respectivamente), onde*

$$A \doteq \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor mostra que W é um subespaço vetorial de $(M_{4\times1}(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Observemos que

$$u = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \in W$$

$$\text{se, e somente se,} \quad A\,u = O\,,$$

$$\text{ou seja,} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{isto é,} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{ou seja,} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{ou ainda,} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{isto é,} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ou, equivalentemente, $\begin{cases} \alpha = -\dfrac{\gamma}{2} - \dfrac{\delta}{2} \\ \beta = \dfrac{3\gamma}{2} + \dfrac{\delta}{2} \end{cases}$.

Portanto,

$$u = \begin{pmatrix} -\dfrac{\gamma}{2} - \dfrac{\delta}{2} \\ \dfrac{3\gamma}{2} + \dfrac{\delta}{2} \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \gamma \cdot \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \cdot \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{para cada} \quad \delta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Portanto:

$$W = \left[\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

□

Exemplo 9.9 *Encontre uma base e a dimensão do subespaço vetorial*

$$U \doteq [(1,0,1),(1,2,0),(0,2,-1)]$$

do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de soma de ternas e multiplicação de número real por ternas, respectivamente).*

Resolução:

Primeiro Modo:

Observemos que

$$(x, y, z) \in U$$

se, e somente se, existem

$$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R},$$

tais que

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= \alpha \cdot (1,0,1) + \beta \cdot (1,2,0) + \gamma \cdot (0,2,-1) \\ &= (\alpha + \beta, 2\beta + 2\gamma, \alpha - \gamma), \end{aligned} \tag{9.10}$$

ou seja,

$$(x, y, z) \in U$$

se, e somente se, existem

$$\alpha\,,\beta\,,\gamma \in \mathbb{R}\,,$$

solução do seguinte sistema linear

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x \\ 2\,\beta + 2\,\gamma = y \\ \alpha - \gamma = z \end{cases},$$

ou ainda,

$$(x\,,y\,,z) \in U$$

se, e somente se, a equação matricial abaixo admite solução, que denotaremos por $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in$ $M_{31}(\mathbb{R})$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

$$\text{ou seja,} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z - x \end{pmatrix}$$

$$\text{ou, equivalentemente,} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{y}{2} \\ z - x \end{pmatrix},$$

$$\text{isto é,} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{y}{2} \\ z - x + \frac{y}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{ou ainda,} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - \frac{y}{2} \\ \frac{y}{2} \\ z - x + \frac{y}{2} \end{pmatrix},$$

$$\text{isto é,} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - \frac{y}{2} \\ \frac{y}{2} \\ z - x + \frac{y}{2} \end{pmatrix}.$$

Notemos que esta última equação matricial possui infinitas soluções, que serão dadas por

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma + x - \dfrac{y}{2} \\ \\ -\gamma + \dfrac{y}{2} \\ \\ x - \dfrac{y}{2} \end{pmatrix}.$$

Substituindo em (9.10), obteremos

$$\begin{aligned}(x\,,y\,,z) &= \left(\gamma + x - \frac{y}{2}\right) \cdot (1\,,0\,,1) + \left(-\gamma + \frac{y}{2}\right) \cdot (1\,,2\,,0) + \gamma \cdot (0\,,2\,,-1) \\ &= \left(x\,,y\,,x - \frac{y}{2}\right) \\ &= x \cdot (1\,,0\,,1) + y \cdot \left(0\,,1\,,-\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

Notemos que os vetores

$$(1\,,0\,,1)\,,\ \left(0\,,1\,,-\frac{1}{2}\right)$$

são L.I. em $\left(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot\right)$.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Assim, segue-se que o conjunto

$$\mathcal{B} \doteq \left\{(1\,,0\,,1)\,,\ \left(0\,,1\,,-\frac{1}{2}\right)\right\} \tag{9.11}$$

é uma base para o subespaço vetorial $(U\,,+\,,\cdot)$.

Em particular,

$$\dim(U) = 2\,.$$

<u>Segundo Modo:</u>

Notemos que os vetores

$$(1\,,0\,,1)\,,\ (1\,,2\,,0)$$

são L.I. em $\left(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot\right)$ e pertencem ao subespaço vetorial U.

Vejamos se estes vetores, juntamente com $(0\,,2\,,-1)$, são L.D. ou L.I. em $\left(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot\right)$.

Para isto consideremos a seguinte combinação linear dos vetores acima sendo igual ao vetor nulo:

$$\begin{aligned} & \alpha \cdot (1\,,0\,,1) + \beta \cdot (1\,,2\,,0) + \gamma \cdot (0\,,2\,,-1) = (0\,,0\,,0)\,, \\ \text{ou seja,} \quad & (\alpha + \beta\,, 2\,\beta + 2\gamma\,, \alpha - \gamma) = (0\,,0\,,0)\,, \\ \text{ou ainda,} \quad & \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ \alpha - \gamma = 0 \end{cases}, \\ \text{ou, equivalentemente,} \quad & \alpha = -\beta = \gamma\,, \end{aligned}$$

ou seja, os vetores

$$(1\,,0\,,1)\,,\ (1\,,2\,,0)\,,\ (0\,,2\,,-1)$$

são L.D. em $\left(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot\right)$.

Portanto, da Proposição (6.43), segue que

$$[(1\,,0\,,1)\,,\ (1\,,2\,,0)\,,\ (0\,,2\,,-1)] = [(1\,,0\,,1)\,,\ (1\,,2\,,0)]\,,$$

ou seja, o conjunto

$$\mathcal{C} \doteq \{(1\,,0\,,1)\,,(1\,,2\,,0)\} \tag{9.12}$$

é uma base do subespaço vetorial U.

Em particular,

$$\dim(U) = 2\,.$$

□

Observação 9.13 *Embora as bases (9.11) e (9.12) não coincidam, ambas estão corretas.*

Basta observar que

$$(1\,,2\,,0) = (1\,,0\,,1) + 2\cdot\left(0\,,1\,,-\frac{1}{2}\right)\,.$$

Exemplo 9.14 *Dados os subespaços vetoriais*

$$U \doteq \left\{A \in M_2(\mathbb{R})\,;\ A^t = A\right\} \quad e \quad W = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

do espaço vetorial real $(M_2(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de soma de matrizes e multiplicação de número real por matrizes, respectivamente), encontre uma base dos subespaços vetoriais*

$$U\,,\quad W\,,\quad U\cap W \quad e \quad U+W\,,$$

no caso em que não se reduzam ao subespaço vetorial trivial $\{0\}$.

Resolução:

Para o subespaço vetorial U :

Já foi mostrado anteriormente (veja o Exemplo (4.17)) que o conjunto U é um subespaço vetorial de $(M_2(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$.

Observemos que se

$$A \doteq \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

teremos

$$\begin{aligned} & A \in W\,, \\ \text{isto é,}\quad & A = A^t\,, \\ \text{ou seja,}\quad & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\,, \\ \text{ou ainda}\quad & c = b\,. \end{aligned}$$

Portanto, $A \in U$ se, e somente se,

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \\ &= a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{9.15}$$

para $a, b, d \in \mathbb{R}$.

Observemos também que as matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

são L.I. em $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Portanto, as três matrizes acima são L.I. em $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ e geram o subespaço vetorial U, ou seja, formam uma base do subespaço vetorial U.

Em particular, temos

$$\dim(U) = 3. \tag{9.16}$$

Para o subespaço vetorial W:

Como a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gera o subespaço vetorial W e é não nula, segue que o conjunto formado por esta matriz é uma base do subespaço vetorial W.

Em particular, temos

$$\dim(W) = 1. \tag{9.17}$$

Para o subespaço vetorial $U \cap W$:

Notemos que

$$A \in U \cap W$$

$$\text{se, e somente,} \quad \begin{cases} A \in U, \quad \text{ou seja,} \quad A = A^t \\ \text{e} \\ A \in W, \quad \text{isto é, existe } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ tal que } A = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \end{cases} .$$

Logo

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\lambda & \lambda\\ 0 & \lambda\end{pmatrix} &= A\\ &= A^t\\ &= \begin{pmatrix}\lambda & \lambda\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}^t\\ &= \begin{pmatrix}\lambda & 0\\ \lambda & \lambda\end{pmatrix},\\ \text{ou seja,} \qquad \lambda &= 0\,.\end{aligned}$$

Portanto

$$A = O\,.$$

Desse modo,

$$U \cap W = \{O\}\,.$$

Em particular,

$$\dim(U \cap W) = 0\,. \tag{9.18}$$

<u>Para o subespaço vetorial $U + W$:</u>

Logo, da Proposição (7.38), de (9.16), (9.17) e (9.18), segue que

$$\begin{aligned}\dim(U+W) &\overset{\text{Prop. (7.38)}}{=} \underbrace{\dim(U)}_{\overset{(9.16)}{=}3} + \underbrace{\dim(W)}_{\overset{(9.17)}{=}1} - \underbrace{\dim(U\cap W)}_{\overset{(9.18)}{=}0}\\ &= 4\\ &= \dim[M_2(\mathbb{R})]\,.\end{aligned}$$

Portanto, do Corolário (7.47), segue que

$$U + W = M_2(\mathbb{R})\,,$$

ou ainda,

$$U \oplus W = M_2(\mathbb{R})\,,$$

Assim uma base para o subespaço vetorial $U+W$ pode ser a base canônica de $(M_2(\mathbb{R})\,, +\,, \cdot)$, a saber:

$$\mathcal{B} \doteq \left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}.$$

□

Exemplo 9.19 *Sejam*

$$U \doteq \{p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})\,;\, p'(t) = 0\,,\ \textit{para cada } t \in \mathbb{R}\} \quad e \quad W \doteq \{p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})\,;\, p(0) = p(1) = 0\}$$

subespaços vetoriais do espaço vetorial real $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de soma de polinômios e multiplicação de número real por polinômio, respectivamente).*

Encontre bases para os subespaços vetoriais

$$U, \quad W, \quad U \cap W \quad e \quad U + W,$$

no caso em que não se reduzam ao subespaço vetorial trivial $\{0\}$.

Resolução:

Para o subespaço vetorial U:

Deixaremos como exercício para o leitor mostrar que o conjunto U é um subespaço vetorial de $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Observemos que se $p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, existem

$$a_o, a_1, a_2 \in \mathbb{R},$$

tais que

$$p(t) = a_o + a_1 t + a_2 t^2, \quad \text{para cada} \quad t \in \mathbb{R},$$

assim

$$p'(t) = a_1 + 2 a_2 t, \quad \text{para cada} \quad t \in \mathbb{R}. \tag{9.20}$$

Logo

$$\begin{aligned} & p \in U \\ \text{se, e somente se,} \quad & p'(t) = 0, \quad \text{para cada} \quad t \in \mathbb{R}, \\ \text{que, de (9.20), é equivalente a:} \quad & a_1 + 2 a_2 t = 0, \ t \in \mathbb{R} \\ \text{isto é,} \quad & a_1 = a_2 = 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$p \in U \quad \text{se, e somente se,} \quad p(t) = a_o, \quad \text{para cada} \quad t \in \mathbb{R}, \tag{9.21}$$

para cada $a_o \in \mathbb{R}$.

Se considerarmos $p_o \in P_2(\mathbb{R})$ dado por

$$p_o(t) \doteq 1, \quad \text{para cada} \quad t \in \mathbb{R}, \tag{9.22}$$

então,

$$p_o \in U.$$

Além disso, de (9.21), segue que

$$p \in U \quad \text{se, e somente se,} \quad p = \alpha \cdot p_o,$$

para algum $\alpha \in \mathbb{R}$, ou seja,

$$U = [p_o]. \tag{9.23}$$

Como

$$p_o \neq O\,,$$

segue que o conjunto $\{p_o\}$ será uma base do subespaço vetorial U.

Em particular,

$$\dim(U) = 1\,. \tag{9.24}$$

Para o subespaço vetorial W:

Vimos, anteriormente, que o conjunto W é um subespaço vetorial de $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$.

Observemos que se $p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, existem

$$a_o\,,a_1\,,a_2 \in \mathbb{R}\,,$$

tais que

$$p(t) = a_o + a_1\,t + a_2\,t^2\,, \quad \text{para cada} \quad t \in \mathbb{R}\,. \tag{9.25}$$

Logo

$$p \in W$$

$$\text{se, e somente se,} \quad \begin{cases} a_o = p(0) \overset{p\in W}{=} 0 \\ a_o + a_1 + a_2 = p(1) \overset{p\in W}{=} 0 \end{cases}$$

$$\text{como, (9.25) e } a_o = 0\,, a_2 = -a_1, \text{ teremos:} \quad p(t) = a_1 t - a_1\,t^2 = a_1\,(t - t^2)\,, \tag{9.26}$$

para cada $t \in \mathbb{R}$.

Logo se considerarmos $p_1 \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ dado por

$$p_1(t) \doteq t - t^2\,, \quad \text{para cada} \quad t \in \mathbb{R}\,, \tag{9.27}$$

então

$$p_1 \in W\,,$$

pois

$$p_1(0) = p_1(1) = 0$$

e, de (9.26), segue que

$$p \in W \quad \text{se, e somente se,} \quad p(t) = a_1\left(t - t^2\right) \overset{(9.27)}{=} a_1\,p_1(t)\,, \quad \text{para cada} \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

ou seja,

$$W = [p_1]\,. \tag{9.28}$$

Como $p_1 \neq O$, segue que o conjuto $\{p_1\}$ 'e uma base do subespaço vetorial W.

Em particular,

$$\dim(W) = 1\,. \tag{9.29}$$

Para o subespaço vetorial $U \cap W$:

Dos dois itens acima temos que

$$p \in U \cap W \overset{(9.23)\text{ e }(9.28)}{=} [p_o] \cap [p_1]$$

se, e somente se, existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que

$$\lambda \cdot p_o = p = \mu \cdot p_1 ,$$

de (9.21) e (9.27) é equivalente à: $\lambda = \mu \left(t - t^2\right)$, para cada $t \in \mathbb{R}$.

Logo deveremos ter (pois o lado esquerdo da igualdade acima é um polinômio de grau zero e do lado direito temos um polinômio de grau dois)

$$\lambda = \mu = 0 ,$$

ou seja, deveremos ter

$$p = 0 \in \mathscr{P}(\mathbb{R}) .$$

Assim,

$$U \cap W = \{0\} .$$

Em particular,

$$\dim(U \cap W) = 0 . \tag{9.30}$$

Para o subespaço vetorial $U + W$:

Logo, da Proposição (7.38), de (9.24), (9.29) e (9.30), segue que

$$\begin{aligned}\dim(U + W) &\overset{\text{Prop. (7.38)}}{=} \underbrace{\dim(U)}_{\overset{(9.24)}{=} 1} + \underbrace{\dim(W)}_{\overset{(9.29)}{=} 1} - \underbrace{\dim(U \cap W)}_{\overset{(9.30)}{=} 0} \\ &= 1 + 1 - 0 \\ &= 2 .\end{aligned}$$

Notemos que, do item 5. da Proposição (5.21), segue que

$$\begin{aligned}U + W &= [p_o] + [p_1] \\ &\overset{\text{item 5. da Proposição(5.21)}}{=} [p_o , p_1] .\end{aligned}$$

De (9.21) e (9.27), segue que o conjunto

$$\mathcal{B} \doteq \{p_o , p_1\}$$

é L.I. em $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}) , + , \cdot)$.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Portanto, como

$$\dim(U + W) = 2 ,$$

segue que o conjunto $\mathcal{B}$ será uma base para o subespaço vetorial $U + W$.

□

Exemplo 9.31 *Seja* $(V , + , \cdot)$ *um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) de dimensão finita.*

Suponhamos que os conjuntos $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são bases (ordenadas) do espaço vetorial real (respectivamente, complexo) $(V, +, \cdot)$, formadas pelos vetores

$$e_1, e_2, e_3 \quad e \quad g_1, g_2, g_3,$$

respectivamente, relacionados da seguinte forma:

$$\begin{cases} g_1 = e_1 + e_2 - e_3 \\ g_2 = 2 \cdot e_2 + 3 \cdot e_3 \\ g_3 = 3 \cdot e_1 + e_3 \end{cases} . \tag{9.32}$$

1. *Determine as matrizes de mudança de base, da base $\mathcal{B}$ para a base $\mathcal{C}$, isto é, $M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$, e da base $\mathcal{C}$ para a base $\mathcal{B}$, isto é, $M_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$.*

2. *Se as coordenadas e a matriz das coordenadas do vetor v em relação a base $\mathcal{B}$, isto é, $[v]_{\mathcal{B}}$, é dada pela matrix*

$$[v]_{\mathcal{B}} \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \tag{9.33}$$

encontre as coordenadas e a matriz das coordeanadas do vetor v em relação a base $\mathcal{C}$, isto é, $[v]_{\mathcal{C}}$.

3. *Se a matriz das coordenadas do vetor v em relação a base $\mathcal{C}$, isto é, $[v]_{\mathcal{C}}$, é a matriz*

$$[v]_{\mathcal{C}} \doteq \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{9.34}$$

encontre a matriz das coordenadas do vetor v em relação a base $\mathcal{B}$, isto é, $[v]_{\mathcal{B}}$.

Resolução:

1. Notemos que (9.32) é equivalente a:

$$\begin{cases} g_1 = 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + (-1) \cdot e_3 \\ g_2 = 0 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 + 3 \cdot e_3 \\ g_3 = 3 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3 \end{cases} .$$

Logo, teremos:

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}. \tag{9.35}$$

Da Proposição (8.42), segue que

$$M_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = (M_{\mathcal{B}\mathcal{C}})^{-1} .$$

Passemos a encontrar a inversa da matriz $M_{\mathcal{BC}}$ (ver Apêndices (A) e (B)):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{17}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{17} & -\frac{3}{17} & \frac{2}{17} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{17} & \frac{9}{17} & -\frac{6}{17} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{17} & \frac{4}{17} & \frac{3}{17} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{17} & -\frac{3}{17} & \frac{2}{17} \end{array}\right)$$

Portanto,

$$M_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{17} & \frac{9}{17} & -\frac{6}{17} \\ -\frac{1}{17} & \frac{4}{17} & \frac{3}{17} \\ \frac{5}{17} & -\frac{3}{17} & \frac{2}{17} \end{pmatrix}. \tag{9.36}$$

2. Da Proposição (8.25), segue que

$$\begin{aligned} [v]_{\mathcal{C}} &= M_{\mathcal{C}\,\mathcal{B}}\,[v]_{\mathcal{B}} \\ &\overset{(9.33)\text{ e }(9.36)}{=} \begin{pmatrix} \frac{2}{17} & \frac{9}{17} & -\frac{6}{17} \\ -\frac{1}{17} & \frac{4}{17} & \frac{3}{17} \\ \frac{5}{17} & -\frac{3}{17} & \frac{2}{17} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &\overset{\text{Exercício}}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. Da Proposição (8.25), segue que

$$
\begin{aligned}
[v]_{\mathcal{B}} &= M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}\,[v]_{\mathcal{C}} \\
&\overset{(9.34)\text{ e }(9.35)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

□

Exemplo 9.37 *Considere o seguinte subespaço do espaço vetorial real* $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de soma de matrizes e multiplicação de número real por matriz, respectivamente):*

$$W \doteq \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})\,;\, x - y - z = 0 \right\}. \tag{9.38}$$

1. *Mostre que o conjunto* $\mathcal{B}$ *formando pelas matrizes*

$$B_1 \doteq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{9.39}$$

   e o conjunto $\mathcal{C}$ *formado pelas matrizes*

$$C_1 \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 \doteq \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_3 \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{9.40}$$

   são bases do subespaço vetorial W*.*

2. *Encontre as matrizes de mudança de base, da base* $\mathcal{B}$ *para a base* $\mathcal{C}$*, isto é,* $M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$*, e da base* $\mathcal{C}$ *para a base* $\mathcal{B}$*, isto é,* $M_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$*.*

3. *Encontre uma base (ordenada)* $\mathcal{D}$ *do subespaço vetorial* W*, de tal modo que a matriz*

$$P \doteq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \tag{9.41}$$

   seja a matriz de mudança de base, da base $\mathcal{D}$ *para a base* $\mathcal{B}$*, isto é,*

$$P = M_{\mathcal{D}\mathcal{B}}.$$

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor mostrar que o conjunto W é um subespaço vetorial de $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Do item 1.:

Observemos, de (9.38), que

$$A \in W$$

$$\text{se, e somente se,} \quad A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in W \quad \text{e} \quad x = y + z\,.$$

Assim, $A \in W$ se, e somente se,

$$A = \begin{pmatrix} y+z & y \\ z & t \end{pmatrix} = y \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{9.42}$$

para cada $y, z, t \in \mathbb{R}$.

Logo, de (9.42), segue que

$$W = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]. \tag{9.43}$$

Notemos que as matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

são L.I. em $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Assim o conjunto

$$\mathcal{B} \doteq \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=B_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=B_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=B_3} \right\} \tag{9.44}$$

será uma base de W.

Em particular, teremos

$$\dim(W) = 3\,. \tag{9.45}$$

Por outro lado, o conjunto $\mathcal{C}$ é formado por três vetores de W e a dimensão de W é três.

Logo para que o conjunto $\mathcal{C}$ seja uma base de W, basta verificar que tais vetores são L.I. em $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Para isto observemos que,

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{se, e somente,} \quad \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \alpha+\beta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{ou seja,} \quad \alpha = \beta = \gamma = 0\,,$$

mostrando que o conjunto

$$\mathcal{C} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=C_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=C_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=C_3} \right\} \tag{9.46}$$

é L.I. em $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Do item 2.:

Observemos que, de (9.46) e (9.44), segue que

$$\begin{aligned} C_1 &\stackrel{(9.46)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= B_2 \\ &= 0 \cdot B_1 + 1 \cdot B_2 + 0 \cdot B_3 \end{aligned} \tag{9.47}$$

$$\begin{aligned} C_2 &\stackrel{(9.46)}{=} -B_1 + B_2 \\ &= (-1) \cdot B_1 + 1 \cdot B_2 + 0 \cdot B_3 \end{aligned} \tag{9.48}$$

$$\begin{aligned} C_3 &\stackrel{(9.46)}{=} B_3 \\ &= 0 \cdot B_1 + 0 \cdot B_2 + 1 \cdot B_3 \,. \end{aligned}$$

Assim, a matriz de mudança de base, da base $\mathcal{B}$ para a base $\mathcal{C}$, será dada por:

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notemos também que, de (9.44) e (9.46), segue que

$$\begin{aligned} B_1 &\stackrel{(9.44)}{=} C_1 - C_2 \\ &= 1 \cdot C_1 + (-1) \cdot C_2 + 0 \cdot C_3 \end{aligned} \tag{9.49}$$

$$\begin{aligned} B_2 &\stackrel{(9.44)}{=} C_1 \\ &= 1 \cdot C_1 + 0 \cdot C_2 + 0 \cdot C_3 \end{aligned} \tag{9.50}$$

$$B_3 \stackrel{(9.44)}{=} 0 \cdot C_1 + 0 \cdot C_2 + 1 \cdot C_3 \,.$$

Assim, a matriz de mudança de base, da base $\mathcal{C}$ para a base $\mathcal{B}$, será dada por:

$$M_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Do item 3.:

Notemos que

$$\det(P) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{Exercício}}{=} -6 \neq 0\,.$$

Assim, deverá exitir uma base

$$\mathcal{D} \doteq \{D_1\,, D_2\,, D_3\}$$

de modo que

$$M_{\mathcal{D}\mathcal{B}} = P \overset{(9.41)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

Com isto, deveremos ter:

$$\begin{aligned} B_1 &= 1 \cdot D_1 + 0 \cdot D_2 + 0 \cdot D_3 \\ &= D_1 \qquad (9.51) \\ B_2 &= 1 \cdot D_1 + 0 \cdot D_2 + 3 \cdot D_3 \\ &= D_1 + 3 \cdot D_3 \qquad (9.52) \\ B_3 &= 0 \cdot D_1 + 2 \cdot D_2 + 1 \cdot D_3 \\ &= 2 \cdot D_2 + D_3\,. \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema linear matricial (formado por matrizes quadradas de ordem 3, D_1, D_2 e D_3), obteremos:

$$D_1 = B_1\,, \quad D_3 = \frac{B_2 - B_1}{3}\,, \quad D_2 = \frac{B_3 - \dfrac{B_2 - B_1}{3}}{2} = \frac{3\,B_3 + B_1 - B_2}{6}.$$

Assim, a base $\mathcal{D}$ será formada pelas matrizes D_1, D_2 e D_3 que são dadas por

$$D_1 \doteq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_2 \doteq \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{6} \\ -\dfrac{1}{6} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad D_3 \doteq \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Deixaremos como exercício para o leitor verificar que o conjunto $\mathcal{D}$ é uma base para W (isto é, que o conjunto $\mathcal{D}$ gera o subespaço vetorial W é L.I. em $(M_2(\mathbb{R})\,, +\,, \cdot)$).

$\square$

Capítulo 10

Transformações Lineares

$\boxed{\textbf{17.09.2015 - 11.a}}$

10.1 Introdução e Exemplos

Até agora estudamos os espaços vetoriais reais (ou complexos) e seus subespaços, introduzimos os conceitos como dependência e independência linear e, a partir disto, pudemos, no caso de serem finitamente gerados, descrevê-los de maneira mais simples usando para isto geradores e, mais especificamente, bases.

De certa forma já temos em mãos tudo o que precisamos para trabalhar com espaços vetoriais reais (ou complexos).

No Capítulo 14 voltaremos a estudar os espaços vetoriais reais (ou complexos) que possuem uma estrutura mais "rica".

O leitor já deve estar familiarizado com o conceito de funções, principalmente com aquelas que estão definidas em um subconjunto dos números reais e cujo contradomínio seja, eventualmente, um outro subconjunto dos números reais.

Nosso próximo passo é estudar funções que têm como domínio um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) e cujo contradomínio seja, eventualmente um outro espaço vetorial real (respectivamente, complexo).

Note que os valores tomados são, na verdade, vetores.

No entanto, vamos restringir a apenas alguns tipos especiais dentre estas funções.

Estaremos interessados em funções que *preservam* as operações existentes no espaço vetorial real (respectivamente, complexo), que atua como o seu domínio, e aquelas do espaço vetorial real (respectivamente, complexo), que age como contra-domínio.

Por exemplo, por preservar a adição de vetores, entendemos que ao tomar dois vetores no domínio da função, o valor que esta deve ter para a soma destes dois vetores deverá ser igual a soma dos valores que ela apresentará para cada um dos vetores no contradomínio.

De maneira semelhante a função deverá preservar o produto por escalar.

Funções com estas propriedades são chamadas de transformações lineares, mais precisamente, temos a:

Definição 10.1 *Sejam* $(\mathrm{U}, +, \cdot)$ *e* $(\mathrm{V}, +, \cdot)$ *espaços vetoriais reais (ou complexos).*

Diremos que uma função $T : U \to V$ *é uma* **transformação linear de $(U, +, \cdot)$ em $(V, +, \cdot)$**, *se forem verificadas as seguintes condições:*

1. $T(u+v) = T(u) + T(v)$, *para cada* $u, v \in U$;

2. $T(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot T(u)$, *para cada* $u \in U$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*)*.

Observação 10.2

1. *Se indicarmos as operações de* V *por* $+_V$ *e* $\cdot_V$ *e as operações de* U *por* $+_u$ *e* $\cdot_u$, *então as propriedades 1. e 2. acima podem ser escritas, de modo rigoroso, como:*

   1'. $T\,(u +_u v) = T(u) +_V T(v)$, *para cada* $u, v \in U$;

   2'. $T\,(\lambda \cdot_u u) = \lambda \cdot_V T(u)$, *para cada* $u \in U$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*)*.

   Por uma questão de facilidade evitaremos escrever as sentenças acima e consideraremos entendidas as identidades 1. e 2. da Definição (10.1) acima.

2. *Supondo que* $(U, +, \cdot)$ *e* $(V, +, \cdot)$ *são espaços vetoriais reias (ou complexos), notemos que* $T : U \to V$ *é uma transformação linear se, e somente se,*

$$T(u + \lambda \cdot v) = T(u) + \lambda \cdot T(v), \tag{10.3}$$

   para cada $u, v \in U$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$ *(respectivamente,* $\mathbb{C}$*).*

   A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

3. *Notemos que, pela propriedade 1. da Definição (10.1) e o item 2. da Proposição (3.31), temos que*

$$\begin{aligned} T(O_u) &\overset{\text{item 2. da Prop. (3.31)}}{=} T(0 \cdot O_u) \\ &\overset{\text{item 2. da Definição (10.1)}}{=} 0 \cdot T(O_u) \\ &\overset{\text{item 2. da Proposição (3.31)}}{=} O_V\,, \end{aligned}$$

   onde O_u *denota o vetor nulo de* $(U, +, \cdot)$ *e* O_V *denota o vetor nulo de* $(V, +, \cdot)$, *ou seja, toda transformação linear de* $(U, +, \cdot)$ *em* $(V, +, \cdot)$, *leva o vetor nulo de* $(U, +, \cdot)$, *no vetor nulo de* $(V, +, \cdot)$.

   Resumindo:

$$T(O) = O\,. \tag{10.4}$$

4. *Além disso, na situação da Definição (10.1), temos que*

$$T(-u) = -T(u)\,, \quad \textit{para cada} \quad u \in U\,, \tag{10.5}$$

   ou seja, uma transformação linear de $(U, +, \cdot)$ *em* $(V, +, \cdot)$, *leva um vetor oposto de* $(U, +, \cdot)$, *no vetor oposto da imagem daquele, em* $(V, +, \cdot)$.

De fato,

$$\begin{aligned} T(-u)+T(u) &\overset{\textit{item 1. da Definição (10.1)}}{=} T(-u+u) \\ &= T(O) \\ &\overset{(10.4)}{=} O\,. \end{aligned}$$

Logo da unicidade da existência do vetor oposto (ou seja, da Observação (3.11)*), segue que*

$$T(-u)=-T(u)\,.$$

5. *Finalmente, na situação acima, se*

$$u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_n\in U \quad e \quad \lambda_1\,,\lambda_2\,,\cdots\,,\lambda_n\in\mathbb{R}\ \textit{(respectivamente, } \mathbb{C}\textit{)}\,,$$

então

$$T\left(\lambda_1\cdot u_1+\lambda_2\cdot u_2+\cdots+\lambda_n\cdot u_n\right)=\lambda_1\cdot T(u_1)+\lambda_2\cdot T(u_2)+\cdots+\lambda_n\cdot T(u_n)\,,$$

ou seja,

$$T\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\cdot u_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\cdot T(u_i)\,. \tag{10.6}$$

A verificação deste fato pode ser feita por indução sobre um número de parcelas e seus detalhes serão deixados como exercício para o leitor.

6. *Na situação da Definição* (10.1)*, o conjunto formado por todas as transformações lineares de* $(U\,,+\,,\cdot)$ *em* $(V\,,+\,,\cdot)$ *será denotado por* $\mathcal{L}(U\,;V)$*, isto é,*

$$\mathcal{L}(U\,;V)\doteq\{T:U\to V\,;\,T\ \textit{é uma transformação linear}\}\,. \tag{10.7}$$

7. *Na situação da Definição* (10.1)*, se*

$$V=U\,,$$

diremos que a aplicação $\underline{T}$ *é um* <u>**operador linear em** $(U\,,+\,,\cdot)$</u>.

O conjunto formado por todos os operadores lineares definidos em $(U\,,+\,,\cdot)$ *em será denotado por* $\mathcal{L}(U)$*, isto é,*

$$\mathcal{L}(U)\doteq\{T:U\to U\,;\,T\ \textit{é um operador linear}\}\,. \tag{10.8}$$

8. *Na situação da Definição* (10.1)*, se*

$$V=\mathbb{R}\ \textit{(ou } V=\mathbb{C}\textit{)}\,,$$

diremos que a aplicação $\underline{T}$ *é um* <u>**funcional linear em** U</u>.

O conjunto formado por todos os funcionais lineares definidos em $(U, +, \cdot)$ *será denotado por*

$$U'$$

isto é,

$$U' \doteq \{T : U \to \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}) ;\, T \text{ é um funcional linear}\}. \tag{10.9}$$

A seguir listamos alguns exemplos de transformações lineares, operadores lineares e funcionais lineares definidas e tomando valores em vários espaços vetoriais reais (ou complexos), que foram tratamos nos capítulos anteriores.

Exemplo 10.10 *Sejam* $(U, +, \cdot)$, $(V, +, \cdot)$ *espaços vetoriais reais (ou complexos) e* $T : U \to V$ *dada por*

$$T(u) = O\,, \qquad \text{para cada} \quad u \in U\,. \tag{10.11}$$

Mostre que a aplicação $\underline{T}$ *é uma transformação linear de* $(U, +, \cdot)$ *em* $(V, +, \cdot)$, *isto é,* $T \in \mathcal{L}(U; V)$.

A transformação linear T *será chamada de* **transformação nula**.

Resolução:

Utilizaremos o item 2. da Observação (10.2) para mostrar que T é uma transformação linear de $(U, +, \cdot)$ em $(V, +, \cdot)$.

Notemos que se $u, v \in U$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ teremos que

$$\begin{aligned} T(u + \lambda \cdot v) &\overset{(10.11)}{=} O \\ &= O + \underbrace{O}_{\text{Prop. } \overset{(3.31)}{=} \lambda \cdot O} \\ &= \underbrace{O}_{\overset{(10.11)}{=} T(u)} + \lambda \cdot \underbrace{O}_{\overset{(10.11)}{=} T(v)} \\ &= T(u) + \lambda \cdot T(v)\,, \end{aligned}$$

ou seja, a aplicação T é uma transformação linear de $(U, +, \cdot)$ em $(V, +, \cdot)$.

□

Exemplo 10.12 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *espaço vetorial real (respectivamente, complexo) e* $T : U \to U$ *dada por*

$$T(u) = u\,, \qquad \text{para cada} \quad u \in U\,. \tag{10.13}$$

Mostre que a aplicação $\underline{T}$ *é um operador linear em* $(U, +, \cdot)$, *isto é,* $T \in \mathcal{L}(U)$.

O operador linear $\underline{T}$ *é chamado de* **operador identidade.**

Resolução:

Utilizaremos o item 2. da Observação (10.2) para mostrar que a aplicação $\underline{T}$ é um operador linear em $(U, +, \cdot)$.

Observemos que

$$u\,,v\in U \quad \text{e} \quad \lambda\in\mathbb{R}\ \text{(respectivamente, } \mathbb{C})\,,$$

teremos que

$$\begin{aligned} T(u+\lambda\cdot v) &\overset{(10.13)}{=} \underbrace{u}_{\overset{(10.13)}{=}T(u)} + \lambda\cdot \underbrace{v}_{\overset{(10.13)}{=}T(v)} \\ &= T(u)+\lambda\cdot T(v), \end{aligned}$$

ou seja, a aplicação $\underline{T}$ é um operador linear em $(U\,,+\,,\cdot)$.

□

Agora temos o:

Exemplo 10.14 *Sejam* $(\mathscr{P}_n(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$, $\left(\mathbb{R}^{n+1}\,,+\,,\cdot\right)$ *espaços vetoriais reais (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operaçoes usuais de* $\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ *e de* $\mathbb{R}^{n+1}$*, respectivamente) e* $T:\mathscr{P}_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^{n+1}$ *dada por*

$$T(p)\doteq(a_o\,,a_1\,,\cdots\,,a_n)\,,\quad \textit{para cada}\quad p\in\mathscr{P}_n(\mathbb{R})\,, \tag{10.15}$$

onde

$$p(t)=a_o+a_1\,t+\cdots+a_n\,t^n\,,\quad \textit{para cada}\quad t\in\mathbb{R}\,. \tag{10.16}$$

Mostre que a aplicação $\underline{T}$ *é uma transfromação linear de* $(\mathscr{P}_n(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$ *em* $\left(\mathbb{R}^{n+1}\,,+\,,\cdot\right)$*, isto é,* $T\in\mathcal{L}\left(\mathscr{P}_n(\mathbb{R})\,;\,\mathbb{R}^{n+1}\right)$.

Resolução:

Utilizaremos o item 2. da Observação (10.2) para mostrar que a aplicação $\underline{T}$ é uma transformação linear de $(\mathscr{P}_n(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$ em $\left(\mathbb{R}^{n+1}\,,+\,,\cdot\right)$.

Notemos que, se

$$p\,,q\in\mathscr{P}_n(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad \lambda\in\mathbb{R}\,,$$

então, existem

$$a_o\,,a_1\,,\cdots\,,a_n\,,b_o\,,B_1\,,\cdots\,,b_n\in\mathbb{R}\,,$$

tais que

$$p(t)=a_o+a_1\,t+\cdots+a_n\,t^n\,, \tag{10.17}$$

$$q(t)=b_o+b_1\,t+\cdots+b_n\,t^n\,,\quad \text{para cada}\quad t\in\mathbb{R}\,. \tag{10.18}$$

Logo, para cada $t\in\mathbb{R}$, teremos:

$$\begin{aligned} (p+\lambda\cdot q)(t) &= (a_o+a_1\,t+\cdots+a_n\,t^n)+\lambda\,(b_o+b_1\,t+\cdots+b_n\,t^n) \\ &= (a_o+\lambda b_o)+(a_1+\lambda\,b_1)\,t+\cdots+(a_n+\lambda\,b_n)\,t^n\,. \end{aligned} \tag{10.19}$$

Logo

$$
\begin{aligned}
T(p+\lambda\cdot q) &\overset{(10.15)\text{ e }(10.19)}{=} (a_o+\lambda\, b_o\,, a_1+\lambda\, b_1\,, \cdots, a_n+\lambda\, b_n)\\
&\overset{\text{propriedades de }(\mathbb{R}^{n+1},+,\cdot)}{=} (a_o\,, a_1\,, \cdots, a_n)+(\lambda\, b_o\,, \lambda\, b_1\,, \cdots, \lambda b_n)\\
&\overset{\text{propriedades de }(\mathbb{R}^{n+1},+,\cdot)}{=} \underbrace{(a_o\,, a_1\,, \cdots, a_n)}_{\overset{(10.15)\text{ e }(10.17)}{=}T(p)}+\lambda\cdot\underbrace{(b_o\,, b_1\,, \cdots, b_n)}_{\overset{(10.15)\text{ e }(10.18)}{=}T(q)}\\
&= T(p)+\lambda\cdot T(q)\,,
\end{aligned}
$$

ou seja, a aplicação $\underline{T}$ é uma transformação linear de $(\mathscr{P}_n(\mathbb{R}),+,\cdot)$ em $\left(\mathbb{R}^{n+1},+,\cdot\right)$.

□

Temos também o:

Exemplo 10.20 *Sejam* $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *uma matriz dada e* $(M_{n\times1}(\mathbb{R}),+,\cdot)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operaçoes usuais de* $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$*).*

Definamos

$$T: M_{n\times1}(\mathbb{R})\to M_{m\times1}(\mathbb{R})$$

por

$$T(u)\doteq A\,u\,,\quad \textit{para cada}\quad u\in M_{n\times1}(\mathbb{R})\,. \tag{10.21}$$

Mostre que a aplicação $\underline{T}$ *é uma transformação linear de* $(M_{n\times1}(\mathbb{R}),+,\cdot)$ *em* $(M_{m\times1}(\mathbb{R}),+,\cdot)$*, ou seja,* $T\in\mathcal{L}\left(M_{n\times1}(\mathbb{R})\,;M_{m\times1}(\mathbb{R})\right)$*.*

Resolução:

Utilizaremos o item 2. da Observação (10.2) para mostrar que a aplicação $\underline{T}$ é transformação linear de $(M_{n\times1}(\mathbb{R}),+,\cdot)$ em $(M_{m\times1}(\mathbb{R}),+,\cdot)$.

Para isto, notemos que, se

$$u,v\in M_{n\times1}(\mathbb{R})\quad\text{e}\quad\lambda\in\mathbb{R}\,,$$

teremos

$$
\begin{aligned}
T(u+\lambda\cdot v) &\overset{(10.21)}{=} A(u+\lambda\cdot v)\\
&\overset{\text{Propriedades de matrizes}}{=} Au+A(\lambda\cdot v)\\
&= \underbrace{Au}_{\overset{(10.21)}{=}T(u)}+\lambda\,\underbrace{(Av)}_{\overset{(10.21)}{=}T(v)}\\
&= T(u)+\lambda\cdot T(v),
\end{aligned}
$$

ou seja, a aplicação $\underline{T}$ é transformação linear de $(M_{n\times1}(\mathbb{R}),+,\cdot)$ em $(M_{m\times1}(\mathbb{R}),+,\cdot)$.

□

Observação 10.22 *Se no Exemplo (10.20) acima, tivermos* $m=n$*, então segue que* $T\in(M_{n\times1}(\mathbb{R}))$*, ou seja,* $\underline{T}$ *será um operador linear em* $(M_{n\times1}(\mathbb{R}),+,\cdot)$*.*

Outro caso importante é dado pelo:

Exemplo 10.23 *Sejam* $(C([0,1];\mathbb{R}),+,\cdot)$ *e* $(\mathbb{R},+,\cdot)$ *espaços vetoriais reais (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operaçoes usuais de* $C([0,1];\mathbb{R})$ *e de* $\mathbb{R}$*, respectivamente) e* $T: C([0,1];\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$*, dada por*

$$T(f) \doteq \int_0^1 f(x)\,dx\,, \quad \textit{para cada} \quad f \in C([0,1];\mathbb{R})\,. \tag{10.24}$$

Mostre que a aplicação $\underline{T}$ *é um funcional linear em* $(C([0,1];\mathbb{R}),+,\cdot)$*, isto é,* $T \in \mathcal{L}\,(C([0,1];\mathbb{R})\,;\mathbb{R}) = [C([0,1];\mathbb{R})]'$.

Resolução:

Utilizaremos o item 2. da Observação (10.2) para mostrar que a aplicação $\underline{T}$ é um funcional linear de $(C([0,1];\mathbb{R}),+,\cdot)$.

Notemos que, se

$$f,g \in C([0,1];\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad \lambda \in \mathbb{R}\,,$$

teremos:

$$\begin{aligned} T(f+\lambda\cdot g) &\overset{(10.24)}{=} \int_0^1 (f+\lambda\, g)(x)\,dx \\ &\overset{\text{Propriedades de integrais definidas}}{=} \underbrace{\int_0^1 f(x)\,dx}_{\overset{(10.24)}{=}T(f)} + \lambda \underbrace{\int_0^1 g(x)\,dx}_{\overset{(10.24)}{=}T(g)} \\ &= T(f)+\lambda\cdot T(g)\,, \end{aligned}$$

ou seja, a aplicação $\underline{T}$ é um funcional linear em $(C([0,1];\mathbb{R}),+,\cdot)$.

□

Temos também o:

Exemplo 10.25 *Sejam* $\left(C^1([0,1];\mathbb{R}),+,\cdot\right)$ *e* $(C([0,1];\mathbb{R}),+,\cdot)$ *espaços vetoriais reais (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $\mathcal{F}([0,1];\mathbb{R})$*) e* $T: C^1([0,1];\mathbb{R}) \to C([0,1];\mathbb{R})$*, dada por*

$$T(f) \doteq f'\,, \quad \textit{para cada} \quad f \in C^1([0,1];\mathbb{R})\,. \tag{10.26}$$

Mostre que a aplicação $\underline{T}$ *é uma transformação linear de*$\left(C^1([0,1];\mathbb{R}),+,\cdot\right)$ *em* $(C([0,1];\mathbb{R}),+,\cdot)$*, isto é,* $T \in \mathcal{L}\left(C^1([0,1];\mathbb{R});C([0,1];\mathbb{R})\right)$.

Resolução:

Utilizaremos o item 2. da Observação (10.2) para mostrar que a aplicação $\underline{T}$ é uma transformação linear de $C^1([0,1];\mathbb{R})$ em $C([0,1];\mathbb{R})$.

Notemos que, se

$$f,g \in C^1([0,1];\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad \lambda \in \mathbb{R}\,,$$

teremos:

$$T(f+\lambda\cdot g) \stackrel{(10.26)}{=} (f+\lambda\, g)' \stackrel{\text{Propriedades de derivadas}}{=} \underbrace{f'}_{\stackrel{(10.26)}{=} T(f)} + \lambda \underbrace{g'}_{\stackrel{(10.26)}{=} T(g)}$$
$$= T(f) + \lambda\cdot T(g)\,,$$

ou seja, a aplicação T é uma transformaçao linear de $\left(C^1([0\,,1]\,;\mathbb{R})\,,+\,,\cdot\right)$ em $(C([0\,,1]\,;\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$.

□

Os exemplos abaixo são de funções entre espaços vetoriais reais (ou complexos) que **não** são transformações lineares.

Exemplo 10.27 *Sejam* $\left(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot\right)$ *e* $(\mathbb{R}\,,+\,,\cdot)$ *espaços vetoriais reais (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as respectivas operações usuais, respectivamente) e* $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$*, dada por*

$$T(x\,,y\,,z) = x+y+z+1\,, \quad \textit{par cada} \quad (x\,,y\,,z)\in\mathbb{R}^3\,. \tag{10.28}$$

Mostre que a aplicação T **não** *é uma transformação linear de* $\left(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot\right)$ *em* $(\mathbb{R}\,,+\,,\cdot)$.

Resolução:

De fato, notemos que

$$T(0\,,0\,,0) \stackrel{(10.28)}{=} 1 \neq 0\,.$$

Logo, do item 3. da Observação (10.2) segue que a aplicação T **não** é uma transformação linear de $\left(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot\right)$ em $(\mathbb{R}\,,+\,,\cdot)$.

□

Outro caso é dado pelo:

Exemplo 10.29 *Sejam* $(C([0\,,1]\,;\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$ *e* $(\mathbb{R}\,,+\,,\cdot)$ *espaços vetoriais reais (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são operaçoes usuais, respectivamente) e* $T: C([0\,,1]\,;\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ *dada por*

$$T(f) \doteq \int_0^1 |f(x)|\,dx\,, \quad \textit{para cada} \quad f\in C([0\,,1]\,;\mathbb{R})\,.$$

Mostre que a aplicação T *não é uma transformação linear de* $(C([0\,,1]\,;\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$ *e* $(\mathbb{R}\,,+\,,\cdot)$.

Resolução:

Se a aplicação T fosse uma transformação linear, do item 4. da Observaçao (10.2), deveríamos ter

$$T(-f) = -T(f)\,,$$

para toda função $f\in C([0\,,1]\,;\mathbb{R})$.

Para ver que isto não ocorre basta, por exemplo, considerar a função $f:[0\,,1]\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(x)\doteq 1\,, \quad \text{para cada} \quad x\in[0\,,1]\,.$$

Neste caso, teremos:

$$\begin{aligned}
T(-f) &\overset{f(x)=1\,,\ \text{para}\ x\in[0\,,1]}{=} \int_0^1 |-1|\,dx \\
&= 1 \neq -1 \\
&= -\int_0^1 |1|\,dx \\
&= -T(f)\,,
\end{aligned}$$

ou seja, a aplicação $\underline{T}$ **<u>não</u>** é uma transformação linear de $C([0\,,1]\,;\,\mathbb{R})$ em $\mathbb{R}$.

□

Um último caso é dado pelo:

Exemplo 10.30 *Sejam* $(\mathbb{R}\,,+\,,\cdot)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais) e* $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$*, dada por*

$$T(x) \doteq x^2\,, \quad \textit{para cada} \quad x\in\mathbb{R}\,.$$

Mostre que a aplicação $\underline{T}$ *não é um operador linear em* $(\mathbb{R}\,,+\,,\cdot)$.

Resolução:

De fato, observemos que

$$\begin{aligned}
T(-1) &= 1 \\
&= T(1) \\
&\neq -1 \\
&= -T(1)\,.
\end{aligned}$$

Assim, do item 4. da Observação (10.2), segue que a aplicação $\underline{T}$ **<u>não</u>** é um operador linear em $(\mathbb{R}\,,+\,,\cdot)$.

□

Podemos estender o Exemplo (10.30) acima a seguinte situação:

Exemplo 10.31 *Sejam* $n\in\{2\,,3\,,\cdots\}$ *fixado e* $(\mathbb{R}\,,+\,,\cdot)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais) e* $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$*, dada por*

$$T(x) \doteq x^n\,, \quad \textit{para cada} \quad x\in\mathbb{R}\,.$$

Mostre que a aplicação $\underline{T}$ *não é um operador linear em* $(\mathbb{R}\,,+\,,\cdot)$.

Resolução:

Observemos que, se $\underline{n}$ é par ,temos que

$$\begin{aligned}
T(-1) &= 1 \\
&= T(1) \\
&\neq -1 \\
&= -T(1)\,,
\end{aligned}$$

assim, do item 4. da Observação (10.2),, segue que a aplicação $\underline{T}$ **não** é um operador linear em $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

Por outro lado, se $\underline{n}$ é ímpar temos que

$$\begin{aligned} T(1+1) &= T(2) \\ &= 2^n \\ &\overset{n\geq 2}{\neq} 2 \\ &= 1+1 \\ &= T(1)+T(1), \end{aligned}$$

mostrando que a aplicação $\underline{T}$ não satisfaz o item 1. da Definição (10.1), logo não poderá ser um operador linear em $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

$\square$

Um resultado importante é dado pela:

Proposição 10.32 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ $(V, +, \cdot)$ *espaços vetoriais reais (ou complexos), onde o conjunto*

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$$

é uma base de $(U, +, \cdot)$ *e*

$$v_1, v_2, \cdots, v_n \in V.$$

Então, existe uma única $T : U \to V$, *transformação linear de* $(U, +, \cdot)$ *em* $(V, +, \cdot)$, *satisfazendo:*

$$T(u_i) \doteq v_i, \quad \textit{para cada} \quad i \in \{1, 2, \cdots, n\}. \tag{10.33}$$

22.09.2015 - 12.a

Prova:

Dado $u \in U$, como o conjunto $\mathcal{B}$ é uma base de $(U, +, \cdot)$, segue que existem únicos escalares

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ (respectivamente, } \mathbb{C})$$

tais que

$$u = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n. \tag{10.34}$$

Definamos a seguinte aplicação $T : U \to V$, dada por

$$T(u) \doteq \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n. \tag{10.35}$$

Afirmamos que a aplicação $\underline{T}$ é uma transformação linear de $(U, +, \cdot)$ em $(V, +, \cdot)$ e

$$T(u_i) \doteq v_i, \quad \text{para cada} \quad i \in \{1, 2, \cdots, n\}.$$

Comecemos mostrando a validade identidade acima, isto é, (10.33).

Como o conjunto $\mathcal{B}$ é uma base de $(U, +, \cdot)$ e, para cada $i \in \{1, 2, \cdots n\}$, temos que $u_i \in U$, segue que

$$u_i = \underbrace{0}_{\doteq \alpha_1} \cdot u_1 + \cdots + \underbrace{0}_{\doteq \alpha_{i-1}} \cdot u_{i-1} + \underbrace{1}_{\doteq \alpha_i} \cdot u_i + \underbrace{0}_{\doteq \alpha_{i+1}} \cdot u_{i+1} + \cdots + \underbrace{0}_{\doteq \alpha_n} \cdot u_n, \tag{10.36}$$

de modo único.

Logo, para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, de (10.35), segue que:

$$\begin{aligned}
T(u_i) &\doteq \underbrace{\overbrace{0}^{\overset{(10.36)}{=}\alpha_1} \cdot v_1 + \cdots + \overbrace{0}^{\overset{(10.36)}{=}\alpha_{i-1}} \cdot v_{i-1}}_{=O} + \underbrace{\overbrace{1}^{\overset{(10.36)}{=}\alpha_i} \cdot v_i}_{=v_i} + \underbrace{\overbrace{0}^{\overset{(10.36)}{=}\alpha_{i+1}} \cdot v_{i+1} + \cdots + \overbrace{0}^{\overset{(10.36)}{=}\alpha_n} \cdot v_n}_{=O} \\
&= O + v_i + O \\
&= v_i ,
\end{aligned}$$

mostrando que (10.33) ocorre.

Mostremos agora que a aplicação T é uma transformação linear de $(U, +, \cdot)$ em $(V, +, \cdot)$.

Para isto utilizaremos o item 2. da Observação (10.2).

Notemos que, se

$$u, w \in U \quad \text{e} \quad \lambda \in \mathbb{R} \text{ (respectivamente, } \mathbb{C}),$$

então, como o conjunto $\mathcal{B}$ é base de $(U, +, \cdot)$, segue que existem únicos escalares

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n \in \mathbb{R} \text{ (respectivamente, } \mathbb{C}),$$

tais que

$$u = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n \quad \text{e} \quad w = \beta_1 \cdot u_1 + \beta_2 \cdot u_2 + \cdots + \beta_n \cdot u_n. \tag{10.37}$$

Logo

$$\begin{aligned}
u + \lambda \cdot w &\overset{(10.37)}{=} [\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + + \cdots + \alpha_n \cdot u_n] + \lambda \cdot [\beta_1 \cdot u_1 + \beta_2 \cdot u_2 + \cdots + \beta_n \cdot u_n] \\
&\overset{\text{Propriedades de espaço vetorial}}{=} (\alpha_1 + \lambda\,\beta_1) \cdot u_1 + (\alpha_2 + \lambda\,\beta_2) \cdot u_2 + \cdots + (\alpha_n + \lambda\,\beta_n) \cdot u_n .
\end{aligned} \tag{10.38}$$

Logo da definição da aplicação T (isto é, de (10.35)) segue que

$$\begin{aligned}
T(u + \lambda \cdot w) &\overset{(10.38) \text{ e } (10.35)}{=} (\alpha_1 + \lambda\,\beta_1) \cdot v_1 + (\alpha_2 + \lambda\,\beta_2) \cdot v_2 + \cdots + (\alpha_n + \lambda\,\beta_n) \cdot v_n \\
&\overset{\text{Propriedades de espaço vetroial}}{=} \underbrace{[\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n]}_{=T(u)} + \lambda \cdot \underbrace{[\beta_1 \cdot v_1 + \beta_2 \cdot v_2 + \cdots + \beta_n \cdot v_n]}_{=T(w)} \\
&\overset{(10.38) \text{ e } (10.35)}{=} T(u) + \lambda \cdot T(w) ,
\end{aligned}$$

mostrando que a aplicação T é uma transformação linear de $(U, +, \cdot)$ em $(V, +, \cdot)$.

Finalmente, mostremos a unicidade, ou seja, se S e T são transformações lineares de $(U, +, \cdot)$ em $(V, +, \cdot)$, tais que

$$T(u_i) = v_i = S(u_i) , \quad \text{para cada} \quad i \in \{1, 2, \cdots, n\}, \tag{10.39}$$

então deveremos ter

$$S = T .$$

Para isto, basta ver que se $u \in U$, como o conjunto $\mathcal{B}$ é uma base de $(U\,,+\,,\cdot)$, segue que existem únicos escalares

$$\alpha_1\,,\alpha_2\,,\cdots\,,\alpha_n \in \mathbb{R} \text{ (respectivamente, } \mathbb{C})\,,$$

tais que

$$u = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n\,. \tag{10.40}$$

Logo

$$\begin{aligned} S(u) &\overset{(10.40)}{=} S(\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n) \\ &\overset{S \text{ é transformação linear}}{=} \alpha_1 \cdot S(u_1) + \cdots + \alpha_n \cdot S(u_n) \\ &\overset{(10.39)}{=} \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n \\ &\overset{(10.35)}{=} T(u)\,, \end{aligned}$$

ou seja,

$$S(u) = T(u)\,, \quad \text{para cada} \quad u \in U\,,$$

isto é,

$$S = T\,,$$

completando a demonstração do resultado.

∎

Observação 10.41 *A Proposição (10.32) acima nos diz, em particular, que uma transformação linear, definida em um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) de dimensão finita, fica completa e unicamente determinada conhecendo-se os seus valores em uma base do espaço vetorial real (respectivamente, complexo) do domínio da transformação.*

Apliquemos isto ao:

Exemplo 10.42 *Seja $(\mathbb{R}^2\,,+\,,\cdot)$ espaço vetorial real (onde $+$ e $\cdot$ são as operações usuais dde adição de pares e multiplicação de número real por par, respectivamente).*

Encontre um operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que

$$T[(1\,,2)] = (3\,,-1) \quad e \quad T[(0\,,1)] = (1\,,2)\,. \tag{10.43}$$

Resolução:

Notemos que o conjunto

$$\mathcal{B} \doteq \{\underbrace{(1\,,2)}_{\doteq u_1}\,,\underbrace{(0\,,1)}_{\doteq u_2}\} \tag{10.44}$$

é uma base de $(\mathbb{R}^2\,,+\,,\cdot)$, pois é L.I. em $(\mathbb{R}^2\,,+\,,\cdot)$.

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Logo, se

$$(x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,,$$

podemos escrevê-lo como combinação linear dos vetores da base $\mathcal{B}$, isto é, existem

$$\alpha\,,\beta \in \mathbb{R}\,,$$

tais que

$$\begin{aligned}
u &= (x\,,y) \\
&= \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha . u_2\,, \\
&\stackrel{(10.44)}{=} \alpha_1 \cdot (1\,,2) + \alpha_2 \cdot (0\,,1) \\
&= (\alpha_1\,,2\,\alpha_1 + \alpha_2)\,,
\end{aligned}$$

$$\text{isto é,} \quad \begin{cases} x = \alpha_1 \\ y = 2\,\alpha_1 + \alpha_2 \end{cases}\,,$$

$$\text{ou ainda,} \quad \begin{cases} \alpha_1 = x \\ \alpha_2 = y - 2\,x \end{cases}. \tag{10.45}$$

Com isto, teremos:

$$\begin{aligned}
u &= (x\,,y) \\
&= \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 \\
&\stackrel{(10.45)}{=} x \cdot (1\,,2) + (y - 2\,x) \cdot (0\,,1)\,, \quad \text{para cada} \quad x\,,y \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned} \tag{10.46}$$

Deste modo, o operador linear $\underline{T}$ deverá satisfazer:

$$\begin{aligned}
T(x\,,y) &\stackrel{(10.46)}{=} \underbrace{T[x \cdot (1\,,2) + (y - 2\,x) \cdot (0\,,1)]}_{T(\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2)]} \\
&\stackrel{\text{T é operador linear}}{=} \overbrace{x \cdot \underbrace{T[(1\,,2)]}_{\stackrel{(10.43)}{=}(3\,,-1)} + (y - 2\,x) \cdot \underbrace{T[(0\,,1)]}_{\stackrel{(10.43)}{=}(1\,,2)}}^{=\alpha_1 \cdot \overbrace{T(u_1)}^{=v_1} + \alpha_2 \cdot \overbrace{T(u_2)}^{=v_2}} \\
&= x \cdot (3\,,-1) + (y - 2\,x) \cdot (1\,,2) \\
&= (x + y\,,2\,y - 5\,x)\,, \quad \text{para cada} \quad (x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,,
\end{aligned}$$

ou seja, o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ procurado, será dado por:

$$T(x\,,y) = (x + y\,,2\,y - 5\,x)\,, \quad \text{para cada} \quad (x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,. \tag{10.47}$$

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação que a aplicação $\underline{T}$, definida por (10.47) é um operador linear em $\left(\mathbb{R}^2\,,+\,,\cdot\right)$ e satisfaz (10.43).

$\square$

10.2 O Espaço Vetorial $\mathcal{L}(U\,;\,V)$

Observação 10.48

1. *Sejam* $(U\,,+\,,\cdot)$ *e* $(V\,,+\,,\cdot)$ *espaços vetoriais reais (ou complexos).*

   Como vimos nos itens 6. e 7. da Observação (10.2), o conjunto formado por todas as transformações lineares $T : U \to V$ *é denotado por*
   $$\mathcal{L}(U\,;\,V)$$
   e quando
   $$U = V\,,$$
   usaremos a notação
   $$\mathcal{L}(U) \doteq \mathcal{L}(U\,;\,U)\,.$$

2. *Dadas* $T\,,S \in \mathcal{L}(U\,;\,V)$*, definimos a aplicação* $(T+S) : U \to V$ *como sendo dada por*
   $$(T+S)(u) \doteq T(u) + S(u)\,, \quad \textit{para cada} \quad u \in U\,. \tag{10.49}$$
   Na situação acima, afirmamos que
   $$(T+S) \in \mathcal{L}(U\,;\,V)\,.$$
   De fato, se
   $$u\,,v \in U \quad e \quad \lambda \in \mathbb{R} \textit{ (respectivamente, } \mathbb{C})\,,$$
   teremos:
   $$\begin{aligned}(T+S)(u+\lambda\cdot v) &\overset{(10.49)}{=} \underbrace{T(u+\lambda\cdot v)}_{\overset{T\in\mathcal{L}(U,V)}{=} T(u)+\lambda\cdot T(v)} + \underbrace{S(u+\lambda\cdot v)}_{\overset{S\in\mathcal{L}(U,V)}{=} S(u)+\lambda\cdot S(v)} \\ &= [T(u) + \lambda\cdot T(v)] + [S(u) + \lambda\cdot S(v)] \\ &\overset{\textit{propriedade de espaço vetorial}}{=} [T(u) + S(u)] + \lambda\cdot[T(v) + S(v)] \\ &\overset{(10.49)}{=} (T+S)(u) + \lambda\cdot[(T+S)(v)]\,.\end{aligned}$$
   Logo, do item 2. da Observação (10.2), segue que a aplicação $(T+S)$ *é uma transformação linear de* $(U\,,+\,,\cdot)$ *em* $(V\,,+\,,\cdot)$*, ou seja,* $(T+S) \in \mathcal{L}(U\,;\,V)$*, como queríamos mostrar.*

3. *Se* $T \in \mathcal{L}(U\,;\,V)$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$ *(respectivamente,* $\mathbb{C}$*), definiremos a aplicação* $\lambda\cdot T : U \to V$*, dada por*
   $$(\lambda\cdot T)(u) \doteq \lambda\cdot T(u)\,, \quad \textit{para cada} \quad u \in U\,. \tag{10.50}$$
   Na situação acima, afirmamos que
   $$(\lambda\cdot T) \in \mathcal{L}(U\,;\,V)\,.$$

De fato, se

$$u\,,v \in U \quad e \quad \beta \in \mathbb{R} \text{ (respectivamente, } \mathbb{C}\text{)},$$

segue que:

$$\begin{aligned}
(\lambda \cdot T)(u + \lambda \cdot v) &\overset{(10.50)}{=} \lambda \cdot T(u + \beta \cdot v) \\
&\overset{T\in\mathcal{L}(U\,;\,V)}{=} \lambda \cdot [T(u) + \beta \cdot T(v)] \\
&\overset{\text{propriedade de espaço vetorial}}{=} \lambda \cdot T(u) + \beta \cdot [\lambda \cdot T(v)] \\
&\overset{(10.50)}{=} (\lambda \cdot T)(u) + \beta \cdot [(\lambda \cdot T)(v)]\,. \qquad (10.51)
\end{aligned}$$

Logo, do item 2. da Observação (10.2), segue que $\lambda \cdot T$ é uma transformação linear de $(U\,,+\,,\cdot)$ em $(V\,,+\,,\cdot)$, ou seja, $(\lambda \cdot T) \in \mathcal{L}(U\,;\,V)$, como queríamos mostrar.

4. *Dos itens 2. e 3. acima, segue que*

$$(\mathcal{L}(U\,;\,V)\,,+\,,\cdot)$$

será um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) (onde $+$ e $\cdot$ são as operações introduzidas nos itens 2. e 3. acima).

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

5. *Notemos que o vetor nulo de $\mathcal{L}(U\,;\,V)$, será a transformação linear nula, isto é, $O : U \to V$ dada por*

$$O(u) \doteq O\,, \quad \text{para cada} \quad u \in U\,.$$

Além disso, se $T \in \mathcal{L}(U\,;\,V)$, o vetor oposto de $\underline{T}$, será a transformação linear $-T : U \to V$ dada por

$$(-T)(u) \doteq -T(u)\,, \quad \text{para cada} \quad u \in U\,.$$

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Registraremos isto tudo na:

Proposição 10.52 *$(\mathcal{L}(U\,;\,V)\,,+\,,\cdot)$ (onde $+$ e $\cdot$ são as operações introduzidas nos itens 2. e 3. da Observação (10.48) acima) é um espaço vetorial real (respectivamente, complexo).*

Prova:

Veja o item 4. da Observação (10.48) acima.

∎

Definição 10.53 *Seja $(U\,,+\,,\cdot)$ é um espaço vetorial real (respectivamente, complexo).*

Definimos o **espaço dual (algébrico) de U**, *que será denotado por U' (veja o item 8. a Observação (10.2)), como sendo*

$$U' \doteq \mathcal{L}(U\,;\,\mathbb{R}) \quad (ou \quad \mathcal{L}(U\,;\,\mathbb{C}))\,, \qquad (10.54)$$

isto é, U' é o conjunto formado por todos os funcionais lineares definidos em $(U\,,+\,,\cdot)$.

Com isto temos a:

Teorema 10.55 *Seja* $(U, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) de dimensão* $\underline{n}$ *e* $(V, +, \cdot)$ *é um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) de dimensão* $\underline{m}$.

Então, o espaço vetorial real (respectivamente, complexo) $(\mathcal{L}(U; V), +, \cdot)$ *tem dimensão* $m\,n$, *ou seja, se*

$$\dim(U) = n \quad e \quad \dim(V) = m\,,$$

então

$$\dim\left[\mathcal{L}(U; V)\right] = m\,n\,.$$

Prova:

Sejam

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1\,, u_2\,, \cdots, u_n\}$$

uma base (ordenada) do espaço vetorial real (respectivamente, complexo) $(U, +, \cdot)$ e

$$\mathcal{C} \doteq \{v_1\,, v_2\,, \cdots, v_m\}$$

uma base (ordenada) do espaço vetorial real (respectivamente, complexo) $(V, +, \cdot)$.

Para cada

$$i \in \{1\,, 2\,, \cdots, n\} \quad \text{e} \quad j \in \{1\,, 2\,, \cdots, m\}\,,$$

definamos a aplicação

$$T_{ij} : U \to V\,,$$

da seguinte maneira: se $u \in U$, como o conjunto $\mathcal{B}$ é uma base (ordenada) para $(U, +, \cdot)$, segue que existem únicos escalares

$$x_1\,, x_2\,, \cdots, x_n \in \mathbb{R} \text{ (respectivamente, } \mathbb{C})\,,$$

tais que

$$u = x_1 \cdot u_1 + x_2 \cdot u_2 + \cdots + x_i \cdot u_i + \cdots + x_n \cdot u_n\,. \tag{10.56}$$

Com isto, definiremos

$$T_{ij}(u) \doteq x_i \cdot v_j\,, \tag{10.57}$$

ou seja, de (10.56), temos que

$$T_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot u_k\right) \doteq x_i \cdot v_j\,. \tag{10.58}$$

Notemos que, para cada $k \in \{1\,, 2\,, \cdots, n\}$, teremos:

$$\begin{aligned} T_{ij}(u_k) &= T_{ij}\left(0 \cdot u_1 + \cdots + 0 \cdot u_{k-1} + 1 \cdot u_k + 0 \cdot u_{k+1} + \cdots + 0 \cdot u_n\right) \\ &\overset{(10.57) \text{ com } u = u_k}{=} \begin{cases} v_j\,, & \text{se} \quad i = k \\ O\,, & \text{se} \quad i \neq k \end{cases}\,. \end{aligned} \tag{10.59}$$

Afirmamos que, para cada

$$i \in \{1, 2, \cdots, n\} \quad \text{e} \quad j \in \{1, 2, \cdots, m\},$$

teremos

$$T_{ij} \in \mathcal{L}(U;V).$$

De fato, se

$$u, v \in U,$$

como o conjunto $\mathcal{B}$ é uma base (ordenada) para $(U, +, \cdot)$, segue que existem únicos escalares

$$x_1 x_2,, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_n \in \mathbb{R} \text{ (respectivamente, } \mathbb{C}),$$

tais que

$$u = x_1 \cdot u_1 + x_2 \cdot u_2 + \cdots + x_n \cdot u_n \quad \text{e} \quad v = y_1 \cdot u_1 + y_2 \cdot u_2 + \cdots + y_n \cdot u_n. \tag{10.60}$$

Logo, das propriedades de espaços vetoriais, segue que

$$\begin{aligned} u + \lambda \cdot v &= [x_1 \cdot u_1 + \cdots + x_n \cdot u_n] + \lambda \cdot [y_1 \cdot u_1 + \cdots + y_n \cdot u_n] \\ &= (x_1 + \lambda y_1) \cdot u_1 + \cdots + (x_n + \lambda y_n) \cdot u_n. \end{aligned} \tag{10.61}$$

Assim teremos:

$$\begin{aligned} T(u + \lambda \cdot v) &\overset{(10.61)}{=} T_{ij}[(x_1 + \lambda y_1) \cdot u_1 + \cdots + (x_i + \lambda y_i) \cdot u_i + \cdots + (x_n + \lambda y_n) \cdot u_n] \\ &\overset{(10.57)}{=} (x_i + \lambda y_i) \cdot v_j = \underbrace{x_i \cdot v_j}_{\overset{(10.57)}{=} T_{ij}(x_1 \cdot u_1 + \cdots + x_i \cdot u_i + \cdots + x_n \cdot u_n)} + \lambda \cdot (\underbrace{y_i \cdot v_j}_{\overset{(10.57)}{=} T_{ij}(y_1 \cdot u_1 + \cdots + y_i \cdot u_i + \cdots + y_n \cdot u_n)}) \\ &= T_{ij}(x_1 \cdot u_1 + \cdots + x_i \cdot u_i + \cdots + x_n \cdot u_n) \\ &\quad + \lambda \cdot T_{ij}(y_1 \cdot u_1 + \cdots + y_i \cdot u_i + \cdots + y_n \cdot u_n) \\ &\overset{(10.60)}{=} T_{ij}(u) + \lambda \cdot T_{ij}(v) \end{aligned} \tag{10.62}$$

Logo, de (10.62) e do item 2. da Observação (10.2), segue que

$$T_{ij} \in \mathcal{L}(U;V), \quad \text{para cada} \quad i \in \{1, 2, \cdots, n\} \text{ e } j \in \{1, 2, \cdots, m\}.$$

Mostremos que o conjunto

$$\mathcal{D} \doteq \{T_{ij}; \text{ para } i \in \{1, 2, \cdots, n\} \text{ e } j \in \{1, 2, \cdots, m\}\} \tag{10.63}$$

é uma base do espaço vetorial real (respectivamente, complexo) $(\mathcal{L}(U;V), +, \cdot)$.

Para isto mostremos, primeiramente, que o conjunto $\mathcal{D}$ é L.I. em $(\mathcal{L}(U;V), +, \cdot)$.

De fato, se

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot T_{ij} = O \in \mathcal{L}(U;V) \tag{10.64}$$

então, para cada

$$k \in \{1, 2, \cdots, n\},$$

segue que

$$\begin{aligned} O &= O(u_k) \\ &\overset{(10.64)}{=} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \cdot T_{ij}(u_k) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot \underbrace{T_{ij}(u_k)}_{\overset{[10.59]}{=} O \text{, se } i \neq k} \\ &= \sum_{j=1}^{m} a_{kj} \cdot \underbrace{T_{kj}(u_k)}_{\overset{[10.59]}{=} v_j} \\ &= \sum_{j=1}^{m} a_{kj} \cdot v_j \,. \end{aligned} \tag{10.65}$$

Como os vetores

$$v_1, v_2, \cdots, v_m$$

são L.I. em $(V, +, \cdot)$ (pois o conjunto $\mathcal{C}$ é uma base de $(V, +, \cdot)$), segue-se que

$$a_{k1} = \cdots = a_{km} = 0,$$

para cada $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$, ou seja,

$$a_{ij} = 0, \quad \text{para cada} \quad i \in \{1, 2, \cdots, n\} \quad \text{e} \quad j \in \{1, 2, \cdots, m\}\},$$

mostrando que o conjunto $\mathcal{D}$, dado por (10.63), é um conjunto L.I. em $(\mathcal{L}(U; V), +, \cdot)$.

Mostremos agora que

$$[\mathcal{D}] = \mathcal{L}(U; , V).$$

De fato, se

$$T \in \mathcal{L}(U; V),$$

para cada $u \in U$, como o conjunto $\mathcal{B}$ é uma base de $(U, +, \cdot)$, segue que existem únicos escalares

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R} \text{ (respectivamente, } \mathbb{C}),$$

tais que

$$u = x_1 \cdot u_1 + x_2 \cdot u_2 + \cdots + x_n \cdot u_n \,. \tag{10.66}$$

Como a aplicação T é uma transformação linear de $(U, +, \cdot)$ em $(V, +, \cdot)$, segue que

$$\begin{aligned} T(u) &\overset{(10.66)}{=} T(x_1 \cdot u_1 + \cdots + x_n \cdot u_n) \\ &\overset{T \in \mathcal{L}(U, V)}{=} x_1 \cdot T(u_1) + \cdots + x_n \cdot T(u_n) \,. \end{aligned} \tag{10.67}$$

Como

$$T(u_i) \in V$$

e o conjunto $\mathcal{C}$ é base de $(V\,,+\,,\cdot)$, para cada

$$i \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}\,,$$

existem únicos escalares

$$\alpha_{ji} \in \mathbb{R}\ (\text{respectivamente, } \mathbb{C})\,, \quad \text{para} \quad j \in \{1\,,2\,,\cdots\,,m\}\,,$$

tais que

$$T(u_i) = \alpha_{1i}\cdot v_1 + \alpha_{2i}\cdot v_2 + \cdots + \alpha_{mi}\cdot v_m\,. \tag{10.68}$$

Lembremos que, para cada

$$i \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\} \quad \text{e} \quad j \in \{1\,,2\,,\cdots\,,m\}\,,$$

de (10.57), temos que

$$T_{ij}(u) = x_i \cdot v_j\,.$$

Logo, para cada $u \in U$, de (10.67), (10.68) e (10.59), obteremos

$$\begin{aligned}
T(u) &\overset{(10.67)}{=} x_1\cdot T(u_1) + \cdots + x_n\cdot T(u_n)\\
&\overset{(10.68)}{=} x_1\cdot(\alpha_{11}\cdot v_1 + \cdots + \alpha_{m1}\cdot v_m) + \cdots + x_n\cdot(\alpha_{1n}\cdot v_1 + \cdots + \alpha_{mn}\cdot v_m)\\
&= \alpha_{11}\cdot(x_1\cdot v_1) + \cdots + \alpha_{m1}\cdot(x_1\cdot v_m) + \cdots + \alpha_{1n}\cdot(x_n\cdot v_1) + \cdots + \alpha_{mn}\cdot(x_n\cdot v_m)\\
&\overset{(10.59)}{=} \alpha_{11}\cdot T_{11}(u) + \cdots + \alpha_{m1}\cdot T_{1m}(u) + \cdots + \alpha_{1n}\cdot T_{n1}(u) + \cdots + \alpha_{mn}\cdot T_{nm}(u)\,,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$T = \alpha_{11}\cdot T_{11} + \cdots + \alpha_{m1}\cdot T_{1m} + \cdots + \alpha_{1n}\cdot T_{1n} + \cdots + \alpha_{mn}\cdot T_{nm}\,,$$

mostrando que $T \in \mathcal{L}(U\,;\,V)$, pode ser escrito como combinação linear dos elementos do conjunto $\mathcal{D}$, isto é, o conjunto $\mathcal{D}$, dado por (10.63), gera $\mathcal{L}(U\,;\,V)$.

Portanto o conjunto $\mathcal{D}$, dado por (10.63), é uma base do espaço vetorial real (respectivamente, complexo) $(\mathcal{L}(U\,;\,V),+,\cdot)$ e como o número de elementos da base $\mathcal{D}$, dado por (10.63), é $\underline{m\,n}$, segue que

$$\dim[\mathcal{L}(U\,;\,V)] = m\,n\,,$$

finalizando a demonstração do resultado.

∎

Como consequência temos o:

Corolário 10.69 *Seja* $(U\,,+\,,\cdot)$ *um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) de dimensão* $\underline{n}$.

Então o espaço dual de $(U\,,+\,,\cdot)$ *terá dimensão* $\underline{n}$, *isto é,*

$$\dim(U') = n\,. \tag{10.70}$$

Prova:

De fato, como

$$U' = \mathcal{L}(U\,;\,\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad \dim(\mathbb{R}) = 1 \ (\doteq m)\,,$$

segue, do Teorema (10.55) acima, que

$$\begin{aligned}\dim(U') &\overset{m=1}{=} n \cdot 1 \\ &= n\,,\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

∎

Observação 10.71

1. *A base $\mathcal{D}$, dado por* (10.63)*, obtida na demonstração do Teorema* (10.55) *acima, será denominada* <u>**base de $\mathcal{L}(U\,;\,V)$, associada às bases(ordenadas) $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$**</u> *de* $(U\,,+\,,\cdot)$ *e* $(V\,,+\,,\cdot)$*, respectivamente.*

2. *Pelo Corolário (10.69), se o espaço vetorial real (respectivamente, complexo)* $(U\,,+\,,\cdot)$ *tem dimensão finita, então o seu espaço dual,* U'*, terá a mesma dimensão.*

3. *Na situação acima, seguindo os passos da demonstração do Teorema (10.55), se o conjunto*

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_n\}$$

é uma base (ordenada) de $(U\,,+\,,\cdot)$ *e o conjunto*

$$\mathcal{C} \doteq \{1\}$$

é base uma base de $(\mathbb{R}\,,+\,,\cdot)$*, então os funcionais lineares* $T_1\,,T_2\,,\cdots\,,T_n : U \to \mathbb{R}$ *(veja* (10.57)*) onde, para cada*

$$j \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}\,,$$

o funcional linear $T_j : U \to \mathbb{R}$*, é dado por*

$$\begin{aligned}T_j(u) &= T_j(x_1 \cdot u_1 + \cdots + x_n \cdot u_n) \\ &\doteq x_j\,,\end{aligned} \tag{10.72}$$

onde

$$u = x_1 \cdot u_1 + x_2 \cdot u_2 + \cdots + x_n \cdot u_n \in U$$

formarão uma base de $(U'\,,+\,,\cdot)$*.*

Esta base é chamada de <u>base dual</u>*, associada às bases (ordenadas)* $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{C}$ *de* $(U\,,+\,,\cdot)$ *e* $(\mathbb{R},+,\cdot)$*, respectivamente.*

Exemplo 10.73 *Sejam* $\left(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot\right)$ *e* $(\mathbb{R}\,,+\,,\cdot)$ *espaços vetoriais reais (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $\mathbb{R}^3$ *e* $\mathbb{R}$*, respectivamente).*

Considere a base $\mathcal{B}$ *(ordenada) de* $\left(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot\right)$*, formada pelos vetores*

$$u_1 \doteq (1\,,1\,,1)\,,\quad u_2 \doteq (1\,,1\,,0)\,,\quad u_3 \doteq (1\,,0\,,0)$$

e

$$\mathcal{C} = \{v_1\} \doteq \{1\}\,,$$

base de $(\mathbb{R}\,,+\,,\cdot)$.

Encontre a base para o espaço dual de $\left(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot\right)$*, associada às bases* $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{C}$ *de* $\left(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot\right)$ *e* $(\mathbb{R}\,,+\,,\cdot)$*, respectivamente.*

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação que o conjunto $\mathcal{B}$ é uma base de $\left(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot\right)$.

Utilizaremos as idéias do item 2. da Observação (10.71) acima.

Observemos que se

$$(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,,$$

como o conjunto $\mathcal{B}$ é uma base (ordenada) de $\left(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot\right)$, segue que existem escalares únicos

$$x_1\,,x_2\,,x_3 \in \mathbb{R}\,,$$

tais que

$$\begin{aligned} u &= (x\,,y\,,z) \\ &= x_1 \cdot \underbrace{u_1}_{=(1\,,1\,,1)} + x_2 \cdot \underbrace{u_2}_{=(1\,,1\,,0)} + x_3 \cdot \underbrace{u_3}_{=(1\,,0\,,0)} \\ &= x_1 \cdot (1\,,1\,,1) + x_2 \cdot (1\,,1\,,0) + x_3 \cdot (1\,,0\,,0) \\ &= (x_1 + x_2 + x_3\,, x_1 + x_2\,, x_1)\,, \end{aligned}$$

$$\text{ou seja (Exercício),}\qquad x_1 = z\,,\quad x_2 = y - z\,,\quad x_3 = x - y\,. \tag{10.74}$$

Portanto

$$\begin{aligned} u &= (x\,,y\,,z) \\ &\overset{(10.74)}{=} z \cdot u_1 + (y - z) \cdot u_2 + (x - y) \cdot u_3 \\ &= z \cdot (1\,,1\,,1) + (y - z) \cdot (1\,,1\,,0) + (x - y) \cdot (1\,,0\,,0). \end{aligned} \tag{10.75}$$

Lembremos que, de (10.72), segue que os funcionais lineares que formarão a base dual, associada às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, que indicaremos por

$$T_j : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\,,\quad \text{para}\quad j \in \{1\,,2\,,3\},$$

serão dadas por:

$$T_j(u) \doteq x_j\,,\quad \text{onde}\quad u = x_1 \cdot u_1 + x_2 \cdot u_2 + x_3 \cdot u_3\,. \tag{10.76}$$

Deste modo, vimos (veja demonstração do Teorema (10.55)) que uma base, que indicaremos por $\mathcal{D}$, para o espaço dual de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, associada às base $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, será formada pelos funcionais lineares $T_1, T_2, T_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dados por

$$\begin{aligned}
T_1(x, y, z) &\overset{(10.75)}{=} T_1[\underbrace{z \cdot (1,1,1)}_{=x_1 \cdot u_1} + (y-z) \cdot (1,1,0) + (x-y) \cdot (1,0,0)] \\
&\overset{(10.76)}{=} x_1 \\
&\overset{(10.74)}{=} z, \\
T_2(x, y, z) &\overset{(10.75)}{=} T_2[z \cdot (1,1,1) + \underbrace{(y-z) \cdot (1,1,0)}_{=x_2 \cdot u_2} + (x-y) \cdot (1,0,0)] \\
&\overset{(10.76)}{=} x_2 \\
&\overset{(10.74)}{=} y - z, \\
T_3(x, y, z) &\overset{(10.75)}{=} T_3[z \cdot (1,1,1) + (y-z) \cdot (1,1,0) + \underbrace{(x-y) \cdot (1,0,0)}_{=(x-y) \cdot u_3}] \\
&\overset{(10.76)}{=} x_3 \\
&\overset{(10.74)}{=} x - y,
\end{aligned}$$

para cada $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, ou seja,

$$\begin{aligned}
T_1(x, y, z) &\doteq z, \\
T_2(x, y, z) &\doteq y - z \\
T_3(x, y, z) &\doteq x - y, \quad \text{para cada} \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.
\end{aligned} \tag{10.77}$$

<u>Conclusão:</u> todo funcional linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ pode ser escrito, de modo único, como combinação linear dos funcionais lineares $T_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, para $i \in \{1, 2, 3\}$, dados por (10.77).

□

Até aqui para a 1.a Prova

29.09.2015 - 14.a - 1.a Prova

1.10.2015 - 15.a

Temos também a:

Proposição 10.78 *Sejam* $(U, +, \cdot), (V, +, \cdot)$ *e* $(W, +, \cdot)$ *espaços vetoriais reais (ou complexos).*

Se $T \in \mathcal{L}(U; V)$ *e* $S \in \mathcal{L}(V; W)$ *então*

$$(S \circ T) \in \mathcal{L}(U; W).$$

Prova:

De fato, dados

$$u, v \in U \quad \text{e} \quad \lambda \in \mathbb{R} \text{ (respectivamente, } \mathbb{C}),$$

temos que:

$$
\begin{aligned}
(S\circ T)(u+\lambda\cdot v) &= S[T(u+\lambda\cdot v)] \\
&\overset{T \text{ é transformação linear}}{=} S[T(u)+\lambda\cdot T(v)] \\
&\overset{S \text{ é transformação linear}}{=} S[T(u)]+\lambda\cdot S[T(v)] \\
&= (S\circ T)(u)+\lambda\cdot[(S\circ T)(v)]\,,
\end{aligned}
$$

Logo, do item 2. da Observação (10.2), segue que

$$(S\circ T)\in\mathcal{L}(U\,;\,W)\,,$$

como queríamos demonstrar.

∎

Observação 10.79 *Em resumo, o resultado acima nos diz que a composta de transformações lineares será uma transformação linear.*

O resultado a seguir é um fato básico de funções em geral, que nos diz que a operação de composição é associativa, mais precisamente:

Proposição 10.80 *Sejam* $U\,,V\,,W$ *e* X *são conjuntos não vazios e* $T:U\to V$, $S:V\to W$ *e* $R:W\to X$ *funções.*

Então

$$(R\circ S)\circ T = R\circ(S\circ T). \tag{10.81}$$

Prova:

Notemos que, para cada $u\in U$, temos:

$$
\begin{aligned}
[(R\circ S)\circ T](u) &= (R\circ S)[T(u)] \\
&= R\{S[T(u)]\}\,.
\end{aligned} \tag{10.82}
$$

Por outro lado, temos que

$$
\begin{aligned}
[R\circ(S\circ T)](u) &= R\{[S\circ T](u)\} \\
&= R\{S[T(u)]\}\,.
\end{aligned} \tag{10.83}
$$

Logo, de (10.82) e (10.83), segue a identidade (10.81), completando a demonstração do resultado.

∎

Temos também a:

Proposição 10.84 *Sejam* U *um conjunto não vazio,* $(V\,,+\,,\cdot)$, $(W\,,+\,,\cdot)$ *espaços vetoriais reais (ou complexos) e* $S\,,T:U\to V$ *funções e* $R\in\mathcal{L}(V\,;\,,W)$ *.*

Então

$$R\circ(S+T) = R\circ S + R\circ T\,. \tag{10.85}$$

Prova:

Notemos que, para cada $u \in U$, temos

$$\begin{aligned}
[R \circ (S + T)](u) &= R[(S + T)(u)] \\
&= R[S(u) + T(u)] \\
&\overset{\text{R é transformação linear}}{=} R[S(u)] + R[T(u)] \\
&= [R \circ S](u) + [R \circ T](u) \\
&= [R \circ S + R \circ T](u),
\end{aligned}$$

completando a demonstração do resultado.

∎

Com isto segue a:

Proposição 10.86 *Sejam* $(U, +, \cdot), (V, +, \cdot)$ *espaços vetoriais reais (ou complexos).*

Se $T \in \mathcal{L}(U; V)$ *e* $I_V \in \mathcal{L}(V)$ *é o operador linear identidade em* $(V, +, \cdot)$*, isto é,*

$$I_V(v) \doteq v, \quad \textit{para cada} \quad v \in V \tag{10.87}$$

e $I_U \in \mathcal{L}(U)$ *é o operador linear identidade em* $(U, +, \cdot)$*, isto é,*

$$I_U(u) \doteq u, \quad \textit{para cada} \quad u \in U, \tag{10.88}$$

então

$$I_V \circ T = T \quad e \quad T \circ I_U = T. \tag{10.89}$$

Prova:

Notemos que, para cada $u \in U$, temos

$$\begin{aligned}
(I_V \circ T)(u) &= I_V[T(u)] \\
&\overset{(10.87)}{=} T(u), \\
[T \circ I_U](u) &= T[I_U(u)] \\
&\overset{(10.88)}{=} T(u),
\end{aligned}$$

completando a demonstração do resultado.

∎

Como aplicação destes resultados temos o:

Exemplo 10.90 *Seja* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *espaço vetorial real (onde + e · são as operações usuais de soma de pares e multiplicação de número real por par, respectivamente).*

Mostre que $T, S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$*, onde* $T, S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *são dadas por:*

$$T(x, y) \doteq (x + y, 0) \tag{10.91}$$

$$e$$

$$S(x, y) \doteq (x, 2y), \tag{10.92}$$

para cada$(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Encontre

$$T \circ S \quad e \quad S \circ T.$$

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação que

$$T\,,S \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2\right) .$$

Notemos que, para cada $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$, temos que

$$\begin{aligned}
(T \circ S)(x\,,y) &= T[S(x\,,y) \\
&\stackrel{(10.92)}{=} T(x\,,2\,y) \\
&\stackrel{(10.91)}{=} (x + 2\,y\,,0)\,, \\
(S \circ T)(x\,,y) &= S[T(x\,,y)] \\
&\stackrel{(10.91)}{=} S(x + y\,,0) \\
&\stackrel{(10.92)}{=} (x + y\,,0)\,,
\end{aligned}$$

completando a resolução

□

Observação 10.93 *Observemos que, neste caso, teremos:*

$$T \circ S \neq S \circ T\,.$$

Podemos agora introduzir as:

Definição 10.94 *Seja $(U\,,+\,,\cdot)$ espaço vetorial real (respectivamente, complexo).*

Se $T \in \mathcal{L}(U)$, definiremos

$$T^0 \doteq I_U\,, \quad T^1 \doteq T \quad e \quad T^n \doteq T \circ T^{n-1},$$

para $n \in \{2\,,3\,,\cdots\}$, onde $I_U : U \to U$ é o operador linear identidade em $(U\,,+\,,\cdot)$, isto é,

$$I_U(u) \doteq u\,, \quad \textit{para cada} \quad u \in U\,.$$

Com isto podemos introduzir a:

Definição 10.95 *Seja $(U\,,+\,,\cdot)$ espaço vetorial real (respectivamente, complexo).*

Um operador linear $T \in \mathcal{L}(U)$ será dito **nilpotente** *, se existir $n \in \mathbb{N}$, de modo que*

$$T^n = O \in \mathcal{L}(U)\,, \tag{10.96}$$

isto é, o operador linear T^n será o operador linear nulo em $(U\,,+\,,\cdot)$.

Observação 10.97 *Um exemplo simples de operador nilpotente, definido em um espaço vetorial real (respectivamente, complexo), é o operador linear nulo.*

A verificação deste fato é imediata.

A seguir exibiremos um exemplo, não trivial, de um operador linerar nulo, definido um espaço vetorial real, a saber:

Exemplo 10.98 *Seja* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais soma de pares ordenados e multiplicação de número real por par ordenado, respectivamente).*

Mostre que a aplicação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*, dada por*

$$T(x, y) \doteq (0, x), \quad \textit{para cada} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \tag{10.99}$$

é um operador linear nilpotente em $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$*.*

Resolução:

Observemos que, para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, teremos

$$\begin{aligned} T^2(x, y) &= T[T(x, y)] \\ &\overset{(10.99)}{=} T(0, x) \\ &\overset{(10.99)}{=} (0, 0), \\ \text{assim,} \qquad T^2 &= 0, \end{aligned}$$

mostrando que o operador linear T é nilpotente em $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ (no caso, $n = 2$).

□

Introduziremos a seguir:

Definição 10.100 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *e* $(V, +, \cdot)$ *espaços vetoriais reais (ou complexos).*

Diremos que $T \in \mathcal{L}(U; V)$ <u>**possui transformação inversa**</u>*, se existir uma função* $S : V \to U$ *tal que*

$$(S \circ T)(u) = u, \quad \textit{para cada} \quad u \in U$$

e

$$(T \circ S)(v) = v, \quad \textit{para cada} \quad v \in V.$$

Em outras palavras,

$$T \circ S = I_V \tag{10.101}$$

e

$$S \circ T = I_U, \tag{10.102}$$

onde $I_U : U \to U$ *é o operador linear identidade em* $(U, +, \cdot)$ *e* $I_V : V \to V$ *é o operador linear identidade em* $(V, +, \cdot)$*.*

Com isto temos a:

Proposição 10.103 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *e* $(V, +, \cdot)$ *espaços vetoriais reais (ou complexos).*

Se $T \in \mathcal{L}(U; V)$ *possui uma transformação inversa, então esta transformação inversa será única.*

Prova:

Suponhamos que $T \in \mathcal{L}(U\,;\,V)$ possua as transformações inversas

$$R\,,S : V \to U\,.$$

Como

$$I_V = T \circ R \tag{10.104}$$

e

$$I_U = S \circ T\,, \tag{10.105}$$

teremos

$$\begin{aligned} S &= S \circ I_V \\ &\overset{(10.104)}{=} S \circ (T \circ R) \\ &= (S \circ T) \circ R \\ &\overset{(10.105)}{=} I_U \circ R \\ &= R\,, \end{aligned}$$

mostrando que

$$S = R$$

e completando a demonstração do resultado.

∎

Com isto temos a:

Definição 10.106 *Sejam* $(U\,,+\,,\cdot)$ *e* $(V\,,+\,,\cdot)$ *espaços vetoriais reais (ou complexos) e* $T \in \mathcal{L}(U\,;\,V)$ *que possui uma transformação inversa.*

Então a transformação inversa (que pela Proposição (10.103) *acima é única)*

$$S : V \to U$$

associada a transformação linear T*, será denotada por* T^{-1}*, isto é,*

$$T^{-1} \doteq S\,,$$

obtida da Proposição (10.103) *acima.*

Podemos também, introduzir a:

Definição 10.107 *Sejam* $(U\,,+\,,\cdot)$ *e* $(V\,,+\,,\cdot)$ *espaços vetoriais reais (ou complexos).*

Uma transformação linear $T : U \to V$ *será dita:*

1. **injetora** *, se para* $u\,,v \in U$ *tivermos*

$$T(u) = T(v)\,, \quad \textit{implicar que} \quad u = v\,.$$

2. **sobrejetora**, *se para cada* $v \in V$, *existir*

$$u \in U, \quad \textit{de modo que} \quad T(u) = v.$$

3. **bijetora**, *se ela for injetora e sobrejetora.*

Temos um resultado geral e básico de funções que diz:

Proposição 10.108 *Sejam* U, V *conjuntos não vazios.*

A função $T : U \to V$ *possui uma função inversa se, e somente se, a função* $\underline{T}$ *é bijetora.*

Prova:

Suponha que a função $\underline{T}$ possua uma função inversa.

Logo se

$$T(u) = T(v),$$

segue que

$$\begin{aligned} u &= T^{-1}[T(u)] \\ &= T^{-1}[T(v)] \\ &= v, \end{aligned}$$

portanto, a função $\underline{T}$ será injetora.

Dado $v \in V$, temos que

$$T\left[T^{-1}(v)\right] = v,$$

portanto, a função $\underline{T}$ também será sobrejetora, logo a função $\underline{T}$ será bijetora.

Reciprocamente, suponhamos que a função $\underline{T}$ seja bijetora.

Dado $v \in V$, como a função $\underline{T}$ é bijetora, segue que existe um único $u_v \in U$, tal que

$$v = T(u_v). \tag{10.109}$$

Definamos a função $S : V \to U$ por

$$S(v) \doteq u_v, \quad \text{para cada} \quad v \in U. \tag{10.110}$$

Mostremos que a função $\underline{S}$ é a função inversa associada à função $\underline{T}$.

Para isto, notemos que, se $v \in V$ então

$$\begin{aligned} T[S(v)] &\overset{(10.110)}{=} T(u_v) \\ &\overset{(10.109)}{=} v. \end{aligned}$$

Por outro lado, se $u \in U$, temos que

$$S[T(u)],$$

pela definição da função $\underline{S}$ (ver (10.109) e (10.110)), será o único elemento $u' \in U$ tal que

$$T(u') = T(u)\,.$$

Como a função $\underline{T}$ é injetora, teremos

$$u' = u$$

e, assim, segue que

$$S[T(u)] = u\,,$$

mostrando que a função $\underline{S}$ é a transformação inversa associada à função $\underline{T}$, completando a demonstração do resultado.

∎

Voltando as transformações lineares, temos a:

Proposição 10.111 *Sejam* $(U\,,+\,,\cdot)$ *e* $(V\,,+\,,\cdot)$ *espaços vetoriais reais (ou complexos).*
Se $T \in \mathcal{L}(U\,;\,V)$ *possui transformação inversa* $T^{-1} : V \to U$ *então*

$$T^{-1} \in \mathcal{L}(V\,;\,U)\,. \tag{10.112}$$

Prova:
Devemos mostrar que a aplicação $T^{-1} : V \to U$ é uma transformação linear.
Para isto, sejam

$$v_1\,, v_2 \in V \quad \text{e} \quad \lambda \in \mathbb{R} \text{ (respectivamente, } \mathbb{C})\,.$$

Como $\underline{T}$ é sobrejetora, deverão existir $u_1\,, u_2 \in U$, tais que

$$T(u_1) = v_1 \quad \text{e} \quad T(u_2) = v_2\,, \tag{10.113}$$

ou, equivalentemente,

$$T^{-1}(v_1) = u_1 \quad \text{e} \quad T^{-1}(v_2) = u_2\,. \tag{10.114}$$

Assim,

$$\begin{aligned} T^{-1}(v_1 + \lambda \cdot v_2) &\overset{(10.113)}{=} T^{-1}[T(u_1) + \lambda \cdot T(u_2)] \\ &\overset{\text{T é transformação linear}}{=} T^{-1}[T(u_1 + \lambda \cdot u_2)] \\ &\overset{T^{-1}\circ T = I_U}{=} u_1 + \lambda \cdot u_2 \\ &\overset{(10.114)}{=} T^{-1}(v_1) + \lambda \cdot T^{-1}(v_2)\,. \end{aligned}$$

Logo, do item 2. da Observação (10.2), segue que $T^{-1} \in \mathcal{L}(V\,;\,U)$, completando a demonstração.

∎

Para finalizar esta seção, temos a:

Proposição 10.115 *Sejam* $(U\,,+\,,\cdot)$ *e* $(V,+,\cdot)$ *espaços vetoriais reais (ou complexos).*

Uma transformação linear $T : U \to V$ *é injetora se, e somente se, a* **<u>única</u>** *solução de*

$$T(u) = O$$

é o vetor nulo, isto é, se $u \in U$ *satisfaz*

$$T(u) = O\,, \quad \textit{deveremos ter} \quad u = O\,. \tag{10.116}$$

Prova:

Suponha que

$$T \in \mathcal{L}(U\,;V)$$

seja injetora e que

$$T(u) = O\,.$$

Como

$$\begin{aligned} O &= T(O)\,, \\ \text{segue que:} \quad T(u) &= T(O)\,. \end{aligned}$$

Como $\underline{T}$ é uma função injetora, deveremos ter

$$u = O\,,$$

isto é, a única solução de

$$\begin{aligned} T(u) &= O\,, \\ \text{deverá ser:} \quad u &= O\,, \end{aligned}$$

mostando (10.116).

Reciprocamente, suponhamos que (10.116) ocorre, isto é, a única solução de

$$\begin{aligned} T(w) &= O\,, \\ \text{deverá ser:} \quad w &= O\,. \end{aligned} \tag{10.117}$$

Logo, para $u\,,v \in U$, teremos:

$$\begin{aligned} T(u) &= T(v)\,, \\ \text{isto é,} \quad \underbrace{T(u) - T(v)}_{\overset{T\text{ é transformação linear}}{=} T(u-v)} &= O\,, \\ \text{ou seja,} \quad T(u-v) &= O\,. \end{aligned}$$

Logo, de (10.117) (com $w \doteq u - v$), deveremos ter

$$\begin{aligned} u - v &= w = O\,, \\ \text{isto é,} \quad u &= v\,, \end{aligned}$$

mostrando que a transformação linear $\underline{T}$ é injetora, completando a demonstração do resultado.

∎

10.3 Imagem e Núcleo de uma Transformação Linear

Começaremos esta seção introduzindo a:

Definição 10.118 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *e* $(V, +, \cdot)$ *espaços vetoriais reais (ou complexos) e* $T : U \to V$ *uma transformação linear.*

1. *Se* $X \subseteq U$, *definimos a* **imagem do conjunto** X**, pela transformação linear** T, *indicada por* $T(X)$*, como sendo o conjunto*

$$T(X) \doteq \{T(x)\,;\, x \in X\} \subseteq V\,. \tag{10.119}$$

2. *Se* $Y \subseteq V$, *definimos a* **imagem inversa do conjunto** Y**, pela transformação linear** T, *indicada por* $T^{-1}(Y)$*, como sendo o conjunto*

$$T^{-1}(Y) \doteq \{u \in U\,;\, T(u) \in Y\} \subseteq U\,. \tag{10.120}$$

Observação 10.121 *Notemos que na Definição (10.118) acima,*

$$T^{-1}(Y)$$

não *tem nada a ver com a transformação inversa associada à transformação linear* $\underline{T}$ *que pode, eventualmente, nem existir.*

Com isto temos a:

Proposição 10.122 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *e* $(V, +, \cdot)$ *espaços vetoriais reais (ou complexos) de modo que*

$$\dim(V) = 1\,. \tag{10.123}$$

Se $T : U \to V$ *é um transformação linear, não identicamente nula, então a transformação linear* T *será sobrejetora.*

Prova:

Como a transformação linear $\underline{T}$ é não nula, segue que existe $u_o \in U$ tal que

$$T(u_o) \neq O\,.$$

Como o espaço vetorial real (respectivamente, complexo) $(V, +, \cdot)$ tem igual a dimensão $\underline{1}$, então qualquer base sua é constituída por um vetor não nulo.

Logo o conjunto

$$\mathcal{B} \doteq \{T(u_o)\}$$

será uma base do espaço vetorial real (respectivamente, complexo) $(V, +, \cdot)$, pois $T(u_o) \in V$ é um vetor não nulo e portanto

$$\dim(V) = 1\,.$$

Assim, dado $v \in V$, como o conjunto $\mathcal{B}$ é uma base de $(V, +, \cdot)$, segue que existe único escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ (respectivamente, $\mathbb{C}$) tal que

$$\begin{aligned} v &= \alpha \cdot T(u_o) \\ &\overset{\text{T é transformação linear}}{=} T(\alpha \cdot u_o)\,, \end{aligned}$$

ou seja, a transformação linear $\underline{T}$ é sobrejetora, como queríamos demonstrar.

□

Observação 10.124 *Na situação da Proposição (10.122) acima, utilizando (10.120), podemos concluir que se*

$$v_o \in V\,, \quad \textit{satisfaz} \quad v_o \neq O$$

então a imagem inversa do conjunto $\{v_o\}$ será todo U, ou seja,

$$T^{-1}(\{v_o\}) = U\,.$$

Como consequência temos o:

Corolário 10.125 *Sejam $(U, +, \cdot)$ e $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ espaços vetoriais reais (onde $+$ e $\cdot$ são as operações usuais em $\mathbb{R}$).*

Se a aplicação $T : U \to \mathbb{R}$ é um funcional linear definido em $(U, +, \cdot)$, não identicamente nulo, então o funcional linear $\underline{T}$ será sobrejetor.

Prova:

Como

$$\dim(\mathbb{R}) = 1$$

a conclusão segue, de modo imediato, da Proposição (10.122) acima, completando a demonstração do resultado.

∎

Observação 10.126 *Vale um resultado análogo ao Corolário (10.125) acima, trocando-se $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ pelo espaço vetorial complexo $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ e considerando o espaço vetorial $(U, +, \cdot)$ como sendo real ou complexo.*

Temos também a:

Proposição 10.127 *Sejam $(U, +, \cdot)$ e $(V, +, \cdot)$ espaços vetoriais reais (ou complexos) e $T : U \to V$ uma transformação linear.*

1. *Se W é um subespaço vetorial de $(U, +, \cdot)$, então o conjunto $T(W)$ é um subespaço vetorial de $(V, +, \cdot)$.*

2. *Se Y é um subespaço vetorial de $(V, +, \cdot)$, então o conjunbto $T^{-1}(Y)$ é um subespaço vetorial de $(U, +, \cdot)$.*

Prova:

De 1.:

Seja W um subespaço vetorial de $(U, +, \cdot)$.

Como

$$\begin{aligned} & O \in W \\ \text{e} \quad & T(O) \overset{T \text{ é transformação linear}}{=} O\,, \end{aligned}$$

segue que

$$O \in T(W)\,.$$

Sejam $x, y \in T(W)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ (respectivamente, $\mathbb{C}$).

Notemos que, se

$$x, y \in T(W)\,,$$

segue que, existem $u, w \in W$ tais que

$$x = T(u) \quad \text{e} \quad y = T(w)\,. \tag{10.128}$$

Como W é um subespaço vetorial de $(U, +, \cdot)$, da Observação (10.2) item (2), segue que

$$(u + \lambda \cdot w) \in W\,.$$

Logo

$$\begin{aligned} x + \lambda \cdot y & \overset{(10.128)}{=} T(u) + \lambda \cdot T(w) \\ & \overset{T \text{ é transformação linear}}{=} T \underbrace{(u + \lambda \cdot w)}_{\in W, \text{ pois } W \text{ é subespaço vetorial}} \in T(W)\,. \end{aligned}$$

Logo, do item 2. da Observação (10.2) , segue que o conjunto $T(W)$ é um subespaço vetorial de $(V, +, \cdot)$.

De 2.:

Seja Y um subespaço vetorial de $(V, +, \cdot)$.

Notemos que

$$\begin{aligned} & T(O) \overset{T \text{ é transformação linear}}{=} O\,, \\ \text{e} \quad & O \in Y\,, \end{aligned}$$

pois Y é subespaço vetorial de $(V, +, \cdot)$.

Logo, teremos que

$$O \in T^{-1}(Y)\,.$$

Se

$$x, y \in T^{-1}(Y) \quad \text{e} \quad \lambda \in \mathbb{R} \text{ (respectivamente, } \mathbb{C})\,,$$

segue que

$$T(x), T(y) \in Y\,.$$

Como Y é um subespaço vetorial de $(V,+,\cdot)$, teremos que

$$T(x) + \lambda \cdot T(y) \in Y. \qquad (10.129)$$

Mas

$$T(x + \lambda \cdot y) \overset{T \text{ é transformação linear}}{=} T(x) + \lambda \cdot T(y) \overset{(10.129)}{\in} Y,$$

ou seja, $\quad (x + \lambda \cdot y) \in T^{-1}(Y)$,

Logo, do item 2. da Observação (10.2), segue que o conjunto $T^{-1}(Y)$ é um subespaço vetorial de $(U,+,\cdot)$, completando a demonstração do resultado.

∎

Podemos agora introduzir a:

Definição 10.130 *Sejam* $(U,+,\cdot)$ *e* $(V,+,\cdot)$ *espaços vetoriais reais (ou complexos) e* $T: U \to V$ *uma transformação linear.*

Definimos o **núcleo da transformação linear** T, *indicado por* $\mathcal{N}(T)$ *(ou* $Ker(T)$*)),* *como sendo o subespaço vetorial de* $(U,+,\cdot)$*, dado por* $T^{-1}(\{O\})$*, ou seja,*

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(T) &\doteq T^{-1}(\{O\} \\ &\{u \in U;\, T(u) = O\}. \qquad (10.131)\end{aligned}$$

Com isto temos a:

Proposição 10.132 *Sejam* $(U,+,\cdot)$ *e* $(V,+,\cdot)$ *espaços vetoriais reais (ou complexos) e* $T: U \to V$ *uma transformação linear.*

A transformação linear $\underline{T}$ *é injetora se, e somente se,*

$$\mathcal{N}(T) = \{O\}. \qquad (10.133)$$

Prova:

Lembremos, da Proposição (10.115), segue que a transformação linear $\underline{T}$ é injetora se, e somente se, a equação

$$T(u) = O, \quad \text{para} \quad u \in U,$$

possui uma única solução, a saber,

$$u = O.$$

Isto é o mesmo que dizer que o conjunto $\mathcal{N}(T)$ é formado somente pelo vetor O, isto é, vale (10.133), como queríamos demonstrar.

∎

6.10.2015 - 16.a

Temos também o:

Proposição 10.134 *Sejam* $(U,+,\cdot)$ *espaço vetorial real (respectivamente, complexo) e* $T \in \mathcal{L}(U)$.

Então

$$T^2 = O \quad \textit{se, e somente se,} \quad T(U) \subseteq \mathcal{N}(T). \qquad (10.135)$$

Prova:

De fato, suponhamos que

$$T^2 = O\,. \tag{10.136}$$

Logo, se $v \in T(U)$, segue que, podemos encontrar $u \in U$, tal que

$$v = T(u)\,. \tag{10.137}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} T(v) &\overset{(10.137)}{=} T[T(u)] \\ &= T^2(u) \\ &\overset{(10.136)}{=} O, \\ \text{isto é,} \quad & v \in \mathcal{N}(T)\,, \\ \text{ou ainda,} \quad & T(U) \subseteq \mathcal{N}(T)\,. \end{aligned}$$

Reciprocamente, suponhamos que

$$T(U) \subseteq \mathcal{N}(T)\,. \tag{10.138}$$

Dado $u \in U$, como

$$T(u) \in T(U) \overset{(10.138)}{\subseteq} \mathcal{N}(T)\,, \tag{10.139}$$

$$\text{segue que:} \quad T^2(u) = T[\underbrace{T(u)}_{\overset{(10.139)}{\in} \mathcal{N}(T)}] = O\,,$$

$$\text{ou seja,} \quad T^2 = O\,,$$

como queríamos demonstrar, completando a demonstração do resultado.

∎

Consideremos o seguinte exemplo:

Exemplo 10.140 *Sejam* $\left(\mathbb{R}^2, +, \cdot\right)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de soma de pares ordenados e multiplicação de número real por par ordenado, respectivamente) e* $\theta \in \mathbb{R}$ *fixado.*

Encontre o núcleo do operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*, dada por:*

$$T(x, y) \doteq (x\,\cos(\theta) - y\,\operatorname{sen}(\theta), x\,\operatorname{sen}(\theta) + y\,\cos(\theta))\,, \tag{10.141}$$

para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor mostrar que $T \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2\right)$.

Por definição,

$$\begin{aligned} & (x, y) \in \mathcal{N}(T) \\ \text{se, e somente se,} \quad & T(x, y) = O \\ & \qquad\quad = (0, 0) \end{aligned}$$

que, de (10.141), é equivalentemente a:

$$(x\cos(\theta) - y\,\mathrm{sen}(\theta)\,, x\,\mathrm{sen}(\theta) + y\cos(\theta)) = (0\,,0)\,,$$

isto é, $$\begin{cases} x\cos(\theta) - y\,\mathrm{sen}(\theta) = 0 \\ x\,\mathrm{sen}(\theta) + y\cos(\theta) = 0 \end{cases},$$

ou ainda, $$\underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}}_{\det=1\neq 0,\ \text{pela Proposição (A.121), a matriz admite inversa}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ou seja, teremos: $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

isto é, $$(x\,,y) = (0\,,0)\,.$$

Portanto,

$$\mathcal{N}(T) = \{(0\,,0)\}\,.$$

Em particular, da Proposição (10.132), segue que o operador linear T é injetor.

□

Observação 10.142 *Geometricamente, o operador linear* T*, dado pelo Exemplo* (10.140) *acima, leva um vetor não nulo, em um vetor obtido da rotação do mesmo de um ângulo* θ*, no sentido anti-horário, se* $\theta > 0$*.*

Deixaremos a verificação deste fato exercício para o leitor.

Podemos agora enunciar e provar o:

Teorema 10.143 (do Núcleo e da Imagem) *Sejam* $(U\,,+\,,\cdot)$ *e* $(V\,,+\,,\cdot)$ *espaços vetoriais reais (ou complexos) e* $T : U \to V$ *uma transformação linear.*

Se

$$\dim(U) = n < \infty\,, \tag{10.144}$$

então

$$\dim\,(U) = \dim\,[\mathcal{N}(T)] + \dim\,[T(U)]\,. \tag{10.145}$$

Prova:

Como o conjunto

$$\mathcal{N}(T) = T^{-1}(\{O\})$$

é subespaço vetorial de $(U\,,+\,,\cdot)$ (veja o item 2. da Proposição (10.127)) e

$$\dim(U) = n < \infty\,,$$

segue que

$$\begin{aligned} p &\doteq \dim[\mathcal{N}(T)] \leq \dim(U) \\ &= n < \infty\,. \end{aligned}$$

Consideremos, primeiramente, o caso que

$$p = 0\,,$$
$$\text{isto é,} \qquad \mathcal{N}(T) = \{O\}\,. \tag{10.146}$$

Como

$$\dim(U) = n < \infty\,,$$

segue que existe um conjunto de vetores

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1\,, u_2\,, \cdots\,, u_n\} \tag{10.147}$$

que é uma base de $(U\,, +\,, \cdot)$.

Afirmamos que o conjunto

$$\mathcal{C} \doteq \{T(u_1)\,, T(u_2)\,, \cdots\,, T(u_n)\} \tag{10.148}$$

formam uma base de $(T(U)\,, +\,, \cdot)$ (observemos que, pelo item 1. da Proposição (10.127), temos que $T(U)$ é um subsepaço vetorial de $(V\,, +\,, \cdot)$).

De fato, se $w \in T(U)$, segue que existe

$$u \in U\,, \qquad \text{tal que} \quad T(u) = w\,. \tag{10.149}$$

Como o conjunto $\mathcal{B}$ é uma base (ordenada) de $(U\,, +\,, \cdot)$, segue que existem escalares

$$\alpha_1\,, \alpha_2\,, \cdots\,, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ (respectivamente, } \mathbb{C})\,,$$

tais que

$$u = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n\,. \tag{10.150}$$

Logo

$$\begin{aligned} w &= T(u) \\ &\overset{(10.150)}{=} T(\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n) \\ &\overset{T \text{ é transformação linear}}{=} \alpha_1 \cdot T(u_1) + \alpha_2 \cdot T(u_2) + \cdots + \alpha_n \cdot T(u_n)\,, \end{aligned}$$

ou seja,

$$w \in [T(u_1)\,, T(u_2)\,, \cdots\,, T(u_n)]\,,$$

ou ainda,

$$T(U) = [T(v_1)\,, T(v_2)\,, \cdots\,, T(v_n)]\,,$$

isto é, o conjunto de vetores $\mathcal{C}$, dado por (10.148), gera o subespaço vetorial $(T(U)\,, +\,, \cdot)$.

Mostremos que o conjunto de vetores $\mathcal{C}$, dado por (10.148), é L.I. em $(V\,, +\,, \cdot)$.

Para isto, notemos que, se

$$\alpha_1\,, \alpha_2\,, \cdots\,, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ (respectivamente, } \mathbb{C})\,,$$

são tais que

$$O = \alpha_1 \cdot T(u_1) + \alpha_2 \cdot T(u_2) + \cdots + \alpha_n \cdot T(u_n) \overset{T \text{ é transformação linear}}{=} T(\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n)\,,$$

ou seja,

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n \in \mathcal{N}(T) \overset{(10.146)}{=} \{O\},$$

isto é,

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n = O\,.$$

Como o conjunto de vetores

$$\mathcal{B} = \{u_1\,, u_2\,, \cdots\,, u_n\}$$

é L.I. em $(U\,,+\,,\cdot)$ (pois, de (10.147), é uma base de $(U\,,+\,,\cdot)$) segue que

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0,$$

mostrando que o conjunto de vetores

$$\mathcal{C} = \{T(u_1)\,, T(u_2)\,, \cdots\,, T(u_n)\}$$

é L.I. em $(V\,,+\,,\cdot)$.

Portanto o conjunto de vetores $\mathcal{C}$, dado por (10.148), gera e é L.I. em $(T(U)\,,+\,,\cdot)$ e assim será uma base para o espaço vetorial real (respectivamente, complexo) $(T(U)\,,+\,,\cdot)$.

Em particular, teremos

$$\dim[T(U)] = n\,. \tag{10.151}$$

Logo podemos concluir que

$$\begin{aligned}\dim(U) &\overset{(10.144)}{=} n \\ &= \underbrace{0}_{\overset{(10.146)}{=}\dim[\mathcal{N}(T)]} + \underbrace{n}_{\overset{(10.151)}{=}\dim[T(U)]} \\ &= \dim[\mathcal{N}(T)] + \dim[T(U)]\,,\end{aligned}$$

ou seja, vale a identidade (10.145), quando

$$\dim[\mathcal{N}(T)] = 0\,.$$

Tratemos agora do caso

$$p = \dim[\mathcal{N}(T)] \geq 1\,. \tag{10.152}$$

Seja

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1\,, u_2\,, \cdots\,, u_p\} \tag{10.153}$$

uma base do subespaço vetorial $(\mathcal{N}(T)\,,+\,,\cdot)$.

Pelo Teorema do completamento (isto é, o Teorema (7.33)), podemos encontrar um número finito de vetores

$$v_1, v_2, \cdots, v_q \in U,$$

de modo que o conjunto de vetores

$$\mathcal{C} \doteq \{u_1, u_2, \cdots, u_p, v_1, v_2, \cdots, v_q\} \tag{10.154}$$

é uma base de $(U, +, \cdot)$.

Desta forma teremos que

$$\dim(U) = p + q. \tag{10.155}$$

Como

$$\dim[\mathcal{N}(T)] = p,$$

para obtermos a identidade (10.145), resta mostrar que

$$\dim[T(U)] = q. \tag{10.156}$$

Para isto, mostraremos que o conjunto de vetores

$$\mathcal{D} \doteq \{T(v_1), T(v_2), \cdots, T(v_q)\}$$

é uma base de $(T(U), +, \cdot)$.

Afirmamos que o conjunto de vetores $\mathcal{D}$ é L.I. em $(V, +, \cdot)$.

De fato, se

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_q \in \mathbb{R} \text{ (respectivamente, } \mathbb{C})$$

são tais que

$$\begin{aligned} O &= \alpha_1 \cdot T(v_1) + \alpha_2 \cdot T(v_2) + \cdots + \alpha_q \cdot T(v_q) \\ &\overset{T \text{ transformação linear}}{=} T(\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \cdots + \alpha_q \cdot v_q), \end{aligned} \tag{10.157}$$

isto é, teremos

$$(\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \cdots + \alpha_q \cdot v_q) \in \mathcal{N}(T).$$

Como o conjunto de vetores $\mathcal{B}$, dado por (10.153), é uma base de $\mathcal{N}(T)$, segue que existem escalares

$$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_p \in \mathbb{R} \text{ (respectivamente, } \mathbb{C})$$

de modo que

$$\begin{aligned} &\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \cdots + \alpha_q \cdot v_q = \beta_1 \cdot u_1 + \beta_2 \cdot u_2 + \cdots + \beta_p \cdot u_p, \\ \text{isto é,} \quad &\beta_1 \cdot u_1 + \beta_2 \cdot u_2 + \cdots + \beta_p \cdot u_p - \alpha_1 \cdot v_1 - \alpha_2 \cdot v_2 - \cdots - \alpha_q \cdot v_q = O. \end{aligned}$$

Como o conjunto de vetores

$$\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \cdots, u_p, v_1, v_2, \cdots, v_q\}$$

formam uma base de $(U, +, \cdot)$, segue que o conjunto $\mathcal{B}$, dado por (10.153), será L.I. em $(U, +, \cdot)$.

Portanto, deveremos ter

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_q = \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_p = 0,$$

em particular,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_q = 0. \tag{10.158}$$

Em particular, de (10.157) e (10.158), segue que o conjunto de vetores

$$\mathcal{D} = \{T(v_1), T(v_2), \cdots, T(v_q)\}$$

é L.I. $(V, +, \cdot)$.

Mostremos que o conjunto de vetores $\mathcal{D}$, gera o espaço vetorial real (respectivamente, complexo) $(T(U), +, \cdot)$.

Notemos que, se

$$v \in T(U),$$

segue que, existe

$$u \in U, \quad \text{tal que} \quad T(u) = v. \tag{10.159}$$

Como o conjunto de vetores

$$\mathcal{C} = \{u_1, u_2, \cdots, u_p, v_1, v_2, \cdots, v_q\}$$

é uma base de $(U, +, \cdot)$, segue que existem escalares

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_q, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_p \in \mathbb{R} \text{ ou } (\mathbb{C}),$$

tais que

$$u = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_p \cdot u_p + \beta_1 \cdot v_1 + \beta_2 \cdot v_2 + \cdots + \beta_q \cdot v_q, \tag{10.160}$$

com isto teremos:

$$\begin{aligned}
v &\overset{(10.159)}{=} T(u) \\
&\overset{(10.160)}{=} T(\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_p \cdot u_p + \beta_1 \cdot v_1 + \beta_2 \cdot v_2 + \cdots + \beta_q \cdot v_q) \\
&\overset{T \text{ é transformação linear}}{=} \alpha_1 \cdot \underbrace{T(u_1)}_{u_1 \overset{(10.153)}{\in} \mathcal{N}(T) \, = \, O} + \cdots + \alpha_p \cdot \underbrace{T(u_p)}_{u_p \overset{(10.153)}{\in} \mathcal{N}(T) \, = \, O} + \beta_1 \cdot T(v_1) + \cdots + \beta_q \cdot T(v_q) \\
&= \beta_1 \cdot T(v_1) + \beta_2 \cdot T(v_2) + \cdots + \beta_q \cdot T(v_q).
\end{aligned}$$

Logo

$$v \in [T(v_1), T(v_2), \cdots, T(v_q)],$$

$$\text{ou seja,} \quad T(U) = [T(v_1), T(v_2), \cdots, T(v_q)],$$

ou ainda, o conjunto de vetores

$$\mathcal{D} = \{T(v_1)\,, T(v_2)\,, \cdots\,, T(v_q)\}$$

gera o espaço vetorial real (respectivamente, complexo) $(T(U)\,, +\,, \cdot)$.

Assim, o conjunto de vetores $\mathcal{D}$ é uma base de $(T(U)\,, +\,, \cdot)$.

Em particular, teremos

$$\dim[T(U)] = q\,. \tag{10.161}$$

Portanto, teremos

$$\begin{aligned}\dim(U) &\overset{(10.155)}{=} \underbrace{p}_{\overset{(10.152)}{=}\dim[\mathcal{N}(T)]} + \underbrace{q}_{\overset{(10.161)}{=}\dim[T(U)]}\\ &= \dim[\mathcal{N}(T)] + \dim[T(U)]\,,\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar, completando a demonstração do resultado.

∎

Como consequência temos o:

Corolário 10.162 *Sejam $(U\,, +\,, \cdot)$ e $(V\,, +\,, \cdot)$ espaços vetoriais reais (ou complexos) de dimensões finitas, tais que*

$$\dim(U) = \dim(V) \tag{10.163}$$

e $T : U \to V$ uma transformação linear.

As seguintes condições são equivalentes:

1. *A transformação linear T é sobrejetora;*

2. *A transformação linear T é injetora;*

3. *A transformação linear T é bijetora;*

4. *A transformação linear T leva uma base de $(U\,, +\,, \cdot)$ em uma base de $(V\,, +\,, \cdot)$, isto é, se o conjunto*

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1\,, u_2\,, \cdots\,, u_n\}$$

é uma base de $(U\,, +\,, \cdot)$ então o conjunto

$$\mathcal{C} \doteq \{T(u_1)\,, T(u_2)\,, \cdots\,, T(u_n)\}$$

será uma base de $(V\,, +\,, \cdot)$.

Prova:

Mostremos que 1. implica em 2.:

Suponhamos que a transformação linear $T : U \to V$ é sobrejetora, isto é,

$$T(U) = V\,. \tag{10.164}$$

Logo, pelo Teorema (10.143) acima, temos que

$$\begin{aligned}\dim(U) &\overset{(10.145)}{=} \dim[\mathcal{N}(T)] + \dim[\underbrace{T(U)}_{\overset{(10.164)}{=} V}] \\ &= \dim[\mathcal{N}(T)] + \underbrace{\dim(V)}_{\overset{(10.163)}{=} \dim(U)}\,, \\ \text{ou seja,} \quad & \dim[\mathcal{N}(T)] = 0\,, \\ \text{ou ainda,} \quad & \mathcal{N}(T) = \{O\}\,.\end{aligned}$$

Logo, da Proposição (10.132), segue que a transformação linear T será injetora, mostrando que 2. ocorre.

<u>**Mostremos que 2. implicará em 3.:**</u>

Suponhamos que a transformação linear $T : U \to V$ é injetora.

Da Proposição (10.132) , segue que

$$\begin{aligned}&\mathcal{N}(T) = \{O\}\,, \\ \text{assim,} \quad & \dim[\mathcal{N}(T)] = 0\,.\end{aligned} \tag{10.165}$$

Logo, Teorema (10.143) acima, segue-se que

$$\begin{aligned}\dim(U) &\overset{(10.145)}{=} \underbrace{\dim[\mathcal{N}(T)]}_{\overset{(10.165)}{=} 0} + \dim[T(U)] \\ &= \dim[T(U)]\,, \\ \text{ou seja,} \quad & \dim(U) = \dim[T(U)]\,.\end{aligned}$$

Como

$$\dim(U) = \dim(V)\,,$$

segue, da identidade acima, que

$$\dim[T(U)] = \dim(V)\,.$$

Logo o subespaço vetorial $(T(U)\,,+\,,\cdot)$, do espaço vetorial real (respectivamente, complexo) $(V\,,+\,,\cdot)$, tem a mesma dimensão de $(V\,,+\,,\cdot)$.

Portanto, do Corolário (7.47), segue que

$$T(U) = V\,,$$

isto é, a transformação linear T é sobrejetora.

Dessa forma, a transformação linear T é bijetora, mostrando que 3. ocorre.

<u>**Mostremos que 3. implicará em 4.:**</u>

Suponhamos que a transformação linear T seja bijetora.

Consideremos o conjunto de vetores

$$\mathcal{B} = \{u_1\,, u_2\,, \cdots\,, u_n\}$$

uma base de $(U\,,+\,,\cdot)$.

Precisamos mostrar o conjunto de vetores

$$\mathcal{C} \doteq \{T(u_1)\,,T(u_2)\,,\cdots,T(u_n)\}$$

é uma base de $(V\,,+\,,\cdot)$.

Afirmamos que o conjunto de vetores

$$\mathcal{C} \doteq \{T(u_1)\,,T(u_2)\,,\cdots,T(u_n)\}$$

é L.I. em $(V\,,+\,,\cdot)$.

De fato, se

$$\alpha_1\,,\alpha_2\,,\cdots,\alpha_n \in \mathbb{R} \text{ (respectivamente, } \mathbb{C})$$

satisfazem

$$\begin{aligned} O &= \alpha_1 \cdot T(u_1) + \alpha_2 \cdot T(u_2) + \cdots + \alpha_n \cdot T(u_n) \\ &\overset{T \text{ é transformação linear}}{=} T(\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n)\,, \end{aligned}$$

isto é, o vetor

$$(\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n) \in \mathcal{N}(T)\,.$$

Como a transformação linear T é injetora, da Proposição (10.132), segue que

$$\mathcal{N}(T) = \{O\}$$

e, consequentemente, deveremos ter:

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n = O\,.$$

Como o conjunto de vetores $\mathcal{B} = \{u_1\,,u_2\,,\cdots,u_n\}$ é uma base de $(U\,,+\,,\cdot)$, ele deverá ser L.I. em $(U\,,+\,,\cdot)$.

Com isto deveremos ter

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0,$$

portanto o conjunto formado pelos vetores

$$\mathcal{C} = \{T(u_1),\cdots,T(u_n)\}$$

é L.I. em $(V\,,+\,,\cdot)$.

Afirmamos que o conjunto de vetores

$$\mathcal{C} = \{T(u_1)\,,T)u_2)\,,\cdots,T(u_n)\}$$

gera $(V\,,+\,,\cdot)$, ou seja,

$$[\mathcal{C}] = V\,.$$

De fato, se

$$v \in V\,,$$

como a transformação linear $\underline{T}$ é sobrejetora, existe $u \in U$, tal que

$$v = T(u) . \tag{10.166}$$

Como o conjunto de vetores $\mathcal{B} = \{u_1 , u_2 , \cdots , u_n\}$ é uma base de $(U , + , \cdot)$, segue que existem escalares

$$\alpha_1 , \alpha_2 , \cdots , \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ (respectivamente, } \mathbb{C}) ,$$

tais que

$$u = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n . \tag{10.167}$$

Com isto temos

$$\begin{aligned} v &\overset{(10.166)}{=} T(u) \\ &\overset{(10.167)}{=} T(\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n) \\ &\overset{T \text{ é transformação linear}}{=} \alpha_1 \cdot T(u_1) + \alpha_2 \cdot T(u_2) + \cdots + \alpha_n \cdot T(u_n), \end{aligned}$$

isto é, o conjunto de vetores $\mathcal{C} = \{T(u_1) , T(v_2) , \cdots , T(u_n)\}$ gera $(V , + , \cdot)$.

Portanto o conjunto de vetores $\mathcal{C}$ é L.I. e gera $(V , + , \cdot)$, ou seja, é uma base de $(V , + , \cdot)$, mostrando que 4. ocorre.

Mostremos que 4. implicará em 1.:

Suponhamos que o conjunto de vetores

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1 , u_2 , \cdots , u_n\}$$

é uma base de $(U , + , \cdot)$.

Por hipótese, sabemos que o conjunto

$$\mathcal{C} \doteq \{T(u_1) , T(u_2) , \cdots , T(u_n)\}$$

é uma base de $(V , + , \cdot)$.

Mostremos que a transformação linear $T : U \to V$ é sobrejetora.

Para isto, consideremos $v \in V$.

Como o conjunto $\mathcal{C}$ é uma base de $(V , + , \cdot)$, segue que existem escalares

$$\alpha_1 , \alpha_2 , \cdots , \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ (respectivamente, } \mathbb{C}) ,$$

tais que

$$\begin{aligned} v &= \alpha_1 \cdot T(u_1) + \alpha_2 \cdot T(u_2) + \cdots + \alpha_n \cdot T(u_n) \\ &\overset{T \text{ é transformação linear}}{=} T(\underbrace{\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n}_{\doteq u}), \end{aligned}$$

ou seja, existe

$$u \in U , \quad \text{tal que} \quad T(u) = v ,$$

isto é, a transformação linear $\underline{T}$ é sobrejetora, ou seja, 1. ocorre, completando a demonstração do resultado.

∎

Consideremos o seguinte exemplo:

Exemplo 10.168 *Seja* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de soma de pares ordenados e multiplicação de número real por par ordenado, respectivamente).*

Mostre que se

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 ,$$

é um operador linear bijetor, então o operador linear T *leva retas de* $\mathbb{R}^2$ *em retas de* $\mathbb{R}^2$*, isto é, a imagem de uma reta de* $\mathbb{R}^2$*, pelo operador linear bijetor* $\underline{T}$*, é uma reta de* $\mathbb{R}^2$*.*

Resolução:

Dada uma reta $\underline{r}$ no plano $\mathbb{R}^2$, usaremos a equação vetorial para representar seus pontos, isto é, um ponto

$$P \in r \quad \text{se, e somente se,} \quad P = P_o + \lambda \cdot \vec{v} , \tag{10.169}$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, onde P_o é um ponto sobre a reta, $\vec{v} \neq \vec{O}$ é um vetor direção da reta.

A imagem da reta $\underline{r}$, pela transformação linear bijetora $\underline{T}$, será dada por

$$T(r) \doteq \{T(P) ; P \in r\} .$$

Assim, um ponto

$$S \in T(r) \quad \text{se, e somente se,} \quad S = T(P) ,$$

para algum $P \in r$, ou seja,

$$\begin{aligned} S &= T(P) \\ &\overset{(10.169)}{=} T(P_o + \lambda \cdot \vec{v}) \\ &\overset{T \text{ é operador linear}}{=} T(P_o) + \lambda \cdot T(\vec{v}) , \end{aligned} \tag{10.170}$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

Como o operador linear T é injetora e $\vec{v} \neq \vec{O}$, segue que

$$T(\vec{v}) \neq \vec{O} .$$

Assim (10.170) nos fornece a equação vetorial de uma reta no plano $\mathbb{R}^2$, que passa pelo ponto $T(P_o)$ e tem a direção do vetor (não nulo) $T(\vec{v})$.

Portanto se r é uma reta de $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$, o conjunto

$$T(r) \doteq \{T(P) ; P \in r\}$$

será uma reta em $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$, como afirmamos.

$\square$

8.10.2015 - 17.a

Temos também o:

Exemplo 10.171 *Sejam* $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de soma de* n*-uplas e multiplicação de número real por* n*-upla) e*

$$a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$$

não todos nulos, fixados.

Mostre que o conjunto

$$H \doteq \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = 0\}$$

é um subespaço vetorial de dimensão igual a $n-1$*, ou seja,*

$$\dim(H) = n - 1 .$$

Resolução:

Observemos que o subespaço vetorial $\underline{H}$ pode ser obtido como sendo o núcleo do seguinte funcional linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dada por

$$T(x_1, x_2, \cdots, x_n) \doteq a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n , \quad \text{para cada} \quad (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n ,$$

ou seja,

$$\mathcal{N}(T) = H . \tag{10.172}$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Em particular, o conjunto $\underline{H}$ será um subespaço vetorial do espaço vetorial $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$.

Como nem todos os a_j são nulos, segue-se que o funcional linear $\underline{T}$ não é identicamente nulo.

Logo, do Corolário (10.125), segue que o funcional linear $\underline{T}$ será sobrejetor, em particular,

$$\begin{aligned} \dim[T(\mathbb{R}^n)] &= \dim(\mathbb{R}) \\ &= 1 . \end{aligned} \tag{10.173}$$

Deste modo, do Teorema (10.143), segue que

$$\begin{aligned} n &= \dim(\mathbb{R}^n) \\ &\overset{(10.145)}{=} \dim[\underbrace{\mathcal{N}(T)}_{\overset{(10.172)}{=} H}] + \underbrace{\dim[T(\mathbb{R}^n)]}_{\overset{(10.173)}{=} 1} \\ &= \dim(H) + 1, \\ \text{ou seja,} \qquad &\dim(H) = n - 1 , \end{aligned}$$

como afirmamos.

$\square$

Temos também o:

Exemplo 10.174 *Sejam* $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de soma de matrizes e multiplicação de número real por matriz, respectivamente),*

$$A \doteq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{10.175}$$

e $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$*, dada por:*

$$T(X) \doteq A\,X - X\,A\,, \quad \textit{para cada} \quad X \in M_2(\mathbb{R})\,. \tag{10.176}$$

Mostre que $\underline{T}$ *é um operador linear em* $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$*.*

Além disso, encontre o núcleo e a imagem do operador linear $\underline{T}$ *e suas respectivas dimensões.*

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação que a aplicação T é um operador linear em $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

<u>Núcleo de T:</u>

Observemos que

$$\begin{aligned} & X \in \mathcal{N}(T) \\ \text{se, e somente se,} \quad & T(X) = O\,, \\ \text{ou, de (10.176), equivalentemente,} \quad & A\,X - X\,A = O\,, \\ \text{isto é,} \quad & A\,X = X\,A\,. \end{aligned} \tag{10.177}$$

Se

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

de (10.177) e (10.175), sabemos que $X \in \mathcal{N}(T)$ se, e somente se,

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \text{isto é,} \quad & \begin{pmatrix} a + 2\,c & b + 2\,d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2\,a + b \\ c & 2\,c + d \end{pmatrix} \\ \text{que é equivalente ao sistema linear:} \quad & \begin{cases} a + 2\,c = a \\ b + 2\,d = 2\,a + b \\ c = c \\ d = 2\,c + d \end{cases}, \\ \text{ou seja (Exercício):} \quad & c = 0 \ \text{ e } \ a = d\,. \end{aligned} \tag{10.178}$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
& X \in \mathcal{N}(T) \\
\text{se, e somente se,} \quad & X \overset{(10.178)}{=} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \\
& = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
& = a \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\doteq A_1} + b \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\doteq A_2} \\
& = a \cdot A_1 + b \cdot A_2 . \qquad (10.179)
\end{aligned}
$$

Dessa forma, o núcleo do operador linear $\underline{T}$ é o subespaço vetorial gerado pelos vetores A_1 e A_2, ou seja,

$$\mathcal{N}(T) = [A_1 , A_2] . \qquad (10.180)$$

Notemos que os vetores

$$A_1 , A_2$$

são L.I. em $(M_2(\mathbb{R}) , + , \cdot)$.

Deixaremos a verificação deste fato como exerício para o leitor.

Logo o conjunto

$$\mathcal{B} \doteq \{A_1 , A_2\}$$

gera $\mathcal{N}(T)$ e é L.I. em $(M_2(\mathbb{R}) , + , \cdot)$, ou seja, é uma base para o subespaço $\mathcal{N}(T)$.

Em particular,

$$\dim[\mathcal{N}(T)] = 2 .$$

Imagem de $\underline{T}$:

Observemos que

$$Y \doteq \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in T[M_2(\mathbb{R})] \qquad (10.181)$$

se, e somente, se existir uma matriz em $X \in M_2(\mathbb{R})$, que denotaremos por

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} , \qquad (10.182)$$

tal que

$$\begin{aligned} Y &= T(X) \\ &\stackrel{(10.176)}{=} A\,X - X\,A\,, \end{aligned} \tag{10.183}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} &\stackrel{(10.182)\text{ e }(10.183)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a+2\,c & b+2\,d \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 2\,a+b \\ c & 2\,c+d \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2\,c & 2\,d-2\,a \\ 0 & -2\,c \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2\,c & 0 \\ 0 & -2\,c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2\,(d-a) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 2\,c \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\doteq B_1} + 2\,(d-a) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\doteq B_2} \\
&= 2\,c \cdot B_1 + 2\,(d-a) \cdot B_2\,,
\end{aligned}$$

ou seja, a imagem do operador linear $\underline{T}$ é gerada pelos vetores B_1, B_2, isto é,

$$[B_1\,, B_2] = T(U)\,.$$

Notemos que o conjunto de vetores

$$\mathcal{C} \doteq \{B_1\,, B_2\}$$

é L.I. em $(M_2(\mathbb{R})\,, +\,, \cdot)$.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Logo o conjunto de vetores $\mathcal{C} \doteq \{B_1\,, B_2\}$ será uma base para o subespaço $T[M_2(\mathbb{R})]$ de $(M_2(\mathbb{R})\,, +\,, \cdot)$.

Em particular,

$$\dim[T(M_2(\mathbb{R}))] = 2\,,$$

completando a resolução.

$\square$

Observação 10.184 *Uma outra maneira para encontrar uma base da imagem do operador linear* $\underline{T}$ *do Exemplo* (10.174) *acima, seria fazer uso da* **demonstração** *do Teorema (10.143).*

Mais precisamente, de (10.179) *e* (10.180)*, sabemos que o conjunto de vetores*

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\,, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

é uma base do núcleo do operador linear $\underline{T}$.

Logo, do Teorema (10.143), podemos completá-la a uma base de $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *introduzindo, por exemplo, os vetores:*

$$A_3 \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad A_4 \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{10.185}$$

isto é, o conjunto de vetores

$$\mathcal{A} \doteq \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

é uma base de $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação deste fato.

Mas

$$\begin{aligned} T(A_3) &\overset{(10.185)}{=} T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}_{\doteq C_1}, \\ T(A_4) &\overset{(10.185)}{=} T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\doteq C_2}. \end{aligned}$$

Logo, do mesmo resultado, segue que o conjunto de vetores

$$\mathcal{C} \doteq \{C_1, C_2\}$$

é uma base da imagem do operador linear $\underline{T}$.

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação deste fato.

Introduziremos agora a:

Definição 10.186 *Seja* $(U, +, \cdot)$ *espaço vetorial real (respectivamente, complexo).*

Diremos que $T \in \mathcal{L}(U)$ *é um* **idempotente em** $(U, +, \cdot)$, *se*

$$T^2 = T. \tag{10.187}$$

A seguir exibiremos alguns exemplos de operadores lineares idempotentes.

Exemplo 10.188 *Seja* $(U, +, \cdot)$ *espaço vetorial real (respectivamente, complexo).*

Então o operador identidade em $(U, +, \cdot)$, *isto é,* $I_U : U \to U$ *dado por*

$$I_U(u) \doteq u, \quad \textit{para cada} \quad u \in U, \tag{10.189}$$

é um operador linear idempotente em $(U, +, \cdot)$.

Resolução:

Sabemos que o I_U é um operador linear em $(U\,,+\,,\cdot)$.

Além disso, temos

$$\begin{aligned} & I_U{}^2(u) \\ & = I_U[\underbrace{I_U(u)}_{\overset{(10.189)}{=} u}] \\ & = I_U(u)\,, \quad \text{para cada} \quad u \in U\,, \end{aligned}$$

mostrando que o operador linear $\underline{I}$ é idempotente em $(U\,,+\,,\cdot)$.

$\square$

Temos também o:

Exemplo 10.190 *Sejam* $(\mathbb{R}^2\,,+\,,\cdot)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de soma de pares e de multiplicação de número real por par, respectivamente) e* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*, dada por*

$$T(x\,,y) \doteq (x\,,0)\,, \quad \textit{para cada} \quad (x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,. \tag{10.191}$$

Então o operador linear $\underline{T}$ *é idempotente em* $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$*.*

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação que $\underline{T}$ é um operador linear em $(\mathbb{R}^2\,,+\,,\cdot)$.

Notemos que, para cada $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$, teremos

$$\begin{aligned} T^2(x\,,y) &= T[\,\underbrace{T(x\,,y)}_{\overset{(10.191)}{=}(x\,,0)}\,] \\ &= T(x\,,0) \\ &\overset{(10.191)}{=} (x\,,0) \\ &\overset{(10.191)}{=} T(x\,,y)\,, \end{aligned}$$

mostrando que o operador linear $\underline{T}$ é idempotente em $(\mathbb{R}^2\,,+\,,\cdot)$.

$\square$

Observação 10.192 *O operador linear do Exemplo* (10.190) *acima é conhecido, no curso de Geometria Analítica, como sendo a projeção do vetor* $\vec{v} \doteq (x\,,y)$*, sobre o eixo* Ox *(ou na direção do vetor unitário* $\vec{e}_1 \doteq (1\,,0)$*).*

Temos agora a:

Proposição 10.193 *Seja* $(U\,,+\,,\cdot)$ *espaço vetorial real (respectivamente, complexo) e* $T \in \mathcal{L}(U)$*.*

Se o operador linear $\underline{T}$ *é idempotente, então*

$$U = T(U) \oplus \mathcal{N}(T)\,. \tag{10.194}$$

Prova:

Por hipótese temos que

$$T \in \mathcal{L}(U) \quad \text{e} \quad T^2 = T\,. \tag{10.195}$$

Observemos que, para cada $u \in U$, podemos escrever

$$u = T(u) + [u - T(u)]\,. \tag{10.196}$$

Notemos que,

$$T(u) \in T(U)\,.$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} T[u - T(u)] &\overset{T \text{ é operador linear}}{=} T(u) - \underbrace{T^2(u)}_{\overset{(10.195)}{=} T(u)} \\ &= T(u) - T(u) \\ &= O\,, \end{aligned}$$

$$\text{ou seja,} \qquad [u - T(u)] \in \mathcal{N}(T)\,. \tag{10.197}$$

Portanto teremos:

$$u \overset{(10.196)}{=} \underbrace{T(u)}_{\in T(U)} + \underbrace{[u - T(u)]}_{\overset{(10.197)}{\in} \mathcal{N}(T)} \in T(U) + \mathcal{N}(T),$$

mostrando que

$$U = T(U) + \mathcal{N}(T)\,. \tag{10.198}$$

Resta mostrarmos que a soma (10.198), é uma soma direta, ou seja, que

$$T(U) \cap \mathcal{N}(T) = \{O\}\,. \tag{10.199}$$

Para isto consideremos

$$u \in T(U) \cap \mathcal{N}(T)\,.$$

Como $u \in T(U)$, podemos encontrar $v \in U$, de modo que

$$u = T(v)\,. \tag{10.200}$$

Por outro lado, como $u \in \mathcal{N}(T)$ segue que

$$T(u) = O\,. \tag{10.201}$$

Assim, teremos

$$\begin{aligned} u &\overset{(10.200)}{=} T(v) \\ &\overset{T^2 = T}{=} T^2(v) \\ &= T[\,\underbrace{T(v)}_{\overset{(10.200)}{=} u}\,] \\ &= T(u) \\ &\overset{(10.201)}{=} O\,, \end{aligned}$$

$$\text{ou seja,} \qquad T(U) \cap \mathcal{N}(T) = \{O\}\,. \tag{10.202}$$

Portanto, de (10.198) e (10.202), segue que

$$U = T(U) \oplus \mathcal{N}(T),$$

completando a demonstração do resultado.

∎

10.4 Isomorfismo e Automorfismo

Começaremos introduzindo a:

Definição 10.203 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *e* $(V, +, \cdot)$ *espaços vetoriais reais (ou complexos).*

Diremos que uma transformação linear $T : U \to V$ *é* **isomorfismo de** $(U, +, \cdot)$ **em** $(V, +, \cdot)$, *se ela for bijetora.*

Quando

$$U = V,$$

diremos, no caso acima, que o operador linear $\underline{T}$ *é um* **automorfismo em** $(U, +, \cdot)$.

Com isto temos a

Definição 10.204 *Dizemos que os espaços vetoriais reais (ou complexos)* $(U, +, \cdot)$ *e* $(V, +, \cdot)$ *são* **isomorfos**, *se existir um isomorfismo de* $(U, +, \cdot)$ *em* $(V, +, \cdot)$.

Os exemplos abaixo nos fornecerão isomorfismos e, portanto, os respectivos espaços vetoriais reais (ou complexos) serão isomorfos.

Exemplo 10.205 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *espaço vetorial real (respectivamente, complexo) e* $I_U : U \to U$, *o operador identidade em* $(U, +, \cdot)$.

Então I_U *é um automorfismo em* $(U, +, \cdot)$.

Resolução:

Sabemos que I_U é um operador linear em $(U, +, \cdot)$, que é injetor e sobrejetor.

Logo o operador linear I_U é um automorfismo em $(U, +, \cdot)$.

□

Exemplo 10.206 *Sejam* $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ *e* $(\mathscr{P}_{n-1}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *espaços vetoriais (onde + e · são as operações usuais de* $\mathbb{R}^n$ *e de* $\mathscr{P}_{n-1}(\mathbb{R})$, *respectivamente) e a função* $T : \mathbb{R}^n \to \mathscr{P}_{n-1}(\mathbb{R})$, *dada por*

$$T(a_o, a_1, \cdots, a_{n-1}) \doteq p, \quad \textit{para cada} \quad (a_o, a_1, \cdots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n, \tag{10.207}$$

onde $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é dado por*

$$p(t) \doteq a_o + a_1 t + \cdots + a_n t^{n-1}, \quad \textit{para cada} \quad t \in \mathbb{R}. \tag{10.208}$$

Mostre que a aplicação $\underline{T}$ *é um isomorfismo de* $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ *em* $(\mathscr{P}_{n-1}(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação que a aplicação $\underline{T}$ é uma transformação linear de $(\mathbb{R}^n\,,+\,,\cdot)$ em $(\mathscr{P}_{n-1}(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$.

Observemos que a transformação linear $\underline{T}$ é injetora.

De fato, pois se

$$x \doteq (a_o\,,a_1\,,\cdots,a_n) \in \mathcal{N}(T)\,,$$

segue, de (10.208), que

$$T(x) = \underbrace{O}_{\text{polinômio nulo}}\,,$$

$$\text{ou seja,} \qquad a_o + a_1\,t + \cdots + a_n\,t^{n-1} = 0\,, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}\,,$$

o que implicará, necessariamente, que

$$a_o = a_1 = \cdots a_n = 0\,,$$

ou seja,

$$x = (0\,,0\,,\cdots,0) \in \mathbb{R}^n\,.$$

Portanto

$$\mathcal{N}(T) = \{O\}$$

que, pela Proposição (10.132), implicará que a transformação linear $\underline{T}$ será injetora.

Observemos também que a transformação linear $\underline{T}$ é sobrejetora.

De fato, pois se $p \in \mathscr{P}_{n-1}(\mathbb{R})$, segue que existem

$$a_o, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$$

de modo que

$$p(t) = a_o + a_1\,t + \cdots + a_{n-1}\,t^{n-1}\,, \quad \text{para cada} \quad t \in \mathbb{R}\,. \tag{10.209}$$

Logo se considerarmos

$$x \doteq (a_o\,,a_1\,,\cdots,a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n\,,$$

teremos

$$T(x) \overset{(10.207)\text{ e }(10.209)}{=} p\,,$$

ou seja, a transformação linear $\underline{T}$ é sobrejetora.

Portanto, a transformação linear $\underline{T}$ é bijetora, ou seja, um isomorfismo de $(\mathbb{R}^n\,,+\,,\cdot)$ em $(\mathscr{P}_{n-1}(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$, como afirmamos.

$\square$

Observação 10.210 *Um modo alternativo de mostrar a sobrejetividade da aplicção* T *do Exemplo* (10.206) *(dada por* (10.207)*), seria utilizar o Corolário* (10.162).

De fato, como

$$\dim[\mathbb{R}^n] = n = \dim[\mathscr{P}_{n-1}(\mathbb{R})]$$

e mostramos que a transformação linear T *(dada por* (10.207)*) é injetora, segue do Corolário* (10.162) *(mais precisamente, vale 2.), que ela será bijetora.*

Consideremos agora o:

Exemplo 10.211 *Consideremos* $(M_{m\times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *e* $(\mathbb{R}^{mn}, +, \cdot)$ *espaços vetoriais (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *e de* $\mathbb{R}^{mn}$*, respectivamente) e a aplicação* $T : M_{m\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{mn}$*, dada por*

$$T[(a_{ij})] \doteq (a_{11}, \cdots, a_{1n}, a_{21}, \cdots, a_{2n}, \cdots, a_{m1}, \cdots, a_{mn}), \qquad (10.212)$$

para

$$A \doteq (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R}).$$

Mostre que a aplicação $\underline{T}$ *é um isomorfismo de* $(M_{m\times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *em* $(\mathbb{R}^{mn}, +, \cdot)$.

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação que a aplicação T é uma transformação linear de $(M_{m\times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ em $(\mathbb{R}^{mn}, +, \cdot)$.

Observemos que a transformação linear $\underline{T}$ é injetora.

De fato, pois se

$$(a_{ij}) \in \mathcal{N}(T) \qquad (10.213)$$

segue que

$$T[(a_{ij})] \overset{(10.213)}{=} \underbrace{O}_{mn\text{-upla nula}}$$

se, e somente se, $\quad (a_{11}, \cdots, a_{1n}, \cdots, a_{m1}, \cdots, a_{mn}) = \underbrace{(0, 0, \cdots, 0)}_{\in\mathbb{R}^{mn}},$

o que implicará, necessariamente, que

$$a_{ij} = 0, \quad \text{para cada} \quad i \in \{1, 2, \cdots, m\} \;\text{ e }\; j \in \{1, 2, \cdots, n\}$$

ou seja,

$$\mathcal{N}(T) = \{O\},$$

que, pela Proposição (10.132), implicará que a transformação linear $\underline{T}$ será injetora.

Observemos também que a transformação linear $\underline{T}$ é sobrejetora.

De fato, pois se

$$x \doteq (x_1, x_2, \cdots, x_{mn}) \in \mathbb{R}^{mn}$$

considerando-se

$$\begin{aligned}
a_{1j} &\doteq x_j, \quad \text{para cada} \quad j \in \{1, 2, \cdots, n\},\\
a_{2j} &\doteq x_j, \quad \text{para cada} \quad j \in \{n+1, n+2, \cdots, 2n\},\\
&\cdots\\
a_{mj} &\doteq x_j, \quad \text{para cada} \quad j \in \{mn-n+1, mn-n+2 \cdots, mn\}, \qquad (10.214)
\end{aligned}$$

teremos

$$T[(a_{ij})] \overset{(10.212)\text{ e }(10.214)}{=} (x_1, x_2, \cdots, x_{mn}) = x,$$

ou seja, a transformação linear $\underline{T}$ é sobrejetora.

Logo, a transformação linear $\underline{T}$ é bijetora, ou seja, um isomorfismo de $(M_{m\times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ em $(\mathbb{R}^{mn}, +, \cdot)$, como afirmamos.

$\square$

Observação 10.215 *Um modo alternativo de mostrar a sobrejetividade da aplicção* T *do Exemplo* (10.211) *(dada por* (10.212)*), seria utilizar o Corolário* (10.162).

De fato, como

$$\dim\left[M_{m\times n}(\mathbb{R})\right] = n = \dim\left[\mathbb{R}^{m\,n}\right]$$

e mostramos que a transformação linear T *(dada por* (10.212)*) é injetora, segue do Corolário* (10.162) *(mais precisamente, vale* 2.*), que ela será bijetora.*

Temos também o:

Exemplo 10.216 *Sejam* $\left(\mathbb{R}^3, +, \cdot\right)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de soma de ternas e multiplicação de número real por terna, respectivamente) e a aplicação* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*, dada por*

$$T(x, y, z) \doteq (x - y, x - z, z - y), \quad \textit{para cada} \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \tag{10.217}$$

A aplicação $\underline{T}$ *é um automorfismo em* $\left(\mathbb{R}^3, +, \cdot\right)$ *?*

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação que a aplicação $\underline{T}$ é um operador linear em $\left(\mathbb{R}^3, +, \cdot\right)$.

Verifiquemos se o operador linear $\underline{T}$ é injetor, que, pela Proposição (10.132), é equivalente a mostrar que

$$\mathcal{N}(T) = \{O\}$$

Para isto, notemos que se $(x, y, z) \in \mathcal{N}(T)$, teremos:

$$T(x, y, z) = (0, 0, 0)$$

que, por (10.217) é equivalente a: $$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 0 \\ z - y = 0 \end{cases}$$

ou seja (Exercício): $$x = y = z.$$

Logo, o operador linear T **<u>não</u>** é injetor, pois, por exemplo,

$$T(1, 1, 1) = (0, 0, 0).$$

Assim, o operador linear $\underline{T}$ **<u>não</u>** será um automorfismo em $\left(\mathbb{R}^3, +, \cdot\right)$.

$\square$

Temos a:

Proposição 10.218 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *e* $(V, +, \cdot)$ *espaços vetoriais reais (ou complexos), tal que*

$$\dim(U) = n < \infty, \tag{10.219}$$

e $T : U \to V$ *é um isomorfismo de* $(U, +, \cdot)$ *em* $(V, +, \cdot)$.

Então o espaço vetorial real (respectivamente, complexo) $(V, +, \cdot)$ *tem dimensão finita e, além disso,*

$$\dim(V) = \dim(U) = n. \tag{10.220}$$

Prova:

Como, por hipótese, a transformação linear $\underline{T}$ é injetora segue, da Proposição (10.132), que

$$\mathcal{N}(T) = \{O\}. \tag{10.221}$$

Assim teremos:

$$\dim[\mathcal{N}(T)] = 0. \tag{10.222}$$

Como, por hipótese, a transformação linear $\underline{T}$ é sobrejetora, segue que

$$T(U) = V. \tag{10.223}$$

De (10.219), e do Teorema do núcleo e da imagem (isto é, do Teorema (10.143)), segue que

$$\begin{aligned} \dim(U) &= \underbrace{\dim[\mathcal{N}(T)]}_{\overset{(10.222)}{=} 0} + \dim[\underbrace{T(U)}_{\overset{(10.223)}{=} V}] \\ &= \dim(V), \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

∎

Temos um resultado semelhante quando a dimensão do contra-domínio da transformação linear é finita, a saber:

Corolário 10.224 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *e* $(V, +, \cdot)$ *espaços vetoriais reais (ou complexos), tal que*

$$\dim(V) = n < \infty \tag{10.225}$$

e $T : U \to V$ *é um isomorfismo de* $(U, +, \cdot)$ *em* $(V, +, \cdot)$.

Então

$$\dim(U) = \dim(V). \tag{10.226}$$

Prova:

Como, por hipótese, a transformação linear $\underline{T}$ é bijetora, segue que existe a aplicação inversa $T^{-1} : V \to U$.

Além disso, pela Proposição (10.111), esta também será uma transformação linear bijetora de $(V, +, \cdot)$ em $(U, +, \cdot)$, ou seja, um isomorfismo de $(V, +, \cdot)$ em $(U, +, \cdot)$.

Por outro lado, como
$$\dim(V) < \infty\,,$$
pela Proposição (10.218) acima, segue que
$$\dim(U) = \dim(V)\,,$$
completando a demonstração do resultado.

∎

Temos também a

Proposição 10.227 *Sejam* $(U\,,+\,,\cdot)$ *e* $(V\,,+\,,\cdot)$ *espaços vetoriais reais (ou complexos) de dimensão finita* $\underline{n}$.

Se
$$\mathcal{B} \doteq \{u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_n\} \quad e \quad \mathcal{C} \doteq \{v_1\,,v_2\,,\cdots\,,v_n\}$$
são bases (ordenadas) de $(U\,,+\,,\cdot)$ *e de* $(V\,,+\,,\cdot)$*, respectivamente, então a aplicação* $T : U \to V$*, dada por*
$$T(u) \doteq x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + \cdots + x_n \cdot v_n\,, \quad \textit{para cada} \quad u \in U\,, \tag{10.228}$$
onde
$$u = x_1\cdot u_1 + x_1\cdot v_2 + \cdots + x_n\cdot u_n\,, \quad \textit{para} \quad x_1\,,x_2\,,\cdots\,,x_n \in \mathbb{R}\ \textit{(respectivamente, } \mathbb{C}\textit{)}\,, \tag{10.229}$$
isto é,
$$T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot u_i\right) \doteq \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i\,, \tag{10.230}$$
é um isomorfismo de $(U\,,+\,,\cdot)$ *em* $(V\,,+\,,\cdot)$.

Além disso, temos que
$$T(u_j) = v_j\,, \quad \textit{para cada} \quad j \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}\,, \tag{10.231}$$
isto é, o isomorfismo $T : U \to V$*, dado por* (10.228)*, leva a base (ordenada)* $\mathcal{B}$*, do espaço vetorial* $(U\,,+\,,\cdot)$*, na base (ordenada)* $\mathcal{C}$*, do espaço vetorial* $(V\,,+\,,\cdot)$.

Prova:

Primeiramente, notemos que a função $\underline{T}$ está bem definida, pois as coordenadas de um vetor, em relação a uma base (ordenada) fixada, são unicamente determinadas por ele e pela respectiva base (ordenada) fixada.

Verifiquemos que $\underline{T}$ é uma transformação linear de $(U\,,+\,,\cdot)$ em $(V\,,+\,,\cdot)$.

Para isto, notemos que se
$$w_1\,,w_2 \in U\,,$$
como o conjunto de vetores $\mathcal{B}$ é uma base de $(U\,,+\,,\cdot)$, podemos encontrar (únicos)
$$x_1\,,x_2\,,\cdots\,,x_n\,,x_y\,,y_2\,,\cdots\,,y_n \in \mathbb{R}\ \text{(respectivamente, } \mathbb{C})\,,$$

de modo que

$$w_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot u_i \quad \text{e} \quad w_2 = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot u_i \,. \tag{10.232}$$

Além disso, notemos que, se $\lambda \in \mathbb{R}$ (respectivamente, $\mathbb{C}$), teremos

$$\begin{aligned} w_1 + \lambda \cdot w_2 &\overset{(10.232)}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot u_i + \lambda \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot u_i \right) \\ &\overset{\text{Propriedades de espaço vetorial}}{=} \sum_{i=1}^{n} (x_i + \lambda\, y_i) \cdot u_i \,. \end{aligned} \tag{10.233}$$

Logo

$$\begin{aligned} T(w_1 + \lambda \cdot w_2) &\overset{(10.233)}{=} T\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + \lambda\, y_i) \cdot u_i \right) \\ &\overset{(10.230)}{=} \sum_{i=1}^{n} (x_i + \lambda\, y_i) \cdot v_i \\ &\overset{\text{Propriedades de espaço vetorial}}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i + \lambda \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot v_i \right) \\ &\overset{(10.230)}{=} T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot u_i \right) + \lambda \cdot T\left(\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot u_i \right) \\ &\overset{(10.232)}{=} T(w_1) + \lambda \cdot T(w_2) \,, \end{aligned}$$

mostrando que a aplicação T, dada por (10.229), é uma transformação linear de $(U\,,+\,,\cdot)$ em $(V\,,+\,,\cdot)$.

Afirmamos que a transformação linear T é injetora.

Pela Proposição (10.132), basta mostra que

$$\mathcal{N}(T) = \{O\} \,. \tag{10.234}$$

Para isto, notemos que se

$$w \doteq \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot u_i \in \mathcal{N}(T) \,, \tag{10.235}$$

$$\begin{aligned} \text{deveremos ter:} \qquad O &= T(w) \\ &\overset{(10.235)}{=} T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot u_i \right) \\ &\overset{(10.230)}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i \,. \end{aligned}$$

Como o conjunto

$$\mathcal{C} = \{v_1\,, v_2\,, \cdots\,, v_n\}$$

é L.I. em $(V,+,\cdot)$ (pois é uma base de $(V,+,\cdot)$), segue que

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0\,,$$

ou seja,

$$w \stackrel{(10.235)}{=} O\,,$$

mostrando (10.234), e assim, a transformação linear $\underline{T}$ será injetora.

Como, por hipótese,

$$\dim(U) = \dim(V) = n < \infty\,,$$

do Corolário (10.162) (vale 2.), segue-se que a transformação linear $\underline{T}$ será bijetora.

Logo, a transformação linear $\underline{T}$ é um isomorfismo de $(U,+,\cdot)$ em $(V,+,\cdot)$.

Finalmente, notemos que, para cada $i \in \{1,2,\cdots,n\}$, teremos

$$\begin{aligned} T(u_i) &= T(0\cdot u_1 + \cdots + 0\cdot u_{i-1} + 1\cdot u_i + 0\cdot u_{i+1} + \cdots + 0\cdot u_n) \\ &\stackrel{(10.230)}{=} \underbrace{0\cdot v_1}_{=O} + \cdots + \underbrace{0\cdot v_{i-1}}_{=O} + \underbrace{1\cdot v_i}_{=v_i} + \underbrace{0\cdot v_{i+1}}_{=O} + \cdots + \underbrace{0\cdot v_n}_{=O} \\ &= v_i\,, \end{aligned}$$

mostrando (10.231) e completando a demonstração do resultado.

∎

O Corolário (10.224) e a Proposição (10.227) resultam no:

Corolário 10.236 *Dois espaços vetoriais reais (ou complexos) de dimensões finitas são isomorfos se, e somente se, têm a mesma dimensão.*

Prova:

Necessidade:

Segue do Corolário (10.224).

Suficiência:

Segue da Proposição (10.227), completando a demonstração do resultado.

∎

13.10.2015 - 18.a

Terminaremos a seção com o:

Corolário 10.237 *Sejam $(U,+,\cdot)$ um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) de dimensão finita e igual a $\underline{n}$ e $(V,+,\cdot)$ um espaço vetorial de dimensão real (respectivamente, complexo) de dimensão finita e igual a $\underline{m}$, isto é,*

$$\dim(U) = n \quad e \quad \dim(V) = m\,. \tag{10.238}$$

Então o espaço vetorial real (respectivamente, complexo) $(\mathcal{L}(U;V),+,\cdot)$ (onde $+$ e $\cdot$ são as operações usuais de soma de funções e multiplicação de número real (respectivamente, complexo) por função, respectivamente) é isomorfo ao espaço vetorial real (respectivamente, complexo) $(M_{m\times n}(\mathbb{R}),+,\cdot)$ (respectivamente, $(M_{m\times n}(\mathbb{C}),+,\cdot)$) (onde $+$ e $\cdot$ são as operações usuais soma de matrizes e multiplicação de número real (respectivamente, complexo) por matriz, respectivamente).

Prova:

Notemos que, do Teorema (10.55), temos que

$$\dim[\mathcal{L}(U\,;\,V)] = m\,n\,.$$

Por outro lado, do Exemplo (7.31), temos que

$$\dim[M_{m\times n}(\mathbb{R})] = m\,n\,.$$

Logo, do Corolário (10.236) acima, segue que os espaços vetoriais reais $(\mathcal{L}(U\,;\,V)\,,+\,,\cdot)$ e $(M_{m\times n}(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$ (respectivamente, $(M_{m\times n}(\mathbb{C})\,,+\,,\cdot)$) são isomorfos, completando a demonstração do resultado.

Deixaremos os detalhes da demonstração do caso complexo como exercício para o leitor.

∎

10.5 Matriz de uma Transformação Linear

Como vimos o Corolário (10.237), toda transformação linear entre dois espaços vetoriais reais (ou complexos) de dimensões finitas, pode ser associada uma matriz real (ou complexa) e reciprocamente.

Nesta seção obteremos de modo mais explícito como fazer esta associação (bijetivamente).

10.5.1 Definição e Exemplos

Definição 10.239 *Sejam* $(U\,,+\,,\cdot)$ *e* $(V\,,+\,,\cdot)$ *espaços vetoriais reais (respectivamente complexos) de dimensões finitas,* $\underline{n}$ *e* $\underline{m}$*, respectivamente, e* $T \in \mathcal{L}(U\,;\,V)$.

Fixemos as bases (ordenadas)

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_n\} \quad e \quad \mathcal{C} \doteq \{v_1\,,v_2\,\cdots\,,v_m\}$$

de $(U\,,+\,,\cdot)$ *e* $(V\,,+\,,\cdot)$*, respectivamente.*

Como o conjunto de vetores $\mathcal{C}$ *é uma base (ordenada) de* $(V\,,+\,,\cdot)$*, para cada* $j \in \{1\,,2\,,\cdots\,,m\}$*, podemos encontrar*

$$a_{1j}\,,a_{2j}\,,\cdots\,,a_{mj} \in \mathbb{R} \quad \textit{(respectivamente, } \mathbb{C}\textit{)}\,,$$

de modo que

$$T(u_j) = a_{1j}\cdot v_1 + a_{2j}\cdot v_1 + \cdots + a_{mj}\cdot v_m\,. \tag{10.240}$$

Deste modo, podemos construir a seguinte matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(\mathbb{R}) \quad \textit{(respectivamente, } M_{m\times n}(\mathbb{C})\textit{)}$$

que será chamada de matriz da transformação $\underline{T}$, com relação às bases (ordenadas) $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ *e será denotada por*

$$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\,,$$

ou seja,

$$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \doteq \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{10.241}$$

Se

$$U = V \quad e \quad \mathcal{B} = \mathcal{C}\,, \tag{10.242}$$

usaremos a notação $[T]_{\mathcal{B}}$*, para denotar a matriz da transformação* $\underline{T}$*, em relação às bases (ordenadas)* $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{B}$*, do espaço vetorial real (respectivamente, complexo)* $(U\,,+\,,\cdot)$*, isto é, par cada* $i \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}$*, podemos encontrar*

$$a_{1j}\,,a_{2j}\,,\cdots\,,a_{mj} \in \mathbb{R} \quad (\textit{respectivamente, } \mathbb{C})\,,$$

de modo que

$$T(u_j) = a_{1j}\cdot u_1 + a_{2j}\cdot u_1 + \cdots + a_{nj}\cdot u_n\,, \tag{10.243}$$

e assim

$$[T]_{\mathcal{B}} \doteq \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}) \ (\textit{respectivamente, } M_n(\mathbb{C}))\,. \tag{10.244}$$

Consideremos os exemplos:

Exemplo 10.245 *Sejam* $(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot)$ *e* $(\mathbb{R}^2\,,+\,,\cdot)$ *espaços vetoriais reais (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $\mathbb{R}^3$ *e* $\mathbb{R}^2$*, respectivamente) e a aplicação* $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *dada por*

$$T(x\,,y\,,z) \doteq (x+y\,,x-z)\,, \quad \textit{para cada} \quad (x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,. \tag{10.246}$$

Mostre que $T \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^2\right)$ *e encontre a matriz da transformação linear* $\underline{T}$*, em relação às bases canônicas de* $(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot)$ *e* $(\mathbb{R}^2\,,+\,,\cdot)$*, respectivamente.*

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor verificar que a aplicação $\underline{T}$ é uma transformação linear de $(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot)$ em $(\mathbb{R}^2\,,+\,,\cdot)$.

As bases canônicas de $(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot)$ e $(\mathbb{R}^2\,,+\,,\cdot)$ são dadas por:

$$\mathcal{B} \doteq \{\underbrace{(1\,,0\,,0)}_{\doteq u_1}\,,\underbrace{(0\,,1\,,0)}_{\doteq u_2}\,,\underbrace{(0\,,0\,,1)}_{\doteq u_3}\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} \doteq \{\underbrace{(1\,,0)}_{\doteq v_1}\,,\underbrace{(0\,,1)}_{\doteq v_2}\}\,, \tag{10.247}$$

respectivamente.

Mas (veja (10.240)):

$$
\begin{aligned}
T(u_1) &\overset{(10.247)}{=} T(1\,,0\,,0) \\
&\overset{(10.246)}{=} (1+0\,,1-0) \\
&= (1\,,1) \\
&= 1\cdot(1\,,0) + 1\cdot(0\,,1) \\
&\overset{(10.247)}{=} \underbrace{1}_{\doteq a_{11}}\cdot v_1 + \underbrace{1}_{\doteq a_{21}}\cdot v_2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T(u_2) &\overset{(10.247)}{=} T(0\,,1\,,0) \\
&\overset{(10.246)}{=} (0+1\,,0-0) \\
&= (1\,,0) \\
&= 1\cdot(1\,,0) + 0\cdot(0\,,1) \\
&\overset{(10.247)}{=} \underbrace{1}_{\doteq a_{12}}\cdot v_1 + \underbrace{0}_{\doteq a_{22}}\cdot v_2\,, \\
T(u_3) &\overset{(10.247)}{=} T(0\,,0\,,1) \\
&\overset{(10.246)}{=} (0+0\,,0-1) \\
&= (0\,,-1) \\
&= 0\cdot(1\,,0) + (-1)\cdot(0\,,1) \\
&\overset{(10.247)}{=} \underbrace{0}_{\doteq a_{13}}\cdot v_1 + \underbrace{(-1)}_{\doteq a_{23}}\cdot v_2\,.
\end{aligned}
\tag{10.248}
$$

Logo:

$$
\begin{aligned}
[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} &\overset{(10.241)}{=} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \\
&\overset{(10.248)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})\,,
\end{aligned}
\tag{10.249}
$$

completando a resolução.

□

Temos também o:

Exemplo 10.250 *Sejam* $(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot)$ *e* $(\mathbb{R}^2\,,+\,,\cdot)$ *espaços vetoriais reais (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $\mathbb{R}^3$ *e* $\mathbb{R}^2$*, respectivamente) e a aplicação* $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ *dada por*

$$
T(x\,,y\,,z) \doteq (x+y\,,x-z)\,, \quad \text{para cada} \quad (x\,,y\,,z)\in\mathbb{R}^3. \tag{10.251}
$$

Mostre que $T\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^2\right)$ *e encontre a matriz da transformação linear* $\underline{T}$ *em relação às bases (ordenadas)*

$$
\mathcal{B} \doteq \{(1\,,0\,,0)\,,(0\,,1\,,0)\,,(0\,,0\,,1)\} \quad e \quad \mathcal{D} \doteq \{(1\,,1)\,,(0\,,1)\}
$$

de $(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot)$, $(\mathbb{R}^2\,,+\,,\cdot)$, *respectivamente.*

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor verificar que $\underline{T}$ é uma transformação linear de $(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot)$ em $(\mathbb{R}^2\,,+\,,\cdot)$.

As bases (ordenadas) de $(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot)$, $(\mathbb{R}^2\,,+\,,\cdot)$ são

$$\mathcal{B} \doteq \{\underbrace{(1\,,0\,,0)}_{\doteq u_1}\,,\underbrace{(0\,,1\,,0)}_{\doteq u_2}\,,\underbrace{(0\,,0\,,1)}_{\doteq u_3}\} \quad \text{e} \quad \mathcal{D} \doteq \{\underbrace{(1\,,1)}_{\doteq v_1}\,,\underbrace{(0\,,1)}_{\doteq v_2}\}, \tag{10.252}$$

respectivamente.

Mas (veja (10.240)):

$$\begin{aligned}
T(u_1) &\overset{(10.252)}{=} T(1\,,0\,,0) \\
&\overset{(10.251)}{=} (1+0\,,1-0) \\
&= (1\,,1) \\
&= 1\cdot(1\,,1) + 0\cdot(0\,,1) \\
&\overset{(10.252)}{=} \underbrace{1}_{\doteq a_{11}}\cdot v_1 + \underbrace{0}_{\doteq a_{21}}\cdot v_2\,, \\
T(u_2) &\overset{(10.252)}{=} T(0\,,1\,,0) \\
&\overset{(10.251)}{=} (0+1\,,0-0) \\
&= (1\,,0) \\
&= 1\cdot(1\,,1) + (-1)\cdot(0\,,1) \\
&\overset{(10.252)}{=} \underbrace{1}_{\doteq a_{11}}\cdot v_1 + \underbrace{(-1)}_{\doteq a_{21}}\cdot v_2\,, \\
T(u_3) &\overset{(10.252)}{=} T(0\,,0\,,1) \\
&\overset{(10.251)}{=} (0+0\,,0-1) \\
&= (0\,,-1) \\
&= 0\cdot(1\,,1) + (-1)\cdot(0\,,1) \\
&\overset{(10.252)}{=} \underbrace{0}_{\doteq a_{11}}\cdot v_1 + \underbrace{(-1)}_{\doteq a_{21}}\cdot v_2\,.
\end{aligned} \tag{10.253}$$

Logo

$$\begin{aligned}
[T]_{\mathcal{B},\mathcal{D}} &\overset{(10.241)}{=} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \\
&\overset{(10.253)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})\,.
\end{aligned} \tag{10.254}$$

$\square$

Observação 10.255

1. *Nos Exemplos* (10.245) *e* (10.250) *acima, a transformação linear* $\underline{T}$ *é a mesma, mas como as bases (ordenadas) consideradas são diferentes (na verdade trocamos a base (ordenada)* $\mathcal{C}$ *de* $\left(\mathbb{R}^2\,,+\,,\cdot\right)$ *pela base (ordenada)* $\mathcal{D}$*), as matrizes associadas à transformação linear* $\underline{T}$ *também serão diferentes, a saber*

$$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \overset{(10.249)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \overset{(10.254)}{=} [T]_{\mathcal{B},\mathcal{D}}\,.$$

2. *Sejam* $(U\,,+\,,\cdot)$ *e* $(V\,,+\,,\cdot)$ *espaços vetoriais reais (respectivamente, complexos) de dimensões finitas, com bases (ordenadas)*

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1\,,u_2\,\cdots\,,u_n\} \quad e \quad \mathcal{C} \doteq \{v_1\,,v_2\,,\cdots\,,v_m\}\,, \tag{10.256}$$

respectivamente.

Para cada

$$i \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\} \quad e \quad j \in \{1\,,2\,,\cdots\,,m\}$$

e definamos

$$T_{ij} \in \mathcal{L}(U\,;V)$$

como na prova do Teorema (10.55), isto é, $T_{ij}: U \to V$ *definida da seguinte maneira: se* $u \in U$*, como o conjunto de vetores* $\mathcal{B}$ *é uma base (ordenada) de* $(U\,,+\,,\cdot)$*, podemos encontrar (únicos)*

$$x_1\,,x_2\,,\cdots\,,x_n \in \mathbb{R} \quad (\textit{respectivamente, } \mathbb{C})\,,$$

de modo que

$$u = x_1 \cdot u_1 + x_2 \cdot u_2 + \cdots + x_n \cdot u_n\,. \tag{10.257}$$

Assim, definiremos

$$T_{ij}(u) \doteq x_i \cdot v_j\,, \tag{10.258}$$

ou seja,

$$T_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot u_k\right) \doteq x_i \cdot v_j\,. \tag{10.259}$$

Notemos que, para cada

$$i \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\} \quad e \quad j \in \{1\,,2\,,\cdots\,,m\}$$

teremos:

$$T_{ij}(u_k) = \begin{cases} v_j\,, & \textit{de} \quad k = i \\ O\,, & \textit{para} \quad k \neq i \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 \cdot v_1 + \cdots + 0 \cdot v_{j-1} + 1 \cdot v_j + 0 \cdot v_{j+1} + \cdots + 0 \cdot v_n\,, & \textit{de} \quad k = i \\ O\,, \quad \textit{se } k \neq i \end{cases} . \tag{10.260}$$

De fato, pois, se

$$k = i\,,$$

teremos:

$$\begin{aligned} T_{ij}(u_k) &= T_{ij}\left(0 \cdot u_1 + \cdots + 0 \cdot u_{k-1} + \underbrace{1}_{= x_k \overset{k=i}{=} x_i \quad (*)} \cdot u_k + 0 \cdot u_{k+1} + \cdots + 0 \cdot u_n \right) \\ &\overset{(10.259)}{=} x_i \cdot v_j \\ &\overset{(*)}{=} 1 \cdot v_j \\ &= v_j\,. \end{aligned}$$

Consideremos agora

$$k \neq i\,.$$

Suponhamos que

$$1 \leq i < k\,.$$

O caso

$$k < i \leq n$$

é semelhante, e será deixada como exercício para o leitor.

Assim teremos

$$\begin{aligned} T_{ij}(u_k) &= T_{ij}\left(0 \cdot u_1 + \cdots + \underbrace{0}_{= x_i \quad (**)} \cdot u_i + \cdots + 0 \cdot u_{k-1} + \underbrace{1}_{= x_k} \cdot u_k + 0 \cdot u_{k+1} + \cdots + 0 \cdot u_n \right) \\ &\overset{(10.259)}{=} x_i \cdot v_j \\ &\overset{(**)}{=} 0 \cdot v_j \\ &= O\,, \end{aligned}$$

mostrando (10.260).

Logo, de (10.260), *segue que*

$$[T_{ij}]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \left(\delta_{k,l}^{(j,i)} \right)\,, \tag{10.261}$$

onde

$$\delta_{k,l}^{(j,i)} \doteq \begin{cases} 1, & \textit{para} \quad (j,i) = (k,l) \\ 0, & \textit{caso contrário} \end{cases}, \tag{10.262}$$

ou seja, para cada

$$i \in \{1, 2, \cdots, n\} \quad e \quad j \in \{1, 2, \cdots, m\},$$

a matriz

$$E_{ji} \doteq \left(\delta_{k,l}^{(j,i)}\right), \tag{10.263}$$

que possui todas as entradas iguais a $\underline{0}$, com exceção daquela ocupada pela posição da j-ésima linha e i-ésima coluna, cujo valor será igual a $\underline{1}$.

10.5.2 Propriedades da Matriz de uma Transformação Linear

Temos a:

Proposição 10.264 *Sejam $(U, +, \cdot)$ e $(V, +, \cdot)$ espaços vetoriais reais (respectivamente, complexos) de dimenssões finitas e iguais a $\underline{n}$ e $\underline{m}$, respectivamente,*

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1, u_2, , \cdots, u_n\} \quad e \quad \mathcal{C} \doteq \{v_1, v_2, \cdots, v_m\}, \tag{10.265}$$

bases (ordenadas) de $(U, +, \cdot)$ e $(V, +, \cdot)$, respectivamente, e $T, S \in \mathcal{L}(U; V)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ (respectivamente, $\mathbb{C}$).

Então

$$[T + \lambda \cdot S]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} + \lambda\, [S]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\,. \tag{10.266}$$

Prova:

De fato, suponhamos que

$$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = (a_{ij}) \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = (b_{ij})\,, \tag{10.267}$$

isto é, para cada $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, de (10.240) e (10.241), segue que

$$T(u_j) = a_{1j} \cdot v_1 + \cdots + a_{mj} \cdot v_m\,. \tag{10.268}$$

$$S(u_j) = b_{1j} \cdot v_1 + \cdots + b_{mj} \cdot v_m\,. \tag{10.269}$$

Logo, para cada $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, teremos

$$\begin{aligned}(T + \lambda \cdot S)(u_j) &= T(u_j) + \lambda \cdot S(u_j) \\ &\overset{(10.268)\text{ e }(10.269)}{=} (a_{1j} \cdot v_1 + \cdots + a_{mj} \cdot v_m) + \lambda \cdot (b_{1j} \cdot v_1 + \cdots + b_{mj} \cdot v_m) \\ &\overset{\text{Propriedades de espaço vetorial}}{=} (a_{1j} + \lambda\, b_{1j}) \cdot v_1 + \cdots + (a_{mj} + \lambda\, b_{mj}) \cdot v_m\,,\end{aligned}$$

ou seja,

$$[T + \lambda \cdot S]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = (a_{ij} + \lambda\, b_{ij})\,.$$

Logo, de (10.240) e (10.241) (aplicado à transformação linear $T + \lambda \cdot S$), segue que

$$[T + \lambda \cdot S]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} a_{11} + \lambda\, b_{11} & \cdots & a_{1n} + \lambda\, b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + \lambda\, b_{m1} & \cdots & a_{mn} + \lambda\, b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Propriedades das operações de matrizes}}{=} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+ & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\overset{(10.267)}{=} [T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} + \lambda\, [S]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \,,$$

completando a demonstração do resultado.

∎

A seguir, temos dois resultados que nos fornecerão exemplos básicos associados a matrizes de uma transformação linear:

Proposição 10.270 *Sejam $(U, +, \cdot)$ e $(V, +, \cdot)$ espaços vetoriais reais (respectivamente, complexos) de dimenssões finitas, munidos das bases (ordenadas) $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, respectivamente, e $T \in \mathcal{L}(U; V)$ a transformação linear nula, isto é,*

$$T(u) \doteq O \,, \qquad \textit{para cada} \quad u \in U \,.$$

Então

$$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = O \,, \tag{10.271}$$

onde O denota a matriz nula.

Prova:

Sejam

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1, u_2, \cdots, u_n\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} \doteq \{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$$

bases (ordenadas) de $(U, +, \cdot)$ e $(V, +, \cdot)$, respectivamente.

Como

$$T(u) = O \,, \qquad \text{para cada} \quad u \in U \,,$$

segue que, para cada $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, teremos:

$$\begin{aligned} T(u_j) &= O \\ &= \underbrace{0}_{\doteq a_{1j}} \cdot v_1 + \underbrace{0}_{\doteq a_{2j}} \cdot v_2 + \cdots + \underbrace{0}_{\doteq a_{mj}} \cdot v_m \,, \\ \text{ou seja,} \qquad & a_{ij} = 0 \,, \quad \text{para} \quad i \in \{1, 2, \cdots, m\} \quad \text{e} \quad j \in \{1, 2, \cdots, n\} \,, \\ \text{ou ainda,} \qquad & [T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = O \,, \end{aligned}$$

completando a demonstração do resultado.

∎

Temos também a:

Proposição 10.272 *Sejam* $(U\,,+\,,\cdot)$ *espaço vetorial real (respectivamente, complexo) de dimensão finita,* $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{C}$ *duas bases (ordenadas) de* $(U\,,+\,,\cdot)$ *e* $I_U \in \mathcal{L}(U)$ *o operador identidade em* $(U\,,+\,,\cdot)$*, isto é,*

$$I(u) \doteq u\,, \quad \textit{para cada} \quad u \in U\,.$$

Então

$$[I_U]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = M_{\mathcal{C}\,\mathcal{B}}\,.$$

Prova:

De fato, consideremos

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1\,, u_2\,, \cdots, u_n\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} \doteq \{v_1\,, v_2\,, \cdots, v_n\}$$

bases (ordenadas) de $(U\,,+\,,\cdot)$.

Para cada

$$j \in \{1\,,2\,,\cdots,n\}\,,$$

como $u_j \in U$ e o conjunto de vetores $\mathcal{B}$ é base (ordenada) de $(U\,,+\,,\cdot)$, segue que existem escalares

$$\alpha_{1j}\,, \alpha_{2j}\,, \cdots, \alpha_{nj} \in \mathbb{R} \text{ (respectivamente, } \mathbb{C})\,,$$

tais que

$$u_j = \alpha_{1j}\cdot v_1 + \alpha_{2j}\cdot v_2 + \cdots + \alpha_{nj}\cdot v_n\,. \tag{10.273}$$

Logo, da definição de matriz de mudança de base, da base (ordenada) $\mathcal{C}$, para a base (ordenada) $\mathcal{B}$ (veja a Definição (8.3)), temos que:

$$M_{\mathcal{C}\,\mathcal{B}} = (\alpha_{ij})\,. \tag{10.274}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} I_U(u_j) &= u_j \\ &\overset{(10.273)}{=} \alpha_{1j}\cdot v_1 + \alpha_{2j}\cdot v_2 + \cdots + \alpha_{nj}\cdot v_n\,, \end{aligned}$$

que implicará que a matriz do operador linear, em relação às bases (ordenadas) $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, será dada por:

$$[I_U]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = (\alpha_{ij})\,, \tag{10.275}$$

ou seja, de (10.274) e (10.275), segue que

$$[I_U]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = M_{\mathcal{C}\,\mathcal{B}}\,,$$

como queríamos demonstrar, completando a demonstração do resultado.

∎

Um outro resultado importante é dado pela:

Proposição 10.276 *Sejam* $(U, +, \cdot)$, $(V, +, \cdot)$ *e* $(W, +, \cdot)$ *espaços vetoriais reias (respectivamente, complexos) de dimensões finitas, de modo que os conjuntos*

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}, \quad \mathcal{C} \doteq \{v_1, v_2, \cdots, v_m\} \quad e \quad \mathcal{D} \doteq \{w_1, w_2, \cdots, w_p\} \tag{10.277}$$

são base (ordenadas) de $(U, +, \cdot)$, $(V, +, \cdot)$ *e* $(W, +, \cdot)$, *respectivamente.*

Suponhamos que $T \in \mathcal{L}(U; V)$ *e* $S \in \mathcal{L}(V; W)$.

Então

$$[S \circ T]_{\mathcal{B},\mathcal{D}} = [S]_{\mathcal{C},\mathcal{D}}[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}. \tag{10.278}$$

Prova:

O diagrama abaixo ilustra a situação acima:

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "T"] & V \arrow[r, "S"] & W \\
\mathcal{B} \arrow[rr, bend right, "S \circ T"'] & \mathcal{C} & \mathcal{D}
\end{tikzcd}$$

Consideremos

$$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = (\alpha_{ij}) \quad \text{e} \quad [S]_{\mathcal{C},\mathcal{D}} = (\beta_{kl}). \tag{10.279}$$

Para cada

$$j \in \{1, 2, \cdots, n\} \quad \text{e} \quad k \in \{1, 2, \cdots, m\},$$

de (10.279) e (10.277), segue que

$$\begin{aligned}
T(u_j) &= \alpha_{1j} \cdot v_1 + \alpha_{2j} \cdot v_2 + \cdots + \alpha_{mj} \cdot v_m \\
&= \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \cdot v_i, \qquad (10.280) \\
S(v_k) &= \beta_{1k} \cdot w_1 + \beta_{2k} \cdot w_2 + \cdots + \beta_{pk} \cdot w_p \\
&= \sum_{k=1}^{p} \beta_{ki} \cdot w_k. \qquad (10.281)
\end{aligned}$$

Logo, para cada

$$j \in \{1, 2, \cdots, n\},$$

teremos:

$$
\begin{aligned}
[S \circ T](u_j) &= S[T(u_j)] \\
&\overset{(10.280)}{=} S\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \cdot v_i\right) \\
&\overset{\text{S é transformação linear}}{=} \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \cdot S(v_i) \\
&\overset{(10.281)}{=} \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \cdot \left(\sum_{k=1}^{p} \beta_{ki} \cdot w_k\right) \\
&\overset{\text{trocando-se a ordem das somas}}{=} \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{m} \beta_{ki}\, \alpha_{ij}\right) \cdot w_k \,.
\end{aligned}
$$

Portanto, da definição de produto de matrizes (veja Apêndice (A)), segue que:

$$
\begin{aligned}
[S \circ T]_{\mathcal{B},\mathcal{D}} &= \left(\sum_{i=1}^{m} \beta_{ki}\, \alpha_{ij}\right) \\
&\overset{\text{Apêndice (A)}}{=} [S]_{\mathcal{C},\mathcal{D}} [T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \,,
\end{aligned}
$$

completando a demonstração do resultado.

∎

Como consequência temos a:

Proposição 10.282 *Sejam* $(U\,,+\,,\cdot)$, $(V\,,+\,,\cdot)$ *espaços vetoriais reais (respectivamente, complexos) de dimensões finitas, de modo que os conjuntos*

$$
\mathcal{B} \doteq \{u_1\,, u_2\,, \cdots\,, u_n\} \quad e \quad \mathcal{C} \doteq \{v_1\,, v_2\,, \cdots\,, v_m\} \tag{10.283}
$$

são base (ordenadas) de $(U\,,+\,,\cdot)$ *e* $(V\,,+\,,\cdot)$, *respectivamente.*

Suponhamos que $T \in \mathcal{L}(U\,;V)$, *possui transformação inversa* $T^{-1} \in \mathcal{L}(V\,;U)$ *(isto é,* T *é um isomorfismo de* $(U\,,+\,,\cdot)$ *e* $(V\,,+\,,\cdot)$*).*

Então

$$
\left[T^{-1}\right]_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}{}^{-1} \,. \tag{10.284}
$$

Prova:

O diagrama abaixo ilustra a situação acima:

$$
\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "T"] & V \\
\mathcal{B} & \mathcal{C} \arrow[l, bend left, "T^{-1}"]
\end{tikzcd}
$$

Como a aplicação $\underline{T}$ é uma transformação linear bijetora (isto é, é um isomorfismo de $(U, +, \cdot)$ em $(V, +, \cdot)$) segue, do Corolário (10.236), que

$$\begin{aligned} n &= \dim(U) \\ &= \dim(V) \\ &= m, \\ \text{ou seja,} \qquad m &= n. \end{aligned}$$

Logo, da Proposição (10.276) acima, segue que:

$$\begin{aligned} [T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \left[T^{-1}\right]_{\mathcal{C},\mathcal{B}} &\overset{\text{Proposição (10.276)}}{=} \Big[\underbrace{T \circ T^{-1}}_{=I_V}\Big]_{\mathcal{C},\mathcal{C}} \\ &= [I_V]_{\mathcal{C},\mathcal{C}} \\ &\overset{\text{Prop. (10.272)}}{=} M_{\mathcal{C}\mathcal{C}} \\ &= I_n \end{aligned}$$

onde I_n é a matriz identidade de ordem $\underline{n}$.

Analogamente, teremos:

$$\begin{aligned} \left[T^{-1}\right]_{\mathcal{C},\mathcal{B}} [T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} &= \Big[\underbrace{T^{-1} \circ T}_{=I_U}\Big]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} \\ &= [I_U]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} \\ &= M_{\mathcal{B}\mathcal{B}} \\ &= I_n\,. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\left[T^{-1}\right]_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}{}^{-1}\,,$$

completando a demonstração do resultado.

∎

Temos também a:

Proposição 10.285 *Seja* $(V, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) de dimensão finita.*

Suponhamos que $T \in \mathcal{L}(V)$ *e que os conjuntos*

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1, u_2, \cdots, u_n\} \quad e \quad \mathcal{C} \doteq \{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$$

sejam base (ordenadas) de $(V, +, \cdot)$.

Então:

$$[T]_{\mathcal{C}} = M_{\mathcal{C}\mathcal{B}}\, [T]_{\mathcal{B}}\, M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}\,. \tag{10.286}$$

Prova:

Notemos que, da Proposição (10.272), segue que

$$[I_V]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = M_{\mathcal{C}\mathcal{B}} \quad \text{e} \quad [I_V]_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}\mathcal{C}} . \tag{10.287}$$

Logo

$$\begin{aligned}
M_{\mathcal{C}\mathcal{B}}\,[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}\,M_{\mathcal{B}\mathcal{C}} &\overset{(10.287)}{=} [I_V]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\,[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}\,[I_V]_{\mathcal{C},\mathcal{B}} \\
&\overset{\text{Proposição (10.276)}}{=} [I_V]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}[\underbrace{T\circ I_V}_{=T}]_{\mathcal{C},\mathcal{B}} \\
&= [I_V]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\,[T]_{\mathcal{C},\mathcal{B}} \\
&\overset{\text{Proposição (10.276)}}{=} [\underbrace{I_V\circ T}_{=T}]_{\mathcal{C},\mathcal{C}} \\
&= [T]_{\mathcal{C},\mathcal{C}} \\
&= [T]_{\mathcal{C}} ,
\end{aligned}$$

completando a demonstração do resultado.

∎

Apliquemos os resultado acima aos seguintes exemplos:

Exemplo 10.288 *Sejam $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ espaço vetorial real (onde $+$ e $\cdot$ são as operações usuais de soma de pares ordenadas e multiplicação de número real por par ordenado, respectivamente) e*

$$\mathcal{B} \doteq \{(1,1),(1,-1)\} \tag{10.289}$$

uma base (ordenada) de $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

Consideremos $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} . \tag{10.290}$$

Encontre a matriz $[T]_{\mathcal{C}}$, onde $\mathcal{C}$ é a base canônica de $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação que o conjunto $\mathcal{B}$, dado por (10.289), é uma base de $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

Da Proposição (10.285) acima, temos que

$$\begin{aligned}
[T]_{\mathcal{C}} &= [T]_{\mathcal{C},\mathcal{C}} \\
&= M_{\mathcal{C}\mathcal{B}}\,\underbrace{[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}}_{=[T]_{\mathcal{B}}}\,M_{\mathcal{B}\mathcal{C}} .
\end{aligned} \tag{10.291}$$

Logo, para completarmos a resolução, basta encontrarmos as matrizes de mudança de bases

$$M_{\mathcal{C}\mathcal{B}} \quad \text{e} \quad M_{\mathcal{B}\mathcal{C}} .$$

Para isto, notemos que

$$\mathcal{B} \doteq \{\underbrace{(1\,,1)}_{\doteq u_1}, \underbrace{(1\,,-1)}_{\doteq u_2}\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} \doteq \{\underbrace{(1\,,0)}_{\doteq e_1}, \underbrace{(0\,,1)}_{\doteq e_2}\}, \tag{10.292}$$

assim, teremos:

$$\begin{aligned} e_1 &\overset{(10.292)}{=} (1\,,0) \\ &\overset{\text{Exercício}}{=} \frac{1}{2}\cdot(1\,,1) + \frac{1}{2}\cdot(1\,,-1) \\ &\overset{(10.292)}{=} \frac{1}{2}\cdot u_1 + \frac{1}{2}\cdot u_2\,, \end{aligned} \tag{10.293}$$

$$\begin{aligned} e_2 &\overset{(10.292)}{=} (0\,,1) \\ &\overset{\text{Exercício}}{=} \frac{1}{2}\cdot(1\,,1) - \frac{1}{2}\cdot(1\,,-1) \\ &\overset{(10.292)}{=} = \frac{1}{2}\cdot u_1 + \frac{-1}{2}\cdot u_2\,. \end{aligned} \tag{10.294}$$

Notemos também que:

$$\begin{aligned} u_1 &\overset{(10.292)}{=} (1\,,1) \\ &\overset{\text{Exercício}}{=} 1\cdot(1\,,0) + 1\cdot(0\,,1) \\ &\overset{(10.292)}{=} 1\cdot e_1 + 1\cdot e_2\,, \end{aligned} \tag{10.295}$$

$$\begin{aligned} u_2 &\overset{(10.292)}{=} (1\,,-1) \\ &\overset{\text{Exercício}}{=} = 1\cdot(1\,,0) + (-1)\cdot(0\,,1) \\ &\overset{(10.292)}{=} 1\cdot e_1 + (-1)\cdot e_2\,. \end{aligned} \tag{10.296}$$

Assim, teremos:

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{C}} \overset{(10.293)\text{ e }(10.294)}{=} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad M_{\mathcal{C}\mathcal{B}} \overset{(10.295)\text{ e }(10.296)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{10.297}$$

Logo, substituindo (10.297) em (10.291), obteremos:

$$\begin{aligned} [T]_{\mathcal{C}} &= [T]_{\mathcal{C},\mathcal{C}} \\ &= M_{\mathcal{C}\mathcal{B}}\, \underbrace{[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}}_{=[T]_{\mathcal{B}}}\, M_{\mathcal{B}\mathcal{C}} \\ &\overset{(10.297)\text{ e }(10.290)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &\overset{\text{Exercício}}{=} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{10.298}$$

completando a resolução.

□

Observação 10.299

1. *Notemos que poderíamos ter obtido a matriz de mudança de base, da base (ordenada) $\mathcal{B}$, para a base (ordenada) $\mathcal{C}$, encontrando a matriz inversa associada à matriz de mudança de base, da base (ordenada) $\mathcal{C}$, para a base (ordenada) $\mathcal{B}$, isto é,*
$$M_{\mathcal{C}\,\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}\,\mathcal{C}}^{-1}\,.$$

2. *Podemos obter a expressão do operador linear $\underline{T}$ do Exemplo (10.288) acima.*

   Para isto, observamos que, de (10.298), segue que
$$\begin{aligned}
T(1\,,0) &= T(e_1)\\
&\overset{(10.298)}{=} 3\cdot e_1 + (-2)\cdot e_2\\
&= 3\cdot(1\,,0) - 2\cdot(0\,,1)\\
&= (3\,,-2) \qquad (10.300)\\
T(0\,,1) &= T(e_2)\\
&\overset{(10.298)}{=} (-2)\cdot e_1 + 3\cdot e_2\\
&= -2\cdot(1\,,0) + 3\cdot(0\,,1)\\
&= (-2\,,3)\,. \qquad (10.301)
\end{aligned}$$

   Assim, teremos:
$$\begin{aligned}
T(x\,,y) &= T[x\cdot(1\,,0) + y\cdot(0\,,1)]\\
&\overset{T\ \textit{é operador linear}}{=} x\cdot T(1\,,0) + y\cdot T(0\,,1)\\
&\overset{(10.300)\ e\ (10.301)}{=} x\cdot(3\,,-2) + y\cdot(-2\,,3)\\
&= (3\,x - 2\,y\,, 3\,y - 2\,x)\,, \quad \textit{para cada} \quad (x\,,y)\in\mathbb{R}^2\,,
\end{aligned}$$

   ou seja,
$$T(x\,,y) = (3\,x - 2\,y\,, 3\,y - 2\,x)\,, \quad \textit{para cada} \quad (x\,,y)\in\mathbb{R}^2\,.$$

Temos também a :

Proposição 10.302 *Sejam $(U\,,+\,,\cdot)$ e $(V\,,+\,,\cdot)$ espaços vetoriais reais (respectivamente, complexos) de dimensão finita, de modo que os conjuntos*
$$\mathcal{B} \doteq \{u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_n\} \quad e \quad \mathcal{C} \doteq \{v_1\,,v_2\,,\cdots\,,v_m\} \qquad (10.303)$$
são base (ordenadas) de $(U\,,+\,,\cdot)$ e $(V\,,+\,,\cdot)$, respectivamente.

Suponhamos que $T\in\mathcal{L}(U\,;\,V)$ e $u\in U$.

Então
$$[T(u)]_{\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\,[u]_{\mathcal{B}}\,. \qquad (10.304)$$

Prova:

De fato, consideremos

$$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad [u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}. \tag{10.305}$$

Logo, de (10.305), segue que

$$u = a_1 \cdot u_1 + a_2 \cdot u_2 + \cdots + a_n \cdot u_n \tag{10.306}$$

$$T(u_j) = \alpha_{1j} \cdot v_1 + \alpha_{2j} \cdot v_2 + \cdots + \alpha_{mj} \cdot v_m\,, \quad \text{para cada} \quad j \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}. \tag{10.307}$$

Assim

$$\begin{aligned} T(u) &\overset{(10.306)}{=} T(a_1 \cdot u_1 + a_2 \cdot u_2 + \cdots + a_n \cdot u_n) \\ &\overset{T \text{ é transformação linear}}{=} a_1 \cdot T(u_1) + a_2 \cdot T(u_2) + \cdots + a_n \cdot T(u_n) \\ &\overset{(10.307)}{=} a_1 \cdot (\alpha_{11}\, v_1 + \alpha_{21}\, v_2 + \cdots + \alpha_{m1}\, v_m) + \cdots + a_n \cdot (\alpha_{1n} \cdot v_1 + \alpha_{2n}\, v_2 + \cdots + \alpha_{mn} \cdot v_m) \\ &\overset{\text{propriedades de espaço vetorial}}{=} (a_1\, \alpha_{11} + \cdots + a_n\, \alpha_{1n}) \cdot v_1 + \cdots + (a_1\, \alpha_{m1} + \cdots + a_n\, \alpha_{mn}) \cdot v_m\,. \end{aligned}$$

Assim, da definição de matriz das coordenadas de um vetor (veja a Defincão (7.69)), segue que

$$\begin{aligned} [T(u)]_{\mathcal{C}} &= \begin{pmatrix} a_1\, \alpha_{11} + \cdots + a_n\, \alpha_{1n} \\ \vdots \\ a_1\, \alpha_{m1} + \cdots + a_n\, \alpha_{mn} \end{pmatrix} \\ &\overset{\text{Exercício}}{=} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

que, de (10.305), é equivalente a escrever:

$$[T(u)]_{\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\, [u]_{\mathcal{B}}\,,$$

como queríamos demonstrar.

∎

Temos também a:

Proposição 10.308 *Sejam $(U\,,+\,,\cdot)$ e $(V\,,+\,,\cdot)$ espaços vetoriais reais (respectivamente, complexos) de dimensão finita, de modo que os conjuntos*

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_n\} \quad e \quad \mathcal{C} \doteq \{v_1\,,v_2\,,\cdots\,,v_m\} \tag{10.309}$$

são base (ordenadas) de $(U\,,+\,,\cdot)$ e $(V\,,+\,,\cdot)$, respectivamente, e $T \in \mathcal{L}(U, V)$.

Então a transformação linear $\underline{T}$ é um isomorfismo de $(U\,,+\,,\cdot)$ em $(V\,,+\,,\cdot)$ se, e somente se, a matriz da transformação linear $\underline{T}$, em relação às base (ordenadas) $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, for uma matriz inversível, isto é, a matriz $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ admite matriz inversa (ou ainda, seu determinante é diferente de zero).

Prova:

Notemos que, em geral, teremos

$$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \in M_{m\times n}(\mathbb{R}).$$

Suponhamos que a transformação linear $\underset{\sim}{T}$ é um isomorfismo de $(U\,,+\,,\cdot)$ em $(V\,,+\,,\cdot)$, isto é, $(U\,,+\,,\cdot)$ e $(V\,,+\,,\cdot)$ são isomorfos.

Com isto, do Corolário (10.236), deveremos ter

$$n = \dim(U) = \dim(V) = m.$$

Logo, da Proposição (10.282), seque que a matriz quadrada $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ possui matriz inversa, dada por

$$\left[T^{-1}\right]_{\mathcal{C},\mathcal{B}}.$$

Reciprocamente, suponhamos que a matriz (quadrada) $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ admita matriz inversa.

Em particular, como a matriz acima é quadrada deveremos ter

$$\begin{aligned} &m = n\,,\\ \text{isto é,}\quad &\dim(U) = \dim(V) = n\,. \end{aligned}$$

Logo, do Corolário (10.162), para completar a prova basta mostrar que a transformação linear $\underset{\sim}{T}$ é injetora.

Para isto seja $u \in \mathcal{N}(T)$, isto é,

$$\begin{aligned} T(u) &= O\\ &= 0\cdot v_1 + \cdots + 0\cdot v_n\,,\\ \text{ou seja,}\qquad [T(u)]_{\mathcal{C}} &= O\,, \end{aligned} \tag{10.310}$$

onde O denota a matriz coluna de tamanho $n \times 1$, identicamente nula.

Então, da Proposição (10.302), segue que

$$\begin{aligned} [u]_{\mathcal{B}} &= [I_U(u)]_{\mathcal{B}}\\ &= \left[\left(T^{-1}\circ T\right)(u)\right]_{\mathcal{B}}\\ &= \left[T^{-1}[T(u)]\right]_{\mathcal{B}}\\ &\overset{\text{Proposição (10.302)}}{=} \left[T^{-1}\right]_{\mathcal{C},\mathcal{B}}\,[T(u)]_{\mathcal{C}}\\ &\overset{\text{Proposição (10.282)}}{=} [T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1}\,\underbrace{[T(u)]_{\mathcal{C}}}_{\overset{(10.310)}{=}(0)}\\ &= [T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1}\,O\\ &= O\,. \end{aligned} \tag{10.311}$$

Logo, de (10.311), segue que

$$u = 0\cdot u_1 + \cdots + 0\cdot u_n = O\,,$$

portanto

$$\mathcal{N}(T) = \{O\}.$$

Assim, da Proposição (10.132), segue que a transformação linear $\underline{T}$ é injetora, e pelo Corolário (10.162), teremos que $T \in \mathcal{L}(U; V)$ é um isomorfismo de $(U, +, \cdot)$ em $(V, +, \cdot)$, completando a demonstração do resultado.

∎

Para finalizar o capítulo temos o :

Exemplo 10.312 *Sejam* $\left(\mathbb{R}^2, +, \cdot\right)$ *e* $(\mathscr{P}_1(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $\mathbb{R}^2$ *e* $\mathscr{P}_1(\mathbb{R})$*, respectivamente).*

Verifique se a aplicação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathscr{P}_1(\mathbb{R})$ *dada por*

$$T(a, b) \doteq p, \quad \textit{para cada} \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2, \tag{10.313}$$

onde

$$p(t) \doteq a + (a + b)\, t, \quad \textit{para cada} \quad t \in \mathbb{R}, \tag{10.314}$$

é um isomorfismo de $\left(\mathbb{R}^2, +, \cdot\right)$ *em* $(\mathscr{P}_1(\mathbb{R}), +, \cdot)$*.*

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor mostra que aplicação $\underline{T}$ é uma transformção linear de $\left(\mathbb{R}^2, +, \cdot\right)$ em $(\mathscr{P}_1(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Consideremos

$$\mathcal{B} \doteq \{(1, 0), (0, 1)\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} \doteq \{p_o, p_1\} \tag{10.315}$$

as bases canônicas de $\left(\mathbb{R}^2, +, \cdot\right)$ e $(\mathscr{P}_1(\mathbb{R}), +, \cdot)$, respectivamente, ou seja,

$$p_o(t) \doteq 1, \quad p_1(t) \doteq t, \quad \text{para cada} \quad t \in \mathbb{R}. \tag{10.316}$$

Notemos que, para cada $t \in \mathbb{R}$ fixado, teremos:

$$[T\underbrace{(1, 0)}_{(a,b)}](t) \overset{(10.313)\text{ e }(10.314)}{=} 1 + (1 + 0)\, t = 1 \overset{(10.316)}{=} 1 \cdot p_o(t) + 1 \cdot p_1(t), \tag{10.317}$$

$$[T\underbrace{(0, 1)}_{(a,b)}](t) \overset{(10.313)\text{ e }(10.314)}{=} 0 + (0 + 1)\, t = t \overset{(10.316)}{=} 0 \cdot p_o(t) + 1 \cdot p_1(t). \tag{10.318}$$

Com isto segue que a matriz da transformação linear T, com relação às respectivas bases (ordenadas) acima, será dada por:

$$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \overset{(10.317)\text{ e }(10.318)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como

$$\det\{[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}\} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

segue (ver Apêndices (A) e (B)) que a matriz quadrada $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$, admite matriz inversa.

Logo, da Proposição (10.308) acima, segue que a transformação linear $\underline{T}$ é um isomorfismo de $\left(\mathbb{R}^2, +, \cdot\right)$ em $(\mathscr{P}_1(\mathbb{R}), +, \cdot)$, completando a resolução.

□

10.6 Exercícios

Capítulo 11

Exercícios Resolvidos

15.10.2015 - 19.a

Neste capítulo resolveremos alguns exercícios relacionados com tópicos desenvolvidos nos capítulos anteriores.

Exemplo 11.1 *Sejam* $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *espaço vetorial real (onde + e · são as operações usuais de soma de funções e multiplicação de função por número real, respectivamete) e* $T : \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ *dada por*

$$T(p) \doteq p\,' + p\,'' , \quad \textit{para cada} \quad p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) . \tag{11.2}$$

Mostre que a aplicação $\underline{T}$ *é um operador linear em* $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$*, encontre uma base e a dimensão do núcleo de* $\underline{T}$ *e uma base e a dimensão da imagem de* $\underline{T}$*.*

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor mostrar que $T \in \mathcal{L}(\mathscr{P}(\mathbb{R}))$.

Núcleo de $\underline{T}$**:**

Lembremos que $p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ se, e somente se, existem

$$a_o , a_1 , a_2 \in \mathbb{R} ,$$

tais que

$$p(x) = a_o + a_1\, t + a_2\, t^2 , \quad \text{para cada} \quad t \in \mathbb{R} . \tag{11.3}$$

Logo, para cada $t \in \mathbb{R}$, teremos:

$$p\,'(x) = a_1 + 2\, a_2\, t \qquad \text{e} \qquad p\,''(x) = 2\, a_2 , \quad \text{para cada} \quad t \in \mathbb{R} . \tag{11.4}$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
& p \in \mathcal{N}(T) \\
\text{se, e somente se,} \quad & T(p) = O\,, \\
\text{ou seja, por (11.3):} \quad & p\,' + p\,'' \overset{(11.2)}{=} = O \\
\text{ou ainda, para cada } t \in \mathbb{R}, \text{ teremos:} \quad & p\,'(t) + p\,''(t) = 0 \\
\text{isto é, de (11.4), teremos:} \quad & \underbrace{(a_1 + 2\,a_2\,t) + 2\,a_2}_{=(a_1+2\,a_2)+2\,a_2\,t} = 0\,, \ \text{para todo } t \in \mathbb{R}\,, \\
\text{ou ainda,} \quad & \begin{cases} a_1 + 2\,a_2 = 0 \\ 2\,a_2 = 0 \end{cases}, \qquad (11.5)
\end{aligned}
$$

cuja única solução será

$$a_1 = a_2 = 0\,.$$

Desta forma, de (11.3), segue que

$$
\begin{aligned}
& p \in \mathcal{N}(T) \\
\text{se, e somente se,} \quad & p(t) = a_o\,, \quad \text{para} \quad t \in \mathbb{R}\,, \\
\text{isto é,} \quad & p = a_o \cdot p_o\,, \\
\text{onde:} \quad & p_o(t) \doteq 1\,, \quad \text{para cada} \quad t \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}
$$

Notemos que $p_o \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \setminus \{O\}$.

Logo, o conjunto $\mathcal{B} \doteq \{p_o\}$ será uma base de $(\mathcal{N}(T)\,, +\,, \cdot)$.

Em particular,

$$\dim[\mathcal{N}(T)] = 1\,. \qquad (11.6)$$

Imagem de T:

Como o conjunto

$$\mathcal{B} \doteq \{p_o\,, p_1\,, p_2\}\,,$$

onde

$$p_o(t) \doteq 1\,, \quad p_1(t) \doteq t\,, \quad p_2(t) \doteq t^2\,, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}\,, \qquad (11.7)$$

é uma base (ordenada) de $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R})\,, +\,, \cdot)$ (é a base canônica de $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R})\,, +\,, \cdot)$), que completa a base (ordenada) de $(\mathcal{N}(T)\,, +\,, \cdot)$ vemos que, pela demonstração do Teorema (10.143), que o conjunto

$$\mathcal{C} \doteq \{T(p_1)\,, T(p_2)\}$$

será uma base (ordenada) para o subespaço vetorial $(T\,(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}))\,, +\,, \cdot)$.

Em particular,

$$\dim[T\,(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}))] = 2\,, \qquad (11.8)$$

completando a resolução.

□

Observação 11.9 *Observemos que, no Exemplo* (11.1) *acima, para cada* $t \in \mathbb{R}$*, temos:*

$$\begin{aligned}[T(p_1)](t) &\overset{(11.2)}{=} {p_1}'(t) + {p_1}''(t) \\ &\overset{p_1(t)\overset{(11.7)}{=}t}{=} 1\,, \\ [T(p_2)](t) &\overset{(11.2)}{=} {p_2}'(t) + {p_2}''(t) \\ &\overset{p_2(t)\overset{(11.7)}{=}t^2}{=} 2\,t + 2\,.\end{aligned}$$

Temos também o:

Exemplo 11.10 *Sejam* $(M_2(\mathbb{R})\,, +\,, \cdot)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de soma de matrizes e multiplicação de número real por matriz, respcetivamente) e a aplicação* $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$*, dada por*

$$T(X) \doteq A\,X + X\,, \quad \textit{para cada} \quad X \in M_2(\mathbb{R})\,, \tag{11.11}$$

onde

$$A \doteq \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}. \tag{11.12}$$

Mostre que a aplicação $\underline{T}$ *é um operador linear em* $(M_2(\mathbb{R})\,, +\,, \cdot)$*, encontre uma base e a dimensão do núcleo de* $\underline{T}$ *e uma base e a dimensão da imagem de* $\underline{T}$*.*

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor mostrar que $T \in \mathcal{L}(M_2(\mathbb{R}))$.

Núcleo de $\underline{T}$:

Observe que

$$T(X) \overset{(11.11)}{=} (A + I_2)\,X\,, \quad \text{para cada} \quad X \in M_2(\mathbb{R})\,,$$

onde I_2 é a matriz identidade de ordem dois.

Logo se

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{11.13}$$

temos que

$$X \in \mathcal{N}(T)$$

$$\text{se, e somente se,} \qquad \underbrace{A\,X + X}_{(A+I_2)\,X} = O\,.$$

Como

$$A + I_2 \overset{(11.12)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},$$

segue que $X \in \mathcal{N}(T)$

se, e somente se, $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

ou seja, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

ou ainda, $\begin{cases} a + 2\,c = 0 \\ b + 2\,d = 0 \end{cases}$

ou, equivalentemente, $\begin{cases} a = -2\,c \\ b = -2\,d \end{cases}.$

Assim, deveremos que

$$X = \begin{pmatrix} -2\,c & -2\,d \\ c & d \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -2\,c & -0 \\ c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2\,d \\ 0 & d \end{pmatrix}$$
$$= c \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\doteq A_1} + d \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\doteq A_2}. \tag{11.14}$$

Notemos que o conjunto

$$\mathcal{B} \doteq \{A_1\,, A_2\}$$

é L.I., em $(M_2(\mathbb{R})\,, +\,, \cdot)$.

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Portando o conjunto de vetores $\mathcal{B}$ será uma base de $(\mathcal{N}(T)\,, +\,, \cdot)$.

Em particular,

$$\dim[\mathcal{N}(T)] = 2\,. \tag{11.15}$$

Imagem de $\underline{T}$:

Utilizando o Teorema do completamento (isto é, o Teorema (7.33)), sabemos que podemos encontrar matrizes

$$A_3\,, A_4 \in M_2(\mathbb{R})\,,$$

de modo que o conjunto

$$\mathcal{C} \doteq \{A_1\,, A_2\,, A_3\,, A_4\}$$

seja uma base de $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Isto é equivalente a encontrar matrizes

$$A_3, A_4 \in M_2(\mathbb{R}),$$

de modo que a única solução da equação matricial

$$\alpha \cdot A_1 + \beta \cdot A_2 + \gamma \cdot A_3 + \delta \cdot A_4 = \underbrace{O}_{\in M_2(\mathbb{R})} \tag{11.16}$$

seja a solução trivial, isto é,

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0. \tag{11.17}$$

Consideremos

$$A_3 \doteq \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_4 \doteq \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}. \tag{11.18}$$

Substituindo (11.17) em (11.16), obteremos:

$$\underbrace{\alpha \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \delta \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} -2\alpha + a\gamma + x\delta & -2\beta + b\gamma + y\delta \\ \alpha + c\gamma + z\delta & \beta + d\gamma + t\delta \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que equivale ao sistema linear de equações:

$$\begin{cases} 2\alpha + a\gamma + x\delta = 0 \\ \alpha + c\gamma + z\delta = 0 \\ -2\beta + b\gamma + y\delta = 0 \\ \beta + d\gamma + t\delta = 0 \end{cases}$$

que, por sua vez, é equivalente à equação matricial:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 0 & a & x \\ 1 & 0 & c & z \\ 0 & -2 & b & y \\ 0 & 1 & d & t \end{pmatrix}}_{\doteq B} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que admite uma única solução, dada por (11.17), se, e somente se, o determinante da matriz $\underline{B}$ for diferente de zero (ver Apêndice (A)).

Mas

$$\det(B) = \begin{vmatrix} -2 & 0 & a & x \\ 1 & 0 & c & z \\ 0 & -2 & b & y \\ 0 & 1 & d & t \end{vmatrix} \overset{\text{Exercício}}{=} -(2c + a)(2t + y) + (2z + x)(2d + b).$$

Assim

$$\det(B) \neq 0$$

se, e somente se,

$$(2\,z + x)\,(2\,d + b) \neq (2\,c + a)\,(2\,t + y)\,. \tag{11.19}$$

Dessa forma, considerando-se, por exemplo:

$$\begin{aligned} A_3 &\doteq \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\,, \\ A_4 &\doteq \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\,, \end{aligned} \tag{11.20}$$

segue que a condição (11.19) estará verificada.

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Notemos que, do Teorema (10.143), segue que

$$\begin{aligned} \dim\left[T(M_2(\mathbb{R}))\right] &= \underbrace{\dim\left(M_2(\mathbb{R})\right)}_{=4} - \underbrace{\dim\left[\mathcal{N}(T)\right]}_{\overset{(11.15)}{=}2} \\ &= 4 - 2 = 2\,. \end{aligned}$$

Além disso, da demonstração do Teorema (10.143), segue que o conjunto

$$\{T(A_3)\,,T(A_4)\}$$

será um base (ordenada) de $(T(M_2(\mathbb{R}))\,,+\,,\cdot)$, completando a resolução.

$\square$

Observação 11.21 *Notemos que*

$$\begin{aligned}
\mathsf{T}(A_3) &\overset{(11.20)}{=} \mathsf{T}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\overset{(11.11)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\overset{Exercício}{=} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\
\mathsf{T}(A_4) &\overset{(11.20)}{=} \mathsf{T}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \overset{(11.11)}{=} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\overset{Exercício}{=} = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

Temos também o:

Exemplo 11.22 *Sejam* $(\mathbb{R}^3 , + , \cdot)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de soma de ternas e multiplicação de número real por terna, respectivamente).*

Determinar um operador linear $\mathsf{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*, cuja imagem seja gerada pelos vetores*

$$(1 , 2 , 0) \quad e \quad (1 , 1 , 1) .$$

Resolução:

Notemos que os vetores

$$v_1 \doteq (1 , 2 , 0) \quad \text{e} \quad v_2 \doteq (1 , 1 , 1) , \tag{11.23}$$

são L.I., em $(\mathbb{R}^3 , + , \cdot)$.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Logo, o conjunto

$$\mathcal{B} \doteq \{v_1 , v_2\} , \tag{11.24}$$

será uma base para $\left(\mathsf{T}\left(\mathbb{R}^3\right) , + , \cdot\right)$.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Logo, o subespaço gerado por estes vetores terá dimensão igual a dois, isto é,

$$\dim\left[\mathsf{T}\left(\mathbb{R}^3\right)\right] = 2 . \tag{11.25}$$

Assim, do Teorema (10.143), segue que

$$\underbrace{\dim\left[\mathbb{R}^3\right]}_{=3} = \dim\left[\mathcal{N}(\mathsf{T})\right] + \underbrace{\dim\left[\mathsf{T}\left(\mathbb{R}^3\right)\right]}_{\overset{(11.25)}{=}2} ,$$

ou seja, $\quad \dim[\mathcal{N}(\mathsf{T})] = 1 .$

Logo, a transformação procurada deverá ter, necessariamente, núcleo de dimensão igual a um.

Podemos supor, por exemplo, que $\mathcal{N}(T)$ seja gerado pelo vetor

$$u_1 \doteq (1\,,0\,,0)\,, \tag{11.26}$$

isto é, o conjunto

$$\mathcal{C} \doteq \{u_1\} \tag{11.27}$$

é uma base de $(\mathcal{N}(T)\,,+\,,\cdot)$.

Consideremos

$$\mathcal{D} \doteq \{(1\,,0\,,0)\,,\underbrace{(0\,,1\,,0)}_{\doteq u_2},\underbrace{(0\,,0\,,1)}_{\doteq u_3}\}, \tag{11.28}$$

a base canônica de $\left(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot\right)$, que contém o vetor u_1.

Segue, da demonstração do Teorema (10.143), que o conjunto

$$\mathcal{E} \doteq \{T(u_2), T(u_3)\}$$

será uma base de $\left(T\left(\mathbb{R}^3\right),+,\cdot\right)$.

Assim, basta definirmos os valores do operador linear $\underline{T}$ em cada um dos vetores $u_2\,,u_3$.

Se, por exemplo, escolhermos

$$\begin{aligned} T(u_1) &\overset{(11.26)\text{ e } u_1\in\mathcal{N}(T)}{=} T(1\,,0\,,0)\\ &\doteq (0\,,0\,,0) && (11.29)\\ T(u_2) &\overset{(11.28)}{=} T(0\,,1\,,0)\\ &\doteq (1\,,2\,,0) && (11.30)\\ T(u_3) &\overset{(11.28)}{=} T(0\,,0\,,1)\\ &\doteq (1\,,1\,,1)\,. && (11.31) \end{aligned}$$

podemos obter uma expressão para operador linear $\underline{T}$, pois conhecemos seus valores em uma base de $\left(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot\right)$.

Para isto basta observarmos que, para cada $(x\,,y\,,z)\in\mathbb{R}^3$, temos:

$$\begin{aligned} T(x\,,y\,,z) &\overset{\text{combinação linear de } \mathcal{D}}{=} T[x\cdot(1\,,0\,,0)+y\cdot(0\,,1\,,0)+z\cdot(0\,,0\,,1)]\\ &\overset{T \text{ é operador linear}}{=} x\cdot\underbrace{T(1\,,0\,,0)}_{\overset{(11.29)}{=}(0,0,0)}+y\cdot\underbrace{T(0\,,1\,,0)}_{\overset{(11.30)}{=}(1,2,0)}+z\cdot\underbrace{T(0\,,0\,,1)}_{\overset{(11.31)}{=}(1,1,1)}\\ &= x\cdot(0\,,0\,,0)+y\cdot(1\,,2\,,0)+z\cdot(1\,,1\,,1)\\ &= (y+z\,,2\,y+z\,,z)\,, \end{aligned}$$

ou seja, o operador linear $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, tal que a imagem do mesmo é gerada pelos vetores (11.23), pode ser dado por

$$T(x\,,y\,,z) \doteq (y+z\,,2\,y+z\,,z)\,,\quad \text{para cada}\quad (x\,,y\,,z)\in\mathbb{R}^3\,.$$

Deixaremos como exercício para o leitor verificar que de fato a aplicação $\underline{T}$ tem as propriedades requeridas.

$\square$

Observação 11.32 *Como podemos ver em (11.30) e (11.31), teremos uma infinidade de operadores lineares T com a propriedade requerida no Exemplo (11.22).*

Deixaremos a cargo do leitor os seguintes exercícios resolvidos.

Exercício 11.33 *Sejam $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ e $(\mathscr{P}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ espaços vetoriais reais (onde $+$ e $\cdot$ são as operações usuais de $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ e $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$, respectivamente).*

Determinar $T \in \mathcal{L}(\mathscr{P}_3(\mathbb{R}); \mathscr{P}_2(\mathbb{R}))$, cujo núcleo seja gerado pelos polinômios $p, q \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$, onde

$$p(t) \doteq 1 + t^3 \quad \textit{e} \quad q(t) \doteq 1 - t^2, \quad \textit{para cada} \quad t \in \mathbb{R}. \tag{11.34}$$

Resolução:

Notemos que o conjunto

$$\mathcal{B} \doteq \{p, q\}$$

é L.I. em $(\mathscr{P}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Logo, o conjunto

$$\mathcal{B} \doteq \{p, q\} \tag{11.35}$$

será uma base para $(\mathcal{N}(T), +, \cdot)$, ou seja,

$$\dim[\mathcal{N}(T)] = 2. \tag{11.36}$$

Assim, do Teorema (10.143), segue que

$$\underbrace{\dim[\mathscr{P}_3(\mathbb{R})]}_{=4} = \underbrace{\dim[\mathcal{N}(T)]}_{\overset{(11.36)}{=}2} + \dim[T(\mathscr{P}_3(\mathbb{R}))],$$

$$\text{ou seja,} \qquad \dim[T(\mathscr{P}_3(\mathbb{R}))] = 2. \tag{11.37}$$

O primeiro passo para obtermos uma expressão para a transformação linear $\underline{T}$, é utilizarmos o Teorema do completamento (isto é, o Teorema (7.33)), para completar o conjunto $\mathcal{B}$ a uma base de $(\mathscr{P}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Para isto, basta acrescentarmos, por exemplo, os polinômios $p_o, p_1 \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$, onde

$$p_o(t) \doteq 1 \quad \text{e} \quad p_1(t) \doteq t, \quad \text{para cada} \quad t \in \mathbb{R}. \tag{11.38}$$

Notemos que o conjunto

$$\mathcal{C} \doteq \{p, q, p_o, p_1\} \tag{11.39}$$

é uma base de $(\mathscr{P}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

De fato, pois

$$\begin{aligned} & \alpha \cdot p + \beta \cdot q + \gamma \cdot p_o + \delta \cdot p_1 = O \\ \text{se, e somente se,} \quad & \alpha\, p(t) + \beta\, q(t) + \gamma\, p_o(t) + \delta\, p_1(t) = 0\,, \quad \text{para} \quad t \in \mathbb{R}\,, \\ \text{isto é, por (11.34) e (11.38):} \quad & \alpha\, \left(1 + t^3\right) + \beta\, \left(1 - t^2\right) + \gamma\, 1 + \delta\, t = 0\,, \ \text{para} \ \ t \in \mathbb{R}\,, \\ \text{ou ainda,} \quad & (\alpha + \gamma + \delta) + \delta\, t - \beta\, t^2 + \alpha\, t^3 = 0\,, \quad \text{para} \quad t \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

e isto ocorrerá se, e somente se,

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0\,,$$

ou seja, o conjunto

$$\mathcal{C} = \{p\,, q\,, p_o\,, p_1\}$$

é um conjunto L.I. em $(\mathscr{P}_3(\mathbb{R})\,, +\,, \cdot)$.

Notemos que sendo

$$\dim[\mathscr{P}_3(\mathbb{R})] = 4\,,$$

segue que o conjunto

$$\mathcal{C} = \{p\,, q\,, p_o\,, p_1\}$$

será uma base de $(\mathscr{P}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Assim, as imagens dos polinômios

$$p_o \quad \text{e} \quad p_1\,,$$

pela transformação $\underline{T}$ procurada precisam, necessariamente, ser vetores L.I. em $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R})\,, +\,, \cdot)$.

Para isto, consideremos $T \in \mathcal{L}(\mathscr{P}_3(\mathbb{R}), \mathscr{P}_2(\mathbb{R}))$, por exemplo, de modo que

$$T(p_o) \doteq p_o \tag{11.40}$$

$$T(p_1) \doteq p_1 \tag{11.41}$$

$$T(p) = T(q) \doteq O. \tag{11.42}$$

Deste modo, de (11.40), (11.41) e (11.42), segue que

$$T\left(\mathscr{P}_3(\mathbb{R})\right) = [p_o\,, p_1]$$

e, de (11.37) e (11.35), teremos:

$$\dim\left[T\left(\mathscr{P}_3(\mathbb{R})\right)\right] = 2 \quad \text{e} \quad \mathcal{N}(T) = [p\,, q]\,,$$

como pedido.

Para encontrarmos uma expressão para a transformação linear $\underline{T}$ agimos da seguinte forma:

Se $p \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ sabemos que existem

$$a_o\,, a_1\,, a_2\,, a_3 \in \mathbb{R}\,,$$

tais que

$$p(t) = a_o + a_1\, t + a_2\, t^2 + a_3\, t^3\,, \quad \text{para} \quad t \in \mathbb{R}\,. \tag{11.43}$$

Podemos reescrever o polinômio $\underline{p}$ acima, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
p(t) &\overset{\text{Exercício}}{=} (a_o + a_2 - a_3)\underbrace{1}_{=p_o(t)} + a_1\underbrace{t}_{=p_1(t)} + a_3\underbrace{(1+t^3)}_{=p(t)} - a_2\underbrace{(1-t^2)}_{=q(t)} \\
&= (a_o + a_2 - a_3)\,p_o(t) + a_1\,p_1(t) + a_3\,p(t) - a_2\,q(t) \\
&= [(a_o + a_2 - a_3)\cdot p_o + a_1\cdot p_1 + a_3\cdot p - a_2\cdot q](t)\,,
\end{aligned} \tag{11.44}$$

para cada $t \in \mathbb{R}$.

Logo

$$\begin{aligned}
T(p) &\overset{(11.44)}{=} T[(a_o + a_2 - a_3)\cdot p_o + a_1\cdot p_1 + a_3\cdot p - a_2\cdot q]) \\
&\overset{T \text{ é transf. linear}}{=} (a_o + a_2 - a_3)\cdot\underbrace{T(p_o)}_{\overset{(11.40)}{=} p_o} + a_1\cdot\underbrace{T(p_1)}_{\overset{(11.41)}{=} p_1} + a_3\cdot\underbrace{T(p)}_{\overset{(11.42)}{=} O} - a_2\cdot\underbrace{T(q)}_{\overset{(11.42)}{=} O} \\
&= (a_o + a_2 - a_3)\cdot p_o + a_1\cdot p_1\,,
\end{aligned}$$

ou ainda, para cada $t \in \mathbb{R}$ temos que:

$$\begin{aligned}
[T(p)](t) &= [(a_o + a_2 - a_3)\cdot p_o + a_1\cdot p_1](t) \\
&= (a_o + a_2 - a_3)\,p_o(t) + a_1\,p_1(t) \\
&\overset{(11.38)}{=} (a_o + a_2 - a_3) + a_1\,t\,.
\end{aligned}$$

Com isto temos que a transformação linear $\underline{T}$, definida desta forma, satisfaz as propriedades requeridas.

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

□

Exercício 11.45 *Sejam* $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$ *e* $(\mathbb{R}\,,+\,,\cdot)$ *espaços vetoriais reais (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ *e* $\mathbb{R}$*, respectivamente).*

Considere a aplicação $T : \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *dado por*

$$T(p) \doteq \int_0^1 p(x)\,dx\,, \quad \textit{para cada} \quad p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})\,. \tag{11.46}$$

Vimos, no Exemplo (10.23), que a $T \in \mathcal{L}(\mathscr{P}_2(\mathbb{R})\,;\mathbb{R})$*.*

Encontre a matriz da transformação linear $\underline{T}$ *com relação às bases canônicas de* $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$ *e* $(\mathbb{R}\,,+\,,\cdot)$*, respecticamente.*

Resolução:

Sejam

$$\mathcal{B} \doteq \{p_o\,,p_1\,,p_2\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} \doteq \{\underbrace{1}_{\doteq u}\}\,, \tag{11.47}$$

as bases canônicas de $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$ e $(\mathbb{R}\,,+\,,\cdot)$, respectivamente, onde

$$p_o(t) \doteq 1\,, \quad p_1(t) \doteq t\,, \quad p_2(t) \doteq t^2\,, \quad \text{para cada} \quad t \in \mathbb{R}\,. \tag{11.48}$$

Notemos que

$$
\begin{aligned}
T(p_o) &\overset{(11.46)}{=} \int_0^1 p_o(x)\,dx \\
&\overset{(11.48)}{=} \int_0^1 \,dx \\
&= 1 \\
&= 1 \cdot \underbrace{1}_{\overset{(11.47)}{=} u} \\
&= 1 \cdot u\,, \\
T(p_1) &\overset{(11.46)}{=} \int_0^1 p_1(x)\,dx \\
&\overset{(11.48)}{=} \int_0^1 x\,dx \\
&= \left.\frac{x^2}{2}\right|_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \underbrace{1}_{\overset{(11.47)}{=} u} \\
&= \frac{1}{2} \cdot u\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T(p_2) &\overset{(11.46)}{=} \int_0^1 p_2(x)\,dx \\
&\overset{(11.48)}{=} \int_0^1 x^2\,dx \\
&= \left.\frac{x^3}{3}\right|_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \underbrace{1}_{\overset{(11.47)}{=} u} \\
&= \frac{1}{3} \cdot u\,.
\end{aligned}
$$

Assim, a matriz da transformação linear $\underline{T}$, em relação às bases canônicas de $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$ e $(\mathbb{R}\,,+\,,\cdot)$, respectivamente, será dada por

$$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \in M_{1\times 3}(\mathbb{R}).$$

□

Um outro exercício interessante é dado pelo:

Exercício 11.49 *Sejam* $(\mathscr{P}_3(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$ *e* $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$ *espaços vetoriais reais (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de soma de funções e multiplicação de número real por função, respectivamente) e a aplicação* $T : \mathscr{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ *dado por*

$$T(p) \doteq p\,', \quad \textit{para cada} \quad p \in \mathscr{P}_1(\mathbb{R})\,. \tag{11.50}$$

Vimos, no Exemplo (10.25)*, que* $T \in \mathcal{L}(\mathscr{P}_3(\mathbb{R})\,;\,\mathscr{P}_2(\mathbb{R}))$*.*

Encontre a matriz da transformação linear $\underline{T}$ *com relação às bases canônicas de* $(\mathscr{P}_3(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$ *e* $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$*, respectivamente.*

Resolução:

Sejam

$$\mathcal{B} \doteq \{p_o\,,p_1\,,p_2\,,p_3\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} \doteq \{p_o\,,p_1\,,p_2\} \tag{11.51}$$

a bases canônicas de $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$ e $(\mathscr{P}_3(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$, respectivamente, onde

$$p_o(t) \doteq 1\,, \quad p_1(t) \doteq t\,, \quad p_2(t) \doteq t^2 \quad \text{e} \quad p_3(t) \doteq t^3\,, \quad \text{para cada} \quad t \in \mathbb{R}\,. \tag{11.52}$$

Notemos que, para cada $t \in \mathbb{R}$, teremos:

$$\begin{aligned}
[T(p_o)](t) &\overset{(11.50)}{=} {p_o}'(t) \\
&\overset{(11.52)}{=} 0 \\
&\overset{(11.52)}{=} 0 \cdot p_o(t) + 0 \cdot p_1(t) + 0 \cdot p_2(t) \\
&= [0 \cdot p_o + 0 \cdot p_1 + 0 \cdot p_2](t)\,, \\
[T(p_1)](t) &\overset{(11.50)}{=} {p_1}'(t) \\
&\overset{(11.52)}{=} 1 \\
&\overset{(11.52)}{=} 1 \cdot p_o(t) + 0 \cdot p_1(t) + 0 \cdot p_2(t) \\
&= [1 \cdot p_o + 0 \cdot p_1 + 0 \cdot p_2](t)\,, \\
[T(p_2)](t) &\overset{(11.50)}{=} {p_2}'(t) \\
&\overset{(11.52)}{=} 2\,t \\
&\overset{(11.52)}{=} 0 \cdot p_o(t) + 2 \cdot p_1(t) + 0 \cdot p_2(t) \\
&= [0 \cdot p_o + 2 \cdot p_1 + 0 \cdot p_2](t), \\
[T(p_3)](t) &\overset{(11.50)}{=} {p_3}'(t) \\
&\overset{(11.52)}{=} 3\,t^2 \\
&\overset{(11.52)}{=} 0 \cdot p_o(t) + 0 \cdot p_1(t) + 3 \cdot p_2(t) \\
&= [0 \cdot p_o + 0 \cdot p_1 + 3 \cdot p_2](t)\,.
\end{aligned}$$

Logo a matriz da transformação linear T, em relação às bases canônicas de $(\mathscr{P}_3(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$ e $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$, respectivamente, será dada por

$$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \tag{11.53}$$

completando a resolução.

□

Temos também o:

Exercício 11.54 *Sejam* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de soma de ternas e multiplicação de número real por terna, respectivamente) e aplicação* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *dada por*

$$T(x, y, z) \doteq (x + z, y + z, x + y + 2z), \quad \textit{para cada} \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \tag{11.55}$$

Mostre que a aplicação $\underline{T}$ *é um operador linear em* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ *e encontre as matrizes do operador linear* $\underline{T}$ *com relação à base canônica* $\mathcal{B}$ *de* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$*, isto é,* $[T]_{\mathcal{B}}$*, e com relação à base (ordenada)* $\mathcal{C}$ *de* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$*, formada pelos vetores*

$$u \doteq (1, 1, 2), \quad v \doteq (-1, 1, 0) \quad e \quad w \doteq (-1, -1, 1), \tag{11.56}$$

isto é, $[T]_{\mathcal{C}}$*.*

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação que $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ e que o conjunto $\mathcal{C}$ é uma base de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Com relação à base canônica

$$\mathcal{B} \doteq \{\underbrace{(1, 0, 0)}_{\doteq e_1}, \underbrace{(0, 1, 0)}_{\doteq e_2}, \underbrace{(0, 0, 1)}_{\doteq e_3}\} \tag{11.57}$$

temos:

$$\begin{aligned}
T(e_1) &\overset{(11.57)}{=} T(1, 0, 0) \\
&\overset{(11.55)}{=} (1 + 0, 0 + 0, 1 + 0 + 2 \cdot 0) \\
&= (1, 0, 1) \\
&\overset{(11.57)}{=} 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3, \\
T(e_2) &\overset{(11.57)}{=} T(0, 1, 0) \\
&\overset{(11.55)}{=} (0 + 0, 1 + 0, 0 + 1 + 2 \cdot 0) \\
&= (0, 1, 1) \\
&\overset{(11.57)}{=} 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3, \\
T(e_3) &\overset{(11.57)}{=} T(0, 0, 1) \\
&\overset{(11.55)}{=} (0 + 0, 1 + 0, 0 + 1 + 2 \cdot 0) \\
&\overset{(11.57)}{=} 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 2 \cdot e_3.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{11.58}$$

Com relação à base $\mathcal{C}$, temos:

$$\begin{aligned}
T(u) &\overset{(11.56)}{=} T(1\,,1\,,2)\\
&\overset{(11.55)}{=} (1+2\,,1+2\,,1+1+2\cdot 2)\\
&= (3\,,3\,,6)\\
&= 3\cdot(1\,,1\,,2)\\
&\overset{(11.56)}{=} 3\cdot u + 0\cdot v + 0\cdot w\,,\\
T(v) &\overset{(11.56)}{=} T(-1\,,1\,,0)\\
&\overset{(11.55)}{=} (-1+0\,,1+0\,,-1+1+2\cdot 0)\\
&= (-1\,,1\,,0)\\
&\overset{(11.56)}{=} v\\
&= 0\cdot u + 1\cdot v + 0\cdot w\,,\\
T(w) &\overset{(11.56)}{=} T(-1\,,-1\,,1)\\
&\overset{(11.55)}{=} (-1+1\,,-1+1\,,-1-1+2\cdot 1)\\
&= (0\,,0\,,0)\\
&= 0\cdot u + 0\cdot v + 0\cdot w\,.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{11.59}$$

completando a resolução.

□

Observação 11.60 *Notemos que a matriz (11.58) é uma matriz simétrica (isto é, $A^t = A$) e a matriz (11.59) é uma matriz diagonal.*

Para finalizar temos:

Exercício 11.61 *Sejam $(U\,,+\,,\cdot)$ um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) de dimensão finita e T um operador linear idempotente em $(U\,,+\,,\cdot)$ (ver a Definição (10.186)).*

Sabemos, pela Proposição (10.193), que

$$U = \mathcal{N}(T) \oplus T(U)\,. \tag{11.62}$$

Logo podemos considerar

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_p\,,v_1\,,v_2\,,\cdots\,,v_q\} \tag{11.63}$$

uma base de $(U, +, \cdot)$*, de modo que o conjunto de vetores*

$$\mathcal{C} \doteq \{u_1, u_2, \cdots, u_p\} \tag{11.64}$$

seja uma base (ordenada) de $(\mathcal{N}(T), +, \cdot)$ *e o conjunto de vetores*

$$\mathcal{D} \doteq \{v_1, v_2, \cdots, v_q\} \tag{11.65}$$

seja uma uma base (ordenada) de $(T(U), +, \cdot)$*.*

Encontrar a matriz do operador linear $\underline{T}$*, em relação à base (ordenada)* $\mathcal{B}$*, isto é,* $[T]_B$*.*

Resolução:

Notemos que, para cada $j \in \{1, 2, \cdots, p\}$, como $u_j \in \mathcal{N}(T)$, segue que

$$\begin{aligned} T(u_j) &\overset{u \in \mathcal{N}(T)}{=} O \\ &= 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + \cdots + 0 \cdot u_p + 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_q\,. \end{aligned} \tag{11.66}$$

Por outro lado, para cada $j \in \{1, 2, \cdots, q\}$, como

$$T(v_j) \in T(U) \quad \text{e} \quad \mathcal{D} = \{v_1, v_2, \cdots, v_q\}$$

é uma base (ordenada) de $(T(U), +, \cdot)$, segue que existem escalares

$$\alpha_{ij} \in \mathbb{R} \text{ (respectivamente, } \mathbb{C}), \quad \text{para} \quad i \in \{1, 2, \cdots, q\},$$

de modo que

$$\begin{aligned} T(v_j) &= \alpha_{1j} \cdot v_1 + \alpha_{2j} \cdot v_2 + \cdots + \alpha_{qj} \cdot v_q \\ &= 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + \cdots + 0 \cdot u_p + \alpha_{1j} \cdot v_1 + \alpha_{2j} \cdot v_2 + \cdots + \alpha_{qj} \cdot v_q\,. \end{aligned} \tag{11.67}$$

Logo, de (11.66) e (11.67), segue que a matriz do operador linear idempotente $\underline{T}$, em relação à base (ordenada) $\mathcal{B}$, será da forma:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{q1} & \cdots & \alpha_{qq} \end{pmatrix}. \tag{11.68}$$

□

Observação 11.69 *Uma matriz quadrada do tipo (11.68) acima será denominada* **matriz de blocos** *e, como veremos, terá um papel importante no Capítulo 15.*

11.1 Exercícios

Capítulo 12

Autovalores e Autovetores

$\boxed{\textbf{20.10.2015 - 20.a}}$

Sabemos que nem toda matriz quadrada é uma matriz diagonal.

Um dos objetivos deste capítulo é responder a seguinte questão: sob que condições, uma matriz quadrada pode ser, de algum modo, "transformada" em uma matriz diagonal ?

12.1 Definição, Exemplos e Propriedades

Começaremos introduzindo a:

Definição 12.1 *Sejam* $(V, +, \cdot)$ *espaço vetorial real (respectivamente, complexo),* U *um subespaço vetorial de* $(V, +, \cdot)$ *e* $T \in \mathcal{L}(V)$.

Se a imagem do subespaço vetorial U*, pela aplicação* $\underline{T}$*, for um subconjunto de* U*, isto é, se*

$$T(U) \subseteq U \tag{12.2}$$

diremos que o subespaço $\underline{U}$ *é um* <u>**subespaço invariante pelo operador linear** T</u>.

Observação 12.3

1. *Na situação da Definição (12.1) acima, podemos definir a* <u>**restrição do operador linear** T **ao subespaço** U</u>*, que será denotada por* $T_{|_U}$*, da seguinte forma:* $T_{|_U} : U \to U$ *dada por*
$$T_{|_U}(u) \doteq T(u)\,, \quad \textit{para cada} \quad u \in U\,. \tag{12.4}$$
2. *Com isto teremos que*
$$T_{|_U} \in \mathcal{L}(U)\,.$$
A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.
3. *Como veremos no Capítulo 13, isto facilitará muitas vezes a compreensão de alguns tipos de operadores lineares, estudando os mesmos em subespaços de dimensões menores.*

4. *Notemos que os subespaços*
$$\{O\} \quad e \quad V,$$
são invariantes, para qualquer $T \in \mathcal{L}(V)$.

   A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

5. *Vejamos o que é preciso acontecer para que exista um subespaço invariante associado a um operador linear, de dimensão, por exemplo, um.*

   Primeiramente precisamos que
$$V \neq \{O\}.$$
Notemos que tal subespaço vetorial de dimensão um deverá ser gerado por um vetor <u>*não nulo*</u>*, ou seja, podemos encontrar*
$$u \in V \setminus \{O\},$$
de modo que o subespaço gerado
$$U \doteq [u] \subseteq V,$$
será invariante pelo operador linear <u>T</u> *se, e somente, se para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$ *(respectivamente,* $\mathbb{C}$*) tivermos*
$$T(\alpha \cdot u) \in [u].$$
Notemos que, do fato que
$$u \neq O, \quad \textit{segue que} \quad \mathcal{B} \doteq \{u\}$$
será uma base para o subespaço vetorial
$$U = [u].$$
Como
$$T(\alpha \cdot u) \in U = [u]$$
deverá existir um escalar
$$\beta \in \mathbb{R} \quad \textit{(respectivamente, } \mathbb{C}\textit{)},$$
de modo que
$$\underbrace{T(\alpha \cdot u)}_{T \text{ é oper. lin.} \atop = \alpha \cdot T(u)} = \beta \cdot u,$$
que para algum $\alpha \neq 0$*, é equivalente a existir um escalar* $\beta \in \mathbb{R}$ *(respectivamente,* $\mathbb{C}$*), de modo que*
$$T(u) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \cdot u.$$
Isto sugere a seguinte definição:

Definição 12.5 *Sejam* $(V, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) e* $T \in \mathcal{L}(v)$.

Diremos que um vetor, **não nulo**, $u \in V$, *é um* **autovetor do operador linear** $\underline{T}$, *se existir um escalar*

$$\lambda \in \mathbb{R} \text{ (respectivamente, } \mathbb{C}\text{)},$$

de modo que

$$T(u) = \lambda \cdot u. \tag{12.6}$$

Observação 12.7 *Se*

$$u \neq O \quad e \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \text{(respectivamente, } \mathbb{C}\text{)},$$

são tais que

$$T(u) = \lambda \cdot u \quad e \quad T(u) = \mu \cdot u, \tag{12.8}$$

então deveremos ter

$$\lambda = \mu.$$

De fato, pois

$$\begin{aligned} (\lambda - \mu) \cdot u &= \lambda \cdot u - \mu \cdot u \\ &\overset{(12.8)}{=} T(u) - T(u) \\ &= O. \\ \textit{Como} \quad & u \neq O, \\ \textit{segue que,} \quad & \lambda - \mu = 0, \\ \textit{ou seja,} \quad & \lambda = \mu, \end{aligned}$$

como afirmamos.

Podemos também introduzir a:

Definição 12.9 *Sejam* $(V, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real (respectivamente, complexo),* $T \in \mathcal{L}(V)$ *e* $\underline{u}$ *um autovetor do operador linear* $\underline{T}$.

Um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ *(respectivamente,* $\mathbb{C}$*) que satisfaz*

$$T(u) = \lambda \cdot u, \quad com \quad u \neq O,$$

será denominado **autovalor do operador linear** $\underline{T}$ **associado ao autovetor** $\underline{u}$.

Observação 12.10 *Na situação da Definição (12.5) acima, como* $u \in V \setminus \{O\}$, *deverá satisfazer:*

$$\begin{aligned} & T(u) = \lambda \cdot u, \\ \textit{se, e somente se,} \quad & O = T(u) - \lambda \cdot u \\ & \quad = T(u) - \lambda \cdot I_V(u) \\ & \quad = (T - \lambda \cdot I_V)(u), \end{aligned}$$

onde $I_V : V \to V$ *é o operador linear identidade em* $(V, +, \cdot)$.

Logo, $u \in V$ *será um autovetor do operador linear* $\underline{T}$ *se, e somente se,*

$$u \in \mathcal{N}(T - \lambda \cdot I_V)\,, \quad \textit{com} \quad u \neq O\,,$$
$$\textit{ou seja,} \qquad \mathcal{N}(T - \lambda \cdot I_V) \neq \{O\}$$

Notemos que, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ *(respectivamente,* $\mathbb{C}$*), o conjunto*

$$\begin{aligned} V(\lambda) &\doteq \{u \in V\,;\, T(u) = \lambda \cdot u\} \\ &= \mathcal{N}(T - \lambda \cdot I_V)\,, \end{aligned}$$

será um subespaço vetorial de $(V, +, \cdot)$*, diferente do subespaço vetorial trivial* $\{O\}$.

Com isto temos a:

Definição 12.11 *Sejam* $(V, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real (respectivamente, complexo),* $T \in \mathcal{L}(V)$ *e* λ *um autovalor do operador linear* $\underline{T}$.

O subespaço vetorial

$$\begin{aligned} V(\lambda) &\doteq \{u \in V\,;\, T(u) = \lambda \cdot u\} \\ &= \mathcal{N}(T - \lambda \cdot I_V)\,, \end{aligned} \tag{12.12}$$

será dito **subespaço próprio (ou auto-espaço generalizado) associado ao autovalor** λ.

Se

$$\dim(V) < \infty\,,$$

a dimensão do subespaço vetorial $V(\lambda)$ *será finita e dita* **multiplicidade geométrica do autovalor** $\underline{\lambda}$ *e indicada por* $m_g(\lambda)$*, isto é,*

$$m_g(\lambda) \doteq \dim[V(\lambda)]\,. \tag{12.13}$$

Observação 12.14

1. *Na Definição (12.11) acima, se*

$$u \in V(\lambda) \quad \textit{e} \quad u \neq O\,,$$

segue que o vetor $\underline{u}$ *será um autovetor do operador linear* $\underline{T}$*, associado ao autovalor* $\underline{\lambda}$*, pois, de (12.12), segue que*

$$T(u) = \lambda \cdot u \quad \textit{e} \quad u \neq O\,.$$

2. *Notemos também que, o subespaço vetorial* $V(\lambda)$*, é um subespaço invariante pelo operador linear* $\underline{T}$*, isto é,*

$$T[V(\lambda)] \subseteq V(\lambda)\,. \tag{12.15}$$

De fato, se $u \in V(\lambda)$ *teremos, de (12.12), que*

$$T(u) \overset{u \in V(\lambda)}{=} \lambda \cdot u \in V(\lambda),$$

pois $V(\lambda)$ *é subespaço vetorial de* $(V, +, \cdot)$.

Logo um modo de obtermos subespaços vetoriais, de um espaço vetorial, que são invariantes por um operador linear, é considerar os subespaços vetoriais $V(\lambda)$*, de* $(V, +, \cdot)$*, onde* $\lambda \in \mathbb{R}$ *(respectivamente,* $\mathbb{C}$*) é um autovalor do operador linear* $\underline{T}$*.*

Consideremos alguns exemplos.

Exemplo 12.16 *Sejam* $\left(\mathbb{R}^2, +, \cdot\right)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de soma de pares e multiplicação de número real por par, respectivamente) e a aplicação* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dada por*

$$T(x, y) \doteq (y, 4x), \quad \textit{para cada} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \tag{12.17}$$

Mostre que $T \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2\right)$ *e encontre todos os autovalores do operador linear* $\underline{T}$*, os respectivos subespaços próprios e a multiplicidade geométrica de cada um dos autovalores do operador linear* $\underline{T}$*.*

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor verificar que $T \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2\right)$.

Observemos que

$$\lambda \in \mathbb{R}$$

é um autovalor de T se, e somente se, existir

$$u = (x, y) \neq (0, 0),$$

de modo que

$$\underbrace{T(x, y)}_{\overset{(12.17)}{=}(y, 4x)} = \underbrace{\lambda \cdot (x, y)}_{=(\lambda x, \lambda y)},$$

ou seja, se, e somente, se existir

$$(x, y) \neq (0, 0), \quad \text{tal que} \quad (y, 4x) = (\lambda x, \lambda y).$$

Isto é equivalente a dizer que o sistema linear

$$\begin{cases} -\lambda x + y = 0 \\ 4x - \lambda y = 0 \end{cases} \tag{12.18}$$

possui, pelo menos, uma solução **<u>não trivial</u>**.

Por sua vez, isto acontecerá se, e somente se, o determinante da matriz dos coeficientes desse sitema linear, a saber, a matriz

$$A \doteq \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 4 & -\lambda \end{pmatrix} \tag{12.19}$$

for igual a zero (ver Apêndice (B)).

Como

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 4 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\,,$$

vemos que os únicos autovalores (ambos reais) associados ao operador linear $\underline{T}$ serão:

$$\lambda_1 = -2 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 2\,. \tag{12.20}$$

Com isto, teremos que:

$$\begin{aligned} V(-2) &\doteq \left\{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, T(x\,,y) = -2\cdot(x\,,y)\right\} \\ &\overset{(12.17)}{=} \left\{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, (y\,,4\,x) = -2\cdot(x\,,y)\right\} \\ &= \left\{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, y = -2\,x\right\} \\ &= \{(x\,,-2\,x)\,;\, x \in \mathbb{R}\}\,, \\ &= \{x\cdot(1\,,-2)\,;\, x \in \mathbb{R}\}\,, \\ &= [(1\,,-2)]\,, \end{aligned}$$

assim

$$\dim[V(-2)] = 1\,,$$

ou seja, a multiplicidade geométrica do autovalor $\lambda_1 \doteq -2$ (que é a dimensão de $V(-2)$) será igual a $\underline{1}$, isto é,

$$m_g(-2) = 1\,.$$

De modo análogo, temos:

$$\begin{aligned} V(2) &\doteq \left\{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, T(x\,,y) = 2\cdot(x\,,y)\right\} \\ &\overset{(12.17)}{=} \left\{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, (y\,,4\,x) = 2\cdot(x\,,y)\right\} \\ &= \left\{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, y = 2\,x\right\} \\ &= \{(x\,,2\,x)\,;\, x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x\cdot(1\,,2)\,;\, x \in \mathbb{R}\} \\ &= [(1\,,2)]\,, \end{aligned}$$

assim

$$\dim[V(2)] = 1\,,$$

ou seja, a multiplicidade geométrica do autovalor $\lambda_2 \doteq 2$ (que é a dimensão de $V(2)$), será igual a $\underline{1}$, isto é,

$$m_g(2) = 1\,.$$

$\square$

Observação 12.21 *Notemos que no Exemplo (12.16) acima, o vetor*

$$u_1 \doteq (1\,,-2) \tag{12.22}$$

é um autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = -2$ e que o vetor

$$u_2 \doteq (1\,,2) \tag{12.23}$$

é um autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = 2$.

Notemos também que o conjunto de vetores $\{u_1\,,u_2\}$ é L.I. em $(\mathbb{R}^2\,,+\,,\cdot)$.

Como

$$\dim\left(\mathbb{R}^2\right) = 2\,,$$

segue o espaço vetorial real $(\mathbb{R}^2\,,+\,,\cdot)$ possui uma base formada pelos autovetores

$$u_1 \quad e \quad u_2$$

do operador linear $\underline{T}$, a saber, o conjunto de vetores

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1\,,u_2\}\,.$$

Exemplo 12.24 *Ainda com relação ao Exemplo (12.16) acima, encontre a matriz do operador linear $\underline{T}$, em relação à base (ordenada)*

$$\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}\,,$$

formada pelos autovetores do operador linar $\underline{T}$, dados por (12.22) e (12.23).

Resolução:

Observemos que

$$\begin{aligned}
T(u_1) &\overset{(12.22)}{=} T(1\,,-2)\\
&\overset{(12.17)}{=} (-2\,,4)\\
&\overset{\text{Exercício}}{=} -2\cdot(1\,,-2) + 0\cdot(1\,,2)\\
&= -2\cdot u_1 + 0\cdot u_2\,,\\
T(u_2) &\overset{(12.23)}{=} T(1\,,2)\\
&\overset{(12.17)}{=} (2\,,4)\\
&\overset{\text{Exercício}}{=} 0\cdot(1\,,-2) + 2\cdot(1\,,2)\\
&= 0\cdot u_1 + 2\cdot u_2\,.
\end{aligned}$$

Logo, a matriz do operador linear $\underline{T}$ com relação à base (ordenada) $\mathcal{B}$ de $(\mathbb{R}^2\,,+\,,\cdot)$, será a **matriz diagonal**

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{12.25}$$

Notemos que a diagonal principal da matriz diagonal acima é formada pelos autovalores associados ao operador linear T $\square$

Observação 12.26 *Resumindo, no Exemplo (12.16) acima, temos que:*

- *existe uma base do espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$*, formada por autovetores do operador linear* $\underline{T}$*;*
- *a matriz do operador linear* $\underline{T}$*, em relação a essa base é uma matriz diagonal;*
- *a diagonal principal da matriz acima é formada pelos autovalores do operador linear* $\underline{T}$*.*

Consideremos agora o seguinte:

Exemplo 12.27 *Sejam* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais soma de pares ordenados e multiplicação de número real por par ordenado, respectivamente) e a aplicação* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dada por*

$$T(x, y) \doteq (-y, x), \quad \textit{para cada} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \tag{12.28}$$

Mostre que $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ *e encontre todos os autovalores de* $\underline{T}$*.*

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor verificar que $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.

Observemos que $\lambda \in \mathbb{R}$ (número real!) é um autovalor do operador linear $\underline{T}$ se, e somente se, existir

$$u = (x, y) \neq (0, 0),$$

de modo que

$$\underbrace{T(x, y)}_{\overset{(12.28)}{=}(-y, x)} = \lambda \cdot (x, y),$$

ou seja, se, e somente se, existir

$$(x, y) \neq (0, 0), \quad \text{tal que} \quad (-y, x) = (\lambda x, \lambda y).$$

Isto equivalente ao sistema linear

$$\begin{cases} \lambda x + y = 0 \\ x - \lambda y = 0 \end{cases} \tag{12.29}$$

possuir uma solução <u>**não trivial**</u>.

Isto acontecerá se, e somente se, o determinante da matriz

$$A \doteq \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \tag{12.30}$$

for igual a zero (ver o Apêndice (B)).

Como

$$\begin{aligned}\det(A) &= \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^2 - 1 \\ &= -\left(\lambda^2 - 1\right) < 0\,,\end{aligned}$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, ou seja, **não** existem autovalores **reais**, associados ao operador linear $\underline{T}$.

□

No Exemplo abaixo, trocaremos o espaço vetorial real $\left(\mathbb{R}^2, +, \cdot\right)$ do Exemplo (12.27) acima, pelo espaço vetorial complexo $\left(\mathbb{C}^2, +, \cdot\right)$ e consideraremos um operado linear que tenha a mesma expressão da do Exemplo (12.27), mais explicitamente:

Exemplo 12.31 *Consideremos o espaço vetorial complexo* $\left(\mathbb{C}^2, +, \cdot\right)$ *e a aplicação* $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *dada por*

$$T(z, w) \doteq (-w, z)\,, \quad \textit{para cada} \quad (z, w) \in \mathbb{C}^2\,, \tag{12.32}$$

Mostre que $T \in \mathcal{L}\left(\mathbb{C}^2\right)$*, encontre todos os autovalores (complexos) de* $\underline{T}$*, os respectivos subespaços próprios e a multiplicidade geométrica de cada um dos autovalores do operador linear* $\underline{T}$*.*

Se existir uma base $\mathcal{B}$ *de* $\left(\mathbb{C}^2, +, \cdot\right)$ *formada por autovetores de* $\underline{T}$*, encontre a matriz do operador linear* $\underline{T}$ *com relação à base (ordenada)* $\mathcal{B}$*.*

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor verificar que $T \in \mathcal{L}\left(\mathbb{C}^2\right)$.

Notemos que, utilizando so mesmos cálculos do Exemplo (12.27) acima (veja (12.30)), teremos que se

$$\lambda_1 \doteq i \quad \text{e} \quad \lambda_2 = -i$$

segue que a matriz (12.30) terá determinte igual a zero e assim, o sistema linear (12.29) admitirá solução não trivial.

22.10.2015 - 21.a

Com isto, o auto subespaço próprio associado ao autovalor $\lambda_1 = i$, será:

$$\begin{aligned}V(\lambda_1) &= V(i) \\ &\doteq \left\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 ;\, T(z, w) = i \cdot (z, w)\right\} \\ &\stackrel{(12.32)}{=} \left\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 ;\, (-w, z) = i \cdot (z, w)\right\} \\ &= \left\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 ;\, w = -i \cdot z\right\} \\ &= \{(z, -i \cdot z) ;\, z \in \mathbb{C}\}\,, \\ &= \{z \cdot (1, -i) ;\, z \in \mathbb{C}\}\,, \\ &= [(1, -i)]\,.\end{aligned}$$

Assim

$$\dim[V(\lambda_1)] = \dim[V(i)] = 1\,,$$

ou seja, a multiplicidade geométrica do autovalor $\lambda_1 \doteq i$ (que é a dimensão de $V(\lambda_1) = V(i)$) será igual a $\underline{1}$, isto é,

$$m_g(\lambda_1) = m_g(i) = 1\,.$$

De modo semelhante, teremos:

$$\begin{aligned}
V(\lambda_2) &= V(-i) \\
&\doteq \left\{(z\,,w) \in \mathbb{C}^2\,;\, T(z\,,w) = -i \cdot (z\,,w)\right\} \\
&\overset{(12.32)}{=} \left\{(z\,,w) \in \mathbb{C}^2\,;\, (-w\,,z) = -i \cdot (z\,,w)\right\} \\
&= \left\{(z\,,w) \in \mathbb{C}^2\,;\, w = i \cdot z\right\} \\
&= \{(z\,,i \cdot z)\,;\, z \in \mathbb{C}\}\,, \\
&= \{z \cdot (1\,,i)\,;\, z \in \mathbb{C}\}\,, \\
&= [(1\,,i)]\,.
\end{aligned}$$

Assim

$$\dim[V(\lambda_2)] = \dim[V(-i)] = 1\,,$$

ou seja, a multiplicidade geométrica do autovalor $\lambda_2 \doteq -i$ (que é a dimensão de $V(\lambda_2) = V(-i)$) será igual a $\underline{1}$, , isto é,

$$m_g(\lambda_2) = m_g(-i) = 1\,.$$

Notemos que o vetor

$$u_1 \doteq (1\,,i) \tag{12.33}$$

é um autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 \doteq i$ e que o vetor

$$u_2 \doteq (1\,,-i) \tag{12.34}$$

é um autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 \doteq -i$.

Além disso, o conjunto

$$\{u_1\,,u_2\}$$

L.I. em $\left(\mathbb{C}^2\,,+\,,\cdot\right)$ (sobre os complexos).

A verificação destes fatos serão deixadas como exercício para o leitor.

Observemos também que

$$\dim\left[\mathbb{C}^2\right] = 2\,,$$

onde estamos considerando o espaço vetorial **complexo** $\left(\mathbb{C}^2\,,+\,,\cdot\right)$ (se fosse considerado como espaço vetorial **real**, sua dimensão seria igual a $\underline{4}$).

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Assim, o espaço vetorial complexo $\left(\mathbb{C}^2\,,+\,,\cdot\right)$, possui uma base formada por autovetores

$$u_1 \quad \text{e} \quad u_2$$

do operador linear $\underline{T}$, a saber, o conjunto

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1\,,u_2\}\,.$$

Para finalizar, encontremos a matriz do operador linear $\underline{T}$, em relação à base (ordenada)

$$\mathcal{B} = \{u_1\,, u_2\}\,,$$

formada pelos autovetores de $\underline{T}$ dados por (12.33) e (12.34).

Para isto, observemos que

$$\begin{aligned} T(u_1) &\overset{(12.33)}{=} T(1\,, i) \\ &\overset{(12.32)}{=} (-i\,, 1) \\ &\overset{\text{Exercício}}{=} (-i)\cdot(1\,, i) + 0\cdot(1\,, -i)\,, \\ T(u_2) &\overset{(12.34)}{=} T(1\,, -i) \\ &\overset{(12.32)}{=} (i\,, 1) \\ &\overset{\text{Exercício}}{=} 0\cdot(1\,, i) + i\cdot(1\,, -i)\,. \end{aligned}$$

Logo, a matriz do operador linear $\underline{T}$ com relação à base $\mathcal{B}$ será a matriz diagonal

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \tag{12.35}$$

completando a resolução. $\square$

Observação 12.36 *Logo, podemos resumir que, no Exemplo (12.31) acima:*

- *existe uma base do espaço vetorial* **complexo** $(\mathbb{C}^2\,, +\,, \cdot)$ *formada por autovetores do operador linear* $\underline{T}$*;*
- *a matriz do operador linear* $\underline{T}$*, em relação a essa base é uma matriz diagonal (complexa);*
- *a diagonal principal da matriz acima é formada pelos autovalores (complexos) do operador linear* $\underline{T}$*.*

Compare esta Observação com a Observação (12.26).
O que há em comum entre ambas ?

Exemplo 12.37 *Sejam* $(\mathscr{P}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *espaço vetorial real (onde + e · são as operações usuais soma de polinômios e multiplicação de número real por polinômio, respectivamente) e a aplicação* $T : \mathscr{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$*, dada por*

$$T(p) \doteq p\,'\,, \quad \textit{para cada} \quad p \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})\,. \tag{12.38}$$

Mostre que $T \in \mathcal{L}(\mathscr{P}_n(\mathbb{R}))$*, verifique que*

$$\lambda = 0$$

é o único autovalor associado a este operador linear $\underline{T}$ *e encontre o subespaço próprio* $V(\lambda) = V(O)$.

Resolução:

Utilizando as idéias do que foi feito no Exemplo (10.25), segue que $T \in \mathcal{L}(\mathscr{P}_n(\mathbb{R}))$.

Observemos que $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor do operador linear $\underline{T}$ se, e somente se, existir

$$p \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R}), \quad \text{com} \quad p \neq O,$$

tal que

$$T(p) = \lambda \cdot p$$

que, por (12.38), é equivalente a: $\quad p\,' = \lambda \cdot p$

isto é, $\quad p\,'(x) = \lambda\, p(x), \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}. \qquad (12.39)$

Como $p \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$, segue que existem

$$a_o, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R},$$

de modo que

$$p(x) = a_o + a_1\, x + \cdots + a_n\, x^n, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}, . \qquad (12.40)$$

Logo

$$p\,'(x) = a_1 + 2\, a_2\, x + \cdots + n\, a_n\, x^{n-1}, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}. \qquad (12.41)$$

Portanto, de (12.39), (12.40) e (12.41), segue que, para $x \in \mathbb{R}$, deveremos ter:

$$p\,'(x) = \lambda\, p(x),$$

se, e somente se, $\quad a_1 + 2\, a_2\, x + \cdots + n\, a_n\, x^{n-1} = \lambda\, (a_o + a_1\, x + \cdots + a_n\, x^n)\,,$

ou, equiavlentemente,

$$(\lambda\, a_o - a_1) + (\lambda\, a_1 - 2\, a_2)\, x + \cdots + (\lambda\, a_{n-1} - n\, a_n)\, x^{n-1} + \lambda\, a_n x_n = 0, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R},$$

ou seja,

$$\begin{cases} \lambda\, a_o - a_1 = 0 \\ \lambda\, a_1 - 2\, a_2 = 0 \\ \vdots \\ \lambda\, a_{n-1} - n\, a_n = 0 \\ a_n = 0 \end{cases}.$$

Notemos que , se

$$\lambda \neq 0,$$

a única solução do sistema linear acima será

$$a_o = a_1 = \cdots = a_n,$$

que de (12.40), implicará em

$$p = O \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R}).$$

Desta forma, se

$$\lambda \neq 0\,,$$

segue que $\underline{\lambda}$ não poderá ser autovalor do operador linear $\underline{T}$.

Por outro lado, se

$$\lambda = 0\,,$$

teremos

$$T(p) = 0 \cdot p \quad \text{se, e somente se,} \quad p\,' = O$$

que apresentará como solução, não trivial, todos os polinômios que são constantes, não identicamente nulos.

Logo,

$$\lambda = 0$$

é o único autovalor do operador $\underline{T}$ associado ao, por exemplo, ao autovetor

$$p \equiv 1\,,$$

isto é, o polinômio constante e igual a $\underline{1}$.

Com isto teremos que

$$\begin{aligned} V(0) &= \mathcal{N}[T - 0 \cdot I] \\ &= \mathcal{N}(T) \\ &= [p]\,, \end{aligned}$$

isto é, será o subespaço gerado pelo polinômio $p \equiv 1$.

Em particular a multiplicidade geométrica do autovalor $\lambda = 0$ (isto é, $\dim[V(0)]$) será igual a $\underline{1}$, completando a resolução.

$\square$

Consideremos agora o:

Exemplo 12.42 *Sejam $(\mathbb{R}^3\,, +\,, \cdot)$ espaço vetorial real (onde $+$ e $\cdot$ são as operações usuais de $\mathbb{R}^3$) e a aplicação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por dada por*

$$T(x\,,y\,,z) \doteq (x\,,y\,,x)\,, \quad \textit{para cada} \quad (x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,. \tag{12.43}$$

Mostre que $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, encontre todos os autovalores do operador linear $\underline{T}$, os respectivos subespaços próprios e a multiplicidade geométrica de cada um dos autovalores associados ao operador linear $\underline{T}$.

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor verificar que $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

Observemos que $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor de T se, e somente se, existir

$$u \doteq (x\,,y\,,z) \neq (0\,,0\,,0)\,,$$

tal que

$$\underbrace{T(x\,,y\,,z)}_{\overset{(12.43)}{=}(x\,,y\,,x)}=\lambda\cdot(x\,,y\,,z),$$

ou, equivalentemente, existir

$$(x\,,y\,,z)\neq(0\,,0\,,0)\,,$$

tal que

$$(x\,,y\,,x)=(\lambda\,x\,,\lambda\,y\,,\lambda\,z)\,.$$

Isto é equivalente ao sistema linear

$$\begin{cases}(1-\lambda)\,x=0\\(1-\lambda)\,y=0\\-x+\lambda\,z=0\end{cases}$$

possuir uma solução não trivial.

Isto acontece se, e somente se, o determinante da matriz

$$A\doteq\begin{pmatrix}1-\lambda&0&0\\0&1-\lambda&0\\-1&0&\lambda\end{pmatrix}$$

for igual a zero (ver Apêndice (B)).

Como

$$\begin{aligned}\det(A)&=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&0\\0&1-\lambda&0\\-1&0&\lambda\end{vmatrix}\\&=\lambda\,(1-\lambda)^2\,,\end{aligned}$$

segue que os, únicos, autovalores do operador linear $\underline{T}$ serão

$$\lambda_1=0\quad\text{e}\quad\lambda_2=1\,,$$

sendo que este último tem multiplicidade algébrica igual a $\underline{2}$.

Com isto teremos que:

$$\begin{aligned}V(\lambda_1)&=V(0)\\&\doteq\left\{(x\,,y\,,z)\in\mathbb{R}^3\,;\,\underbrace{T(x\,,y\,,z)}_{\overset{(12.43)}{=}(x\,,y\,,x)}=0\cdot(x\,,y\,,z)\right\}\\&=\left\{(x\,,y\,,z)\in\mathbb{R}^3\,;\,(x\,,y\,,x)=(0\,,0\,,0)\right\}\\&=\left\{(x\,,y\,,z)\in\mathbb{R}^3\,;\,x=y=0\right\}\\&=\{(0\,,0\,,z)\,;\,z\in\mathbb{R})\}\\&=\{z\cdot(0\,,0\,,1)\,;\,z\in\mathbb{R})\}\\&=[(0\,,0\,,1)]\,,\end{aligned}$$

ou seja,

$$V(\lambda_1) = V(0) = [(0\,,0\,,1)]\,. \tag{12.44}$$

Assim, a multiplicidade geométrica do autovalor $\underline{0}$, será igual a $\underline{1}$, ou seja,

$$\dim[V(\lambda_1)] = \dim[V(0)] = 1\,, \tag{12.45}$$

ou ainda,

$$m_g(\lambda_1) = m_g(0) = 1\,.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} V(\lambda_2) &= V(1) \\ &\doteq \left\{ (x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, \underbrace{T(x\,,y\,,z)}_{\overset{(12.43)}{=}(x\,,y\,,x)} = 1\cdot(x\,,y\,,z) \right\} \\ &= \left\{ (x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, (x\,,y\,,x) = (x\,,y\,,z) \right\} \\ &= \left\{ (x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x = z \right\} \\ &= \{(z\,,y\,,z)\,;\, z \in \mathbb{R})\} \\ &= \{z\cdot(1\,,0\,,1) + y(0\,,1\,,0)\,;\, z\,,y \in \mathbb{R})\} \\ &= [(0\,,1\,,0)\,,(1\,,0\,,1)]\,, \end{aligned}$$

ou seja,

$$V(\lambda_2) = V(1) = [(0\,,1\,,0)\,,(1\,,0\,,1)]\,. \tag{12.46}$$

Assim, a multiplicidade geométrica do autovalor $\underline{1}$, será igual a 2, isto é,

$$\dim[V(\lambda_2)] = \dim[V(1)] = 2\,, \tag{12.47}$$

ou seja,

$$m_g(\lambda_2) = m_g(1) = 2\,.$$

completando a resolução.

□

Observação 12.48 *No Exemplo (12.42) acima, temos que o conjunto formado pelos autovetores de $\underline{T}$*

$$\mathcal{B} \doteq \{(0\,,0\,,1)\,,(0\,,1\,,0)\,,(1\,,0\,,1)\}$$

é L.I. em $(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot)$.

A verificação deste fato será deixada como exercícioi para o leitor.

Logo o conjunto de vetores $\mathcal{B}$ será uma base (ordenada) de $(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot)$.

Encontremos a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$.

Para isto observemos que

$$\begin{aligned}
T(0,0,1) &\overset{(12.43)}{=} (0,0,0) \\
&= 0\cdot(0,0,1)+0\cdot(0,1,0)+0\cdot(1,0,1)\,, \\
T(0,1,0) &\overset{(12.43)}{=} (0,1,0) \\
&= 0\cdot(0,0,1)+1\cdot(0,1,0)+0\cdot(1,0,1)\,, \\
T(1,0,1) &\overset{(12.43)}{=} (1,0,1) \\
&= 0\cdot(0,0,1)+0\cdot(0,1,0)+1\cdot(1,0,1)\,,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Conclusão: *no Exemplo (12.42) acima, existe uma base do espaço vetorial* $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$, *formada por autovetores do operador linear* $\underline{T}$.

Além disso, a matriz do operador linear $\underline{T}$, *em relação a essa base (ordenada), é uma matriz diagonal, cuja diagonal principal é formada pelos respectivos autovalores do operador linear* $\underline{T}$.

Temos agora o seguinte resultado:

Proposição 12.49 *Sejam* $(U,+,\cdot)$ *um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) e* $T \in \mathcal{L}(U)$ *tal que*

$$u_1\,,u_2\,,\cdots,u_n$$

são autovetores do operador linear $\underline{T}$, *associados aos autovalores*

$$\lambda_1\,,\lambda_2\,,\cdots,\lambda_n\,,$$

respectivamente.

Se

$$\lambda_i \neq \lambda_j\,, \quad \text{para} \quad i \neq j\,, \quad \text{com} \quad i,j \in \{1,2,\cdots,n\}, \tag{12.50}$$

então os vetores

$$u_1\,,u_2\,,\cdots,u_n$$

serão L.I. em $(U,+,\cdot)$.

Prova:

A prova será por indução sobre o número de autovalores, isto é, sobre $\underline{n}$.

Mostremos que a afirmação é válida para $n=2$, ou seja, se

$$u_1 \quad \text{e} \quad u_2$$

são autovetores do operador linear $\underline{T}$, associados aos autovalores

$$\lambda_1 \quad \text{e} \quad \lambda_2\,,$$

respectivamente, e

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 , \tag{12.51}$$

mostremos que o conjunto

$$\{u_1 , u_2\}$$

deverá ser L.I. em $(U , + , \cdot)$.

De fato, sabemos que

$$T(u_1) = \lambda_1 \cdot u_1 \quad \text{e} \quad T(u_2) = \lambda_2 \cdot u_2 . \tag{12.52}$$

Para isto observemos que se

$$\beta_1 \cdot u_1 + \beta_2 \cdot u_2 = O , \tag{12.53}$$

segue que

$$\beta_1 \cdot u_1 = -\beta_2 \cdot u_2 \tag{12.54}$$

Logo, aplicando o operador linear T a ambos os membros de (12.53), obteremos:

$$\begin{aligned}
\underbrace{T(O)}_{\overset{\text{T é op. linear}}{=} O} &= T(\beta_1 \cdot u_1 + \beta_2 \cdot u_2) \\
&\overset{\text{T é operador linear}}{=} \beta_1 \cdot \underbrace{T(u_1)}_{\overset{(12.52)}{=} \lambda_1 \cdot u_1} + \beta_2 \cdot \underbrace{T(u_2)}_{\overset{(12.52)}{=} \lambda_2 \cdot u_2} \\
&= \underbrace{\beta_1 \cdot (\lambda_1 \cdot u_1)}_{= \lambda_1 \cdot (\beta_1 \cdot u_1)} + \beta_2 \cdot (\lambda_2 \cdot u_2) \\
&\overset{(12.54)}{=} \lambda_1 \cdot (-\beta_2 \cdot u_2) + \beta_2 \cdot (\lambda_2 \cdot u_2). \\
&= \beta_2 \cdot (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot u_2
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\beta_2 \cdot (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot u_2 = O.$$

Como

$$u_2 \neq O$$

(pois é um autovetor do operador linear T) e, por hipótese,

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 ,$$

resulta que

$$\beta_2 = 0 .$$

Logo, deste fato e de (12.54), teremos

$$\beta_1 \cdot u_1 = 0 .$$

Como $u_1 \neq O$ (pois é um autovetor do operador linear T) segue

$$\beta_1 = 0 .$$

Logo a identidade (12.53) implicará que

$$\beta_1 = \beta_2 = 0\,,$$

ou seja, o conjunto de vetores $\mathcal{B} = \{u_1\,, u_2\}$ é L.I. em $(U\,, +\,, \cdot)$, completando a demonstração para o caso $n = 2$.

Suponhamos, como hipótese de indução, que $\underline{n-1}$ autovetores associados ao operador linear $\underline{T}$, associados a $\underline{n-1}$ autovalores, dois a dois distintos, sejam L.I. em $(U\,, +\,, \cdot)$.

Mostremos que o mesmo resultado vale para uma coleção de $\underline{n}$ autovetores associadaos ao operador linear $\underline{T}$, associados a $\underline{n}$ autovalores, dois a dois distintos.

Sejam então

$$u_1\,, u_2\,, \cdots\,, u_n$$

autovetores do operador linear $\underline{T}$, associados aos autovalores

$$\lambda_1\,, \lambda_2\,, \cdots\,, \lambda_n\,,$$

que são, dois a dois, distintos, ou seja,

$$T(u_i) = \lambda_i \cdot u_i\,, \quad \text{para cada} \quad i \in \{1\,, 2\,, \cdots\,, n\} \tag{12.55}$$

e

$$\lambda_i \neq \lambda_j\,, \quad \text{para} \quad i \neq j\,, \quad \text{com} \quad i, j \in \{1\,, 2\,, \cdots\,, n\}. \tag{12.56}$$

Suponhamos, por absurdo, que os vetores

$$u_1\,, u_2\,, \cdots\,, u_n$$

sejam L.D. em $(U\,, +\,, \cdot)$.

Logo, da Proposção (6.33), pelo menos um dos vetores

$$u_1\,, u_2\,, \cdots\,, u_n\,,$$

poderá ser escrito como combinação linear dos restantes.

Para simplificar a notação, suponhamos que o vetor $\underline{u_1}$, possa ser escrito como combinação linear dos vetores

$$u_2\,, u_3\,, \cdots\,, u_n\,,$$

ou seja, existem escalares

$$\alpha_2\,, \alpha_3\,, \cdots\,, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad (\text{respectivamente, } \mathbb{C})\,,$$

de modo que

$$u_1 = \alpha_2 \cdot u_2 + \alpha_3 \cdot u_3 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n\,. \tag{12.57}$$

Aplicando $\underline{T}$ em ambos os membros da identidade acima, obteremos então

$$\begin{aligned}
\underbrace{T(u_1)}_{\overset{(12.55)}{=}\lambda_1 \cdot u_1} &= T[\alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n] \\
&\overset{T \text{ é op. linear}}{=} \alpha_2 \cdot \underbrace{T(u_2)}_{\overset{(12.55)}{=}\lambda_2 \cdot u_2} + \cdots + \alpha_n \cdot \underbrace{T(u_n)}_{\overset{(12.55)}{=}\lambda_n \cdot u_n},
\end{aligned}$$

$$\text{ou seja,} \qquad \lambda_1 \cdot \underbrace{u_1}_{\overset{(12.57)}{=}\alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n} = (\alpha_2 \lambda_2) \cdot u_2 + \cdots + (\alpha_n \lambda_n) \cdot u_n. \tag{12.58}$$

Com isto obteremos

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 \cdot (\alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n) = (\alpha_2 \lambda_2) \cdot u_2 + \cdots + (\alpha_n \lambda_n) \cdot u_n, \\
\text{ou seja,} \qquad & O = \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n (\lambda_n - \lambda_1) \cdot u_n .
\end{aligned}$$

Notemos que na soma acima temos $\underline{n-1}$ autovetores do operador linear $\underline{T}$, associados a $\underline{n-1}$ autovalores que são, dois a dois, distintos.

Logo, pela hipótese de indução, segue que os autovetores

$$u_2, u_3, \cdots, u_n$$

deverão ser L.I. em $(U, +, \cdot)$), ou seja, deveremos ter:

$$\alpha_2 \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_1)}_{\overset{(12.56)}{\neq} 0} = \cdots = \alpha_n \underbrace{(\lambda_n - \lambda_1)}_{\overset{(12.56)}{\neq} 0} = 0 .$$

Assim, segue que:

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Logo, da equação (12.57), deveremos ter

$$u_1 = O,$$

o que é um absurdo, pois o vetor $\underline{u_1}$ é um autovetor do operador linear $\underline{T}$ (logo $u_1 \neq O$).

Logo podemos concluir que os vetores

$$u_1, u_2, \cdots, u_n$$

são L.I. em $(U, +, \cdot)$, completando a demonstração do resultado.

∎

Temos também a:

Proposição 12.59 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) de dimensão finita e* $T \in \mathcal{L}(U)$*, tal que seus autovalores*

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n,$$

são, dois a dois, distintos, isto é,

$$\lambda_i \neq \lambda_j\,, \quad \textit{para} \quad i \neq j\,, \quad \textit{com} \quad i\,,j \in \{1\,,2\,,\cdots,n\}\,, \tag{12.60}$$

Então a soma dos subespaços próprios do operador $\underline{T}$ *será uma soma direta, isto é,*

$$\bigoplus_{i=1}^{n} V(\lambda_i)\,,$$

ou ainda, para cada $j \in \{1\,,2\,,\cdots,n\}$, *teremos*

$$V(\lambda_j) \cap [V(\lambda_1) + \cdots + V(\lambda_{j-1}) + V(\lambda_{j+1}) + \cdots + V(\lambda_n)] = \{O\}\,. \tag{12.61}$$

Prova:

A prova será feita por indução sobre o número de autovalores distintos do operador linear $\underline{T}$, isto é, sobre $\underline{n}$.

Mostremos que a afirmação é válida para $n = 2$, ou seja, se

$$u_1 \quad \text{e} \quad u_2$$

são autovetores de $\underline{T}$ associados aos autovalores

$$\lambda_1 \quad \text{e} \quad \lambda_2\,,$$

respectivamente, com

$$\lambda_1 \neq \lambda_2\,, \tag{12.62}$$

então teremos

$$V(\lambda_1) \cap V(\lambda_2) = \{O\}\,.$$

Para isto, fixemos

$$\mathcal{B}_1 \doteq \left\{v_1^{(1)}, \cdots, v_{m_1}^{(1)}\right\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}_2 \doteq \left\{v_1^{(2)}, \cdots, v_{m_2}^{(2)}\right\} \tag{12.63}$$

bases de $(V(\lambda_1)\,,+\,,\cdot)$ e $(V(\lambda_2)\,,+\,,\cdot)$, respectivamente, onde

$$\dim[V(\lambda_i)] = m_i\,, \quad \text{para cada} \quad i \in \{1\,,2\}\,. \tag{12.64}$$

Se

$$u \in V(\lambda_1) \cap V(\lambda_2)\,, \quad \text{então} \quad u \in V(\lambda_1) \quad \text{e} \quad u \in V(\lambda_2)\,,$$

Logo existem escalares

$$\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \cdots, \alpha_{m_1}^{(1)}, \alpha_{m_2}^{(1)}, \alpha_1^{(2)}, \cdots, \alpha_{m_2}^{(2)} \in \mathbb{R} \quad (\text{respectivamente, } \mathbb{C})\,,$$

tais que

$$u = \alpha_1^{(1)} \cdot v_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)} \cdot v_2^{(1)} + \cdots + \alpha_{m_1}^{(1)} \cdot v_{m_1}^{(1)} \tag{12.65}$$

$$= \alpha_1^{(2)} \cdot v_1^{(2)} + \alpha_2^{(2)} \cdot v_2^{(2)} + \cdots + \alpha_{m_2}^{(2)} \cdot v_{m_2}^{(2)}\,. \tag{12.66}$$

Aplicando o operador T na identidade acima obteremos:

$$T\left(\alpha_1^{(1)} \cdot v_1^{(1)} + \cdots + \alpha_{m_1}^{(1)} \cdot v_{m_1}^{(1)}\right) = T\left(\alpha_1^{(2)} \cdot v_1^{(2)} + \cdots + \alpha_{m_2}^{(2)} \cdot v_{m_2}^{(2)}\right).$$

Como $\underline{T}$ é um operador linear em $(U\,,+\,,\cdot)$, esta identidade será equivalente a

$$\alpha_1^{(1)} \cdot T\left(v_1^{(1)}\right) + \cdots + \alpha_{m_1}^{(1)} \cdot T\left(v_{m_1}^{(1)}\right) = \alpha_1^{(2)} \cdot T\left(v_1^{(2)}\right) + \cdots + \alpha_{m_2}^{(2)} \cdot T\left(v_{m_2}^{(2)}\right). \tag{12.67}$$

Mas, para cada $i \in \{1\,,2\}$ e $j \in \{1\,,2\,,\cdots\,,m_i\}$, temos que

$$T\left(v_j^{(i)}\right) = \lambda_i \cdot v_j^{(i)}. \tag{12.68}$$

Substituindo (12.68) em (12.67), obteremos

$$\alpha_1^{(1)} \cdot \left(\lambda_1 \cdot v_1^{(1)}\right) + \cdots + \alpha_{m_1}^{(1)} \cdot \left(\lambda_1 \cdot v_{m_1}^{(1)}\right) = \alpha_1^{(2)} \cdot \left(\lambda_2 \cdot v_1^{(2)}\right) + \cdots + \alpha_{m_2}^{(2)} \cdot \left(\lambda_2 \cdot v_{m_2}^{(2)}\right). \tag{12.69}$$

Multiplicando a equação (12.66) por λ_1 e subtraindo-a da equação (12.69), obteremos

$$\left[\alpha_1^{(2)}\,(\lambda_2 - \lambda_1)\right] \cdot v_1^{(2)} + \cdots + \left[\alpha_{m_2}^{(2)}\,(\lambda_2 - \lambda_1)\right] \cdot v_{m_2}^{(2)} = 0\,.$$

Como o conjunto de vetores

$$\mathcal{B}_2 = \left\{v_1^{(2)}\,,\cdots\,,v_{m_2}^{(2)}\right\}$$

é uma base de $(V(\lambda_2)\,,+\,,\cdot)$, segue que o conjunto $\mathcal{B}_2$ deverá se L.I. em $(U\,,+\,,\cdot)$.

Logo, deveremos ter

$$\alpha_1^{(2)}\,(\lambda_2 - \lambda_1) = \cdots = \alpha_{m_2}^{(2)}\,(\lambda_2 - \lambda_1) = 0\,.$$

Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, resulta que

$$\alpha_1^{(2)} = \cdots = \alpha_{m_2}^{(2)} = 0.$$

Logo, de (12.66), segue que

$$u = O$$

ou seja,

$$V(\lambda_1) \cap V(\lambda_2) = \{O\}.$$

Suponhamos agora, que a soma de $\underline{n-1}$ subespaços próprios do operador linear $\underline{T}$, associados a $\underline{n-1}$ autovalores, dois a dois distintos, seja uma soma direta.

Precisamos mostrar que este mesmo resultado será válido quando o operador linear $\underline{T}$ possui $\underline{n}$ autovalores, dois a dois distintos.

Para isto, para cada

$$j \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\},$$

consideremos uma base

$$\mathcal{B}_j \doteq \left\{v_i^{(j)}\,;\, i \in \{1\,,2\,,\cdots\,,m_j\}\right\}$$

de $(V(\lambda_j)\,,+\,,\cdot)$.

Notemos que, para cada

$$j \in \{1, 2, \cdots, n\} \quad \text{e cada} \quad i \in \{1, 2, \cdots, m_j\},$$

o vetor $v_i^{(j)}$ é um autovetor associado ao autovalor λ_j, isto é,

$$T\left(v_i^{(j)}\right) = \lambda_j \cdot v_i^{(j)}, \tag{12.70}$$

e que $\underline{m_j}$ é a multiplicidade geométrica deste autovalor, isto é,

$$\dim\left[(V(\lambda_j)\right] = m_j .$$

Seja

$$u \in V(\lambda_j) \cap [V(\lambda_1) + \cdots + V(\lambda_{j-1}) + V(\lambda_{j+1}) + \cdots + V(\lambda_n)] .$$

Como

$$u \in V(\lambda_j) \quad \text{e} \quad u \in [V(\lambda_1) + \cdots + V(\lambda_{j-1}) + V(\lambda_{j+1}) + \cdots + V(\lambda_n)],$$

segue que existem escalares

$$\begin{aligned}
&\alpha_1^{(j)}, \cdots, \alpha_{m_j}^{(j)}, \\
&\alpha_1^{(1)}, \cdots, \alpha_{m_1}^{(1)}, \\
&\quad\vdots \\
&\alpha_1^{(j-1)}, \cdots, \alpha_{m_{j-1}}^{(j-1)}, \\
&\alpha_1^{(j+1)}, \cdots, \alpha_{m_{j-1}}^{(j+1)}, \\
&\quad\vdots \\
&\alpha_1^{(n)}, \cdots, \alpha_{m_n}^{(n)} \in \mathbb{R} \quad (\text{respectivamente, } \mathbb{C}),
\end{aligned} \tag{12.71}$$

tais que

$$u = \alpha_1^{(j)} \cdot v_1^{(j)} + \cdots + \alpha_{m_j}^{(j)} \cdot v_{m_j}^{(j)} \tag{12.72}$$

$$= \alpha_1^{(1)} \cdot v_1^{(1)} + \cdots + \alpha_{m_{j-1}}^{(j-1)} \cdot v_{m_{j-1}}^{(j-1)} + \alpha_1^{(j+1)} \cdot v_1^{(j+1)} + \cdots + \alpha_{m_n}^{(n)} \cdot v_{m_n}^{(n)}. \tag{12.73}$$

Aplicando o operador linear $\underline{T}$ na identidade acima, obteremos:

$$\begin{aligned}
&T\left(\alpha_1^{(j)} \cdot v_1^{(j)} + \cdots + \alpha_{m_j}^{(j)} \cdot v_{m_j}^{(j)}\right) \\
&\qquad = T\left(\alpha_1^{(1)} \cdot v_1^{(1)} + \cdots + \alpha_{m_{j-1}}^{(j-1)} \cdot v_{m_{j-1}}^{(j-1)} + \alpha_1^{(j+1)} \cdot v_1^{(j+1)} + \cdots + \alpha_{m_n}^{(n)} \cdot v_{m_n}^{(n)}\right)
\end{aligned}$$

Como a aplicação $\underline{T}$ é um operador linear em $(U, +, \cdot)$, esta identidade será equivalente a

$$\begin{aligned}
\alpha_1^{(j)} \cdot T\left(v_1^{(j)}\right) + \cdots + \alpha_{m_j}^{(j)} \cdot T\left(v_{m_j}^{(j)}\right) &= \alpha_1^{(1)} \cdot T\left(v_1^{(1)}\right) + \cdots + \alpha_{m_{j-1}}^{(j-1)} \cdot T\left(v_{m_{j-1}}^{(j-1)}\right) \\
&\quad + \alpha_1^{(j+1)} \cdot T\left(v_1^{(j+1)}\right) + \cdots + \alpha_{m_n}^{(n)} \cdot T\left(v_{m_n}^{(n)}\right) .
\end{aligned}$$

Subsituindo (12.70) na equação acima, obteremos:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1^{(j)} \cdot \left(\lambda_j \cdot v_1^{(j)}\right) + \cdots + \alpha_{m_j}^{(j)} \cdot \left(\lambda_j \cdot v_{m_j}^{(j)}\right) \\
&\quad = \alpha_1^{(1)} \cdot \left(\lambda_1 \cdot v_1^{(1)}\right) + \cdots + \alpha_{m_{j-1}}^{(j-1)} \cdot \left(\lambda_{j-1} \cdot v_{m_{j-1}}^{(j-1)}\right) + \alpha_1^{(j+1)} \cdot \left(\lambda_{j+1} \cdot v_1^{(j+1)}\right) + \\
&\qquad + \cdots + \alpha_{m_n}^{(n)} \cdot \left(\lambda_n \cdot v_{m_n}^{(n)}\right) .
\end{aligned} \tag{12.74}$$

Multiplicando a equação (12.73) por λ_j e subtraindo-a da equação (12.74), obteremos

$$\begin{aligned}
&\left[\alpha_1^{(1)} (\lambda_1 - \lambda_j)\right] \cdot v_1^{(1)} + \cdots + \left[\alpha_{m_{j-1}}^{(j-1)} (\lambda_{j-1} - \lambda_j)\right] \cdot v_{m_{j-1}}^{(j-1)} \\
&\qquad + \left[\alpha_1^{(j+1)} (\lambda_{j+1} - \lambda_j)\right] \cdot v_1^{(j+1)} + \cdots + \left[\alpha_{m_n}^{(n)} (\lambda_n - \lambda_j)\right] \cdot v_{m_n}^{(n)} = O .
\end{aligned}$$

Usando a nossa hipótese de indução, isto é, que $\underline{n-1}$ autovetores do operador linear $\underline{T}$, associados a $\underline{n-1}$ autovalores, dois a dois distintos, são L.I. em $(U\,,+\,,\cdot)$, segue que

$$\alpha_1^{(1)} (\lambda_1 - \lambda_j) = \cdots = \alpha_{m_{j-1}}^{(j-1)} (\lambda_{j-1} - \lambda_j) = \alpha_1^{(j+1)} (\lambda_{j+1} - \lambda_j) = \cdots = \alpha_{m_n}^{(n)} (\lambda_n - \lambda_j) = 0 .$$

Como, por hipótese, temos

$$\lambda_j \neq \lambda_i\,, \quad \text{para cada} \quad i \neq j\,,$$

obteremos

$$\alpha_1^{(i)} = \cdots = \alpha_{m_i}^{(i)} = 0,$$

para cada

$$i \in \{1\,,2\,,\cdots\,,j-1\,,j+1\,,\cdots\,,n\} .$$

Assim, da equação (12.73), resultará que

$$u = O\,,$$

ou seja,

$$V(\lambda_j) \cap [V(\lambda_1) + \cdots + V(\lambda_{j-1}) + V(\lambda_{j+1}) + \cdots + V(\lambda_n)] = \{O\}\,,$$

para cada $j \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}$, completando a demonstração do resultado.

∎

12.2 Polinômio Característico

Nosso objetivo é fazer um estudo um pouco mais profundo dos autovalores associados a um operador linear, definido em um espaço vetorial real (respectivamente, complexo).

Para isto precisaremos introduzir alguns conceitos e propriedades relacionadas com os mesmos.

Começaremos pela:

Definição 12.75 *Dada uma matriz quadrada* $A \in M_n(\mathbb{R})$*, definiremos o* **polinômio característico associado a matriz** $\underline{A}$*, denotado por* p_A*, como sendo o polinômio obtido do determinante da matriz* $A - \lambda I_n$*, isto é,*

$$p_A(\lambda) \doteq \det(A - \lambda I_n), \quad \textit{para cada} \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{12.76}$$

onde I_n *é a matriz identidade de ordem* $\underline{n}$*.*

Um outro conceito importante é introduzido pela:

Definição 12.77 *Sejam* $A, B \in M_n(\mathbb{R})$*.*

Diremos que a matriz $\underline{A}$ *é* **semelhante** *a matriz* $\underline{B}$*, e escreveremos* $A \sim B$*, se existir uma matriz* $M \in M_n(\mathbb{R})$ *inversível, tal que*

$$A = M^{-1} B M. \tag{12.78}$$

Com isto temos o:

Proposição 12.79 *Sejam* $A, B \in M_n(\mathbb{R})$*.*

Se a matriz $\underline{A}$ *é semelhante a matriz* $\underline{B}$*, então teremos que a matriz* $\underline{B}$ *será semelhante a matriz* $\underline{A}$*, ou seja,*

$$\textit{se} \quad A \sim B, \quad \textit{então} \quad B \sim A.$$

Prova:

De fato, se a matriz $\underline{A}$ é semelhante a matriz $\underline{B}$, então existe uma matriz $M \in M_n(\mathbb{R})$ inversível tal que

$$A = M^{-1} B M. \tag{12.80}$$

Multiplicando a identidade acima, pela esquerda pela matriz $\underline{M}$ e, pela direita, pela matriz M^{-1}, obteremos:

$$\begin{aligned} M \underbrace{A}_{\overset{(12.80)}{=} M^{-1} B M} M^{-1} &= M \left[M^{-1} B M\right] M^{-1} \\ &= \Big[\underbrace{M M^{-1}}_{I_n}\Big] B \Big[\underbrace{M M^{-1}}_{=I_n}\Big] \\ &= I_n B I_n \\ &= B. \end{aligned}$$

Tomando-se

$$N \doteq M^{-1},$$

da identidade acima obteremos

$$B = N^{-1} A N,$$

isto é, a matriz $\underline{B}$ é semelhante a matriz $\underline{A}$, como queríamos demonstrar.

∎

Observação 12.81 *Devido a Proposição (12.79) acima, diremos, no caso acima, que as matrizes quadradas* $\underline{A}$ *e* $\underline{B}$ *são* **semelhantes** .

Um resultado importante é dado pela:

Proposição 12.82 *Sejam* $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ *matrizes semelhantes.*
Então seus polinômios característicos são iguais, isto é,

$$p_A = p_B . \tag{12.83}$$

Prova:
Como as matrizes $\underline{A}$ e $\underline{B}$ são semelhantes, da Definição (12.75), segue que, existe uma matriz $M \in M_n(\mathbb{R})$ inversível, tal que

$$A = M^{-1} B M . \tag{12.84}$$

Logo

$$\begin{aligned}
p_A(\lambda) &\overset{(12.76)}{=} \det(A - \lambda I_n) \\
&\overset{(12.84)}{=} \det\left(M^{-1} B M - \lambda I_n\right) \\
&= \det\left(M^{-1} B M - \lambda M^{-1} I_n M\right) \\
&= \det\left[M^{-1}(B M - \lambda I_n M)\right] \\
&= \det\left[M^{-1}(B - \lambda I_n) M\right] \\
&\overset{\text{Apêndice (A)}}{=} \det\left(M^{-1}\right) \det(B - \lambda I_n) \det(M) \\
&\overset{\text{Apêndice (A)}}{=} \frac{1}{\det(M)} \underbrace{\det(B - \lambda I_n)}_{= p_B(\lambda)} \det(M) \\
&= p_B(\lambda) ,
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

∎

27.10.2015 - 22.a

Observação 12.85 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) de dimensão finita, tendo os conjuntos de vetores*

$$\mathcal{B} \quad e \quad \mathcal{C}$$

como sendo bases (ordenadas) de $(U, +, \cdot)$.
Lembremos, das Proposições (10.285) e (8.42), que se $T \in \mathcal{L}(U)$, *então*

$$\begin{aligned}
[T]_{\mathcal{C}} &\overset{(10.286)}{=} M_{\mathcal{C}\mathcal{B}} [T]_{\mathcal{B}} M_{\mathcal{B}\mathcal{C}} \\
&\overset{(8.43)}{=} [M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}]^{-1} [T]_{\mathcal{B}} M_{\mathcal{B}\mathcal{C}} ,
\end{aligned}$$

isto é, as matrizes quadradas $[T]_{\mathcal{C}}$ *e* $[T]_{\mathcal{B}}$ *são semelhantes.*

Logo, da Proposição (12.82) *acima, segue que os polinômios característicos associados as matrizes* $[T]_{\mathcal{C}}$ *e* $[T]_{\mathcal{B}}$ *serão iguais, isto é,*

$$p_{[T]_{\mathcal{B}}}(\lambda) = p_{[T]_{\mathcal{C}}}(\lambda)\,. \tag{12.86}$$

Logo o polinômio característico da matriz de um operador linear, **independe** *da base (ordenada) que escolhemos para o espaço vetorial real (respectivamente, complexo), de dimensão finita em questão.*

Com isto temos a:

Definição 12.87 *Sejam* $(U\,,+\,,\cdot)$ *espaço vetorial real (respectivamente, complexo) de dimensão finita e* $T \in \mathcal{L}(U)$*.*

Definimos o **polinômio característico do associado ao operador linear** T*, indicado por* p_T*, como sendo*

$$p_T(\lambda) \doteq p_{[T]_{\mathcal{B}}}(\lambda)\,,$$

onde o conjunto de vetores $\mathcal{B}$ *é uma base (ordenada) de* $(U\,,+\,,\cdot)$*.*

Apliquemos as idéias acima ao:

Exemplo 12.88 *Sejam* $\left(\mathbb{R}^2\,,+\,,\cdot\right)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de soma de pares e multiplicação de número real por par, respectivamente) e a aplicação* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*, dada por*

$$T(x\,,y) \doteq (a\,x + b\,y\,,c\,x + d\,y)\,, \quad \textit{para cada} \quad (x\,,y) \in \mathbb{R}^2, \tag{12.89}$$

onde $a\,,b\,,c\,,d \in \mathbb{R}$ *estão fixados.*

Mostre que $T \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2\right)$ *e encontre* $p_T(\lambda)$*.*

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor verificar que $T \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2\right)$.

Usaremos a base canônica

$$\mathcal{B} \doteq \{(1\,,0)\,,(0\,,1)\} \tag{12.90}$$

de $\left(\mathbb{R}^2\,,+\,,\cdot\right)$, para obter o polinômio caraterístico $p_T(\lambda)$, associado ao operador linear $\underline{T}$.

Notemos que

$$\begin{aligned}
T(1\,,0) &\overset{(12.89)}{=} (a\,,c) \\
&= (a\,,0) + (0\,,c) \\
&\overset{(12.90)}{=} a \cdot (1\,,0) + c \cdot (0\,,1)\,, \\
T(0\,,1) &\overset{(12.89)}{=} (b\,,d) \\
&= (b\,,0) + (0\,,d) \\
&\overset{(12.90)}{=} b \cdot (1\,,0) + d \cdot (0\,,1)\,.
\end{aligned}$$

Com isto teremosa que:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \tag{12.91}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
p_T(\lambda) &\overset{(12.76)}{=} \det\left([T]_{\mathcal{B}} - \lambda\, I_2\right) \\
&\overset{(12.91)}{=} \det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} \\
&\overset{\text{Exercício}}{=} \lambda^2 - (a+d)\,\lambda + a\,d - b\,c\,, \quad \text{para cada} \quad \lambda \in \mathbb{C}\,,
\end{aligned}$$

será o polinômio característico associado ao operador linear $\underline{T}$.

□

Temos agora a:

Proposição 12.92 *Sejam* $(U\,,+\,,\cdot)$ *um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) de dimensão finita e* $T \in \mathcal{L}(U)$.

Logo, $\lambda \in \mathbb{R}$ *(respectivamente,* $\mathbb{C}$*) é um autovalor do operador linear* $\underline{T}$ *se, e somente se,*

$$p_T(\lambda) = 0\,. \tag{12.93}$$

Em outras, palavras, os autovalores do operador linear $\underline{T}$ *deverão ser as raízes reais (ou complexas) do polinômio característico associado ao operador linear* $\underline{T}$.

Prova:

Consideremos o conjunto de vetores $\mathcal{B}$ como sendo uma base (ordenada) de $(U\,,+\,,\cdot)$.

Suponhamos que o escalar λ, seja um autovalor do operador linear $\underline{T}$.

Então, deverá existir um vetor

$$u \neq O\,,$$

tal que

$$\begin{aligned}
& T(u) = \lambda \cdot u \\
\text{ou, equivalentemente,} \qquad & (T - \lambda \cdot I_U)(u) = O\,.
\end{aligned}$$

Desta forma, vemos que o operador linear

$$(T - \lambda \cdot I_U) : U \to U$$

não será injetor.

Consequentemente, não poderá ser um isomorfismo em $(U\,,+\,,\cdot)$.

Logo, da Proposição (10.308), a matriz do operador linear $\underline{T}$, em relação à base (ordenada) $\mathcal{B}$, não poderá ser inversível, isto é, a matriz

$$[T - \lambda \cdot I_U]_{\mathcal{B}}$$

não poderá ser invertível.

Isto é (veja o Apêndice (A)), o determinante da matriz

$$[T - \lambda \cdot I_U]_{\mathcal{B}}$$

deverá ser igual a zero, ou ainda,

$$\begin{aligned} p_T(\lambda) &= \det[T - \lambda \cdot I]_{\mathcal{B}} \\ &= 0\,, \end{aligned}$$

isto é, o escalar λ deverá ser uma raiz do polinômio caraterístico associado ao operador linear T.

Reciprocamente, se o escalar λ é uma raiz do polinômio característico associado ao operador linear T, isto é,

$$p_T(\lambda) = 0\,,$$

então a matriz quadrada $[T - \lambda \cdot I_U]_{\mathcal{B}}$ deverá ter determinante nulo.

Isto garante, pela Proposição (10.308), que o operador linear

$$T - \lambda \cdot I_U : U \to U$$

não poderá ser um isomorfismo em $(U\,, +\,, \cdot)$, que, pelo Corolário (10.162), segue que não poderá ser injetor.

Portanto, pela Proposição (10.132), deveremos ter:

$$\mathcal{N}(T - \lambda \cdot I_U) \neq \{O\}\,,$$

ou seja, existe

$$u \neq O\,, \quad \text{tal que} \quad (T - \lambda \cdot I_U)(u) = O\,,$$

isto é,

$$T(u) = \lambda \cdot u\,, \quad \text{para algum} \quad u \in U\,, \quad \text{satisfazendo} \quad u \neq O\,,$$

mostrando que o escalar λ é um autovalor do operador linear T, completando a demonstração do resultado.

∎

Com isto temos o:

Exercício 12.94 *Refaça os Exercícios resolvidos* (12.16), (12.37) *e* (12.42) *tendo em vista a Proposição* (14.266) *acima, ou seja, escolha uma base para os espaços vetoriais reais de dimensões finitas envolvidos, encontre o polinômio caraterístico associado a cada um dos operadores lineares envolvidos e finalmente encontre os autovalores associados ao operador linear, encontrando as raízes do polinômio característicos obtidos.*

Observação 12.95 *No Exemplo* (12.27)*, se considerarmos a base canôncia*

$$\mathcal{B} \doteq \{(1\,, 0)\,, (0\,, 1)\} \tag{12.96}$$

de $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$, *obteremos*

$$
\begin{aligned}
T(1,0) &\overset{(12.28)}{=} (0,1) \\
&\overset{(12.96)}{=} 0 \cdot (1,0) + 1 \cdot (0,1), \\
T(0,1) &\overset{(12.28)}{=} (-1,0) \\
&\overset{(12.96)}{=} (-1) \cdot (1,0) + 0 \cdot (0,1).
\end{aligned}
$$

Assim teremos:

$$
[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{12.97}
$$

Logo

$$
\begin{aligned}
p_T(\lambda) &\overset{(12.76)}{=} \det\left([T]_{\mathcal{B}} - \lambda\, I_2\right) \\
&\overset{(12.97)}{=} \begin{vmatrix} 0-\lambda & -1 \\ 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} \\
&= \lambda^2 + 1,
\end{aligned} \tag{12.98}
$$

que **<u>não</u>** *possui raízes reais.*

Logo o operador linear $\underline{T}$ **<u>não</u>** *possui autovalores reais.*

Notemos que as raízes (complexas) do polinômio p_T*, serão*

$$
\lambda_1 = i \quad e \quad \lambda_2 = -i,
$$

isto é, ambas são complexas, não reais.

Podemos agora introduzir a:

Definição 12.99 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) de dimensão finita e* $T \in \mathcal{L}(U)$.

Se o escalar $\underline{\lambda}$ *é um autovalor do operador linear* $\underline{T}$*, definiremos a* **<u>multiplicidade algébrica de</u>** $\underline{\lambda}$*, que indicaremos por* $m_a(\lambda)$*, como sendo a multiplicidade do escalar* $\underline{\lambda}$ *como raiz do polinômio característico de* $\underline{T}$*, isto é, será a multiplicidade de* $\underline{\lambda}$ *como raiz do polinômio* p_T.

Com isto temos a:

Proposição 12.100 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) de dimensão finita e* $T \in \mathcal{L}(U)$.

Se o escalar λ_o *é um autovalor do operador linear* $\underline{T}$*, então a sua multiplicidade geométrica é menor ou igual a sua multiplicidade algébrica, ou seja,*

$$
m_g(\lambda_o) \leq m_a(\lambda_o),
$$

onde $m_g(\lambda_o)$ *e* $m_a(\lambda_o)$ *denotam a multiplicidade geométrica e multiplicidade algébrica do autovalor* λ_o*, do operador linear* $\underline{T}$*, respectivamete.*

Prova:

Suponhamos que
$$\dim(U) = n\,.$$

Denotemos por
$$m_a \doteq m_a(\lambda_o) \quad \text{e} \quad m_g \doteq m_g(\lambda_o)$$
as multiplicidades algébrica e geométrica do autovalor λ_o, associado ao operador linear $\underline{T}$, respectivamente.

Com isto teremos que
$$\dim[V(\lambda_o)] = m_g\,.$$

Logo existirá um conjunto
$$\mathcal{C} \doteq \{u_1\,, u_2\,, \cdots\,, u_{m_g}\}$$
que é uma base de $(V(\lambda_o)\,, +\,, \cdot)$.

Em particular, os vetores
$$u_1\,, u_2\,, \cdots\,, u_{m_g} \in V(\lambda_o)$$
são L.I. em $(U\,, +\,, \cdot)$.

Além disso, teremos:
$$T(u_i) = \lambda_o \cdot u_i, \quad \text{para cada} \quad i \in \{1\,, 2\,, \cdots\,, m_g\}\,. \tag{12.101}$$

Utilizando o Teorema do Completamento (isto é, o Teorema (7.33)), segue que existirão vetores
$$v_1\,, v_2\,, \cdots\,, v_{n-m_g} \in U\,,$$
tais que o conjunto
$$\mathcal{B} = \{u_1\,, v_2\,, \cdots\,, u_{m_g}, v_1\,, v_2\,, \cdots\,, v_{n-m_g}\} \tag{12.102}$$
será uma base de $(U\,, +\,, \cdot)$.

Deste modo teremos:
$$\begin{aligned}
T(u_1) &\overset{(12.101)}{=} \lambda_o \cdot u_1 \\
&\overset{(12.102)}{=} \lambda_o \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + \cdots + 0 \cdot u_{m_g} + 0 \cdot v_1 + \cdots + 0 \cdot v_{n-m_g} \\
T(u_2) &\overset{(12.101)}{=} \lambda_o \cdot u_2 \\
&\overset{(12.102)}{=} 0 \cdot u_1 + \lambda_o \cdot u_2 + 0 \cdot u_3 + \cdots + 0 \cdot u_{m_g} + 0 \cdot v_1 + \cdots + 0 \cdot v_{n-m_g} \\
&\vdots \\
T(u_{m_g}) &\overset{(12.101)}{=} \lambda_o \cdot u_{m_g} \\
&\overset{(12.102)}{=} = 0 \cdot u_1 + \cdots + 0 \cdot u_{m_g-1} + \lambda_o \cdot u_{m_g} + 0 \cdot v_1 + \cdots + 0 \cdot v_{n-m_g} \\
T(v_1) &\overset{(12.102)}{=} \alpha_{1(m_g+1)} \cdot u_1 + \cdots + \alpha_{m_g(m_g+1)} \cdot u_{m_g} + \alpha_{(m_g+1)(m_g+1)} \cdot v_1 + \cdots + \alpha_{n(n-m_g)} \cdot v_{n-m_g} \\
&\vdots \\
T(v_{n-m_g}) &\overset{(12.102)}{=} \alpha_{1(n-m_g)} \cdot u_1 + \cdots + \alpha_{m_g(n-m_g)} \cdot u_{m_g} + \alpha_{(m_g+1)(n-m_g))} \cdot v_1 + \cdots + \alpha_{n(n-m_g)} \cdot v_{n-m_g}\,,
\end{aligned}$$

ou seja, a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ será da forma:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_o & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_o \end{bmatrix}_{m_g \times m_g} & A_{k \times (n-m_g)} \\ O_{(n-m_g)\times r} & B_{(n-m_g)\times(n-m_g)} \end{pmatrix}_{n \times n} .$$

Devido ao bloco à esquerda (em vermelho) acima, na matriz acima, obteremos um fator

$$(\lambda - \lambda_o)^{m_g} ,$$

no polinômio

$$p_T(\lambda) = \det\{[T]_{\mathcal{B}} - \lambda\, I_n\}$$
$$\begin{vmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_o - \lambda & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_o - \lambda \end{bmatrix}_{m_g \times m_g} & A_{m_g \times (n-m_g)} \\ O_{(n-m_g)\times m_g} & B_{(n-m_g)\times(n-m_g)} - \lambda\, I_{(n-m_g)\times(n-m_g)} \end{vmatrix} ,$$

ou seja,

$$p_T(\lambda) = (\lambda - \lambda_o)^{m_g}\, q(\lambda) , \quad \text{para cada} \quad \lambda \in \mathbb{C} ,$$

mostrando que o escalar λ_o é raiz do polinômio, no mínimo, com multiplicidade m_g.

Portanto, o escalar λ_o aparecerá, em geral, mais vezes como raiz do polinômio p_T do que o número natural m_g, isto é,

$$m_g \leq m_a ,$$

completando a demonstração do resultado.

∎

Temos agora o:

Exemplo 12.103 *Sejam* $(\mathbb{R}^2 , + , \cdot)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de soma de pares e multiplicação de número real por par, respectivamente) e a aplicação* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *dada por*

$$T(x , y) \doteq (a\, x + b\, y , c\, x + d\, y) , \quad \textit{para cada} \quad (x , y) \in \mathbb{R}^2 . \tag{12.104}$$

Mostre que $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ *e analise se o operador linear possui autovalores reais e quantos serão.*

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor verificar que $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.

Sabemos, pelo Exemplo (12.88), que

$$p_T(\lambda) = \lambda^2 - (a + d)\, \lambda + a\, d - b\, c , \quad \text{para cada} \quad \lambda \in \mathbb{C} . \tag{12.105}$$

Da Proposição (14.266), segue que um escalar $\underline{\lambda}$ será um autovalor do operador linear $\underline{T}$ se, e somente se,

$$p_T(\lambda) = 0\,,$$

que, de (12.105), é equivalente à: $\quad \lambda^2 - (a+d)\,\lambda + a\,d - b\,c = 0\,.$

Notemos que a equação do 2.o grau acima possui solução **real** se, e somente se,

$$(a+d)^2 - 4\,(a\,d - b\,c) = \Delta \geq 0\,.$$

Com isto teremos as seguintes três possibilidades:

1. se:
$$(a+d)^2 = 4\,(a\,d - b\,c)\,,$$
segue que o operador linear $\underline{T}$ apresentará um único autovalor real, dado por:
$$\lambda \doteq \frac{a+d}{2}\,;$$

2. se
$$(a+d)^2 - 4\,(a\,d - b\,c) = \Delta > 0\,,$$
o operador linear $\underline{T}$ apresentará, exatamente, dois autovalores reais distintos dados por:
$$\lambda_1 \doteq \frac{a+d+\sqrt{(a+d)^2 - 4\,(a\,d-b\,c)}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_2 \doteq \frac{a+d-\sqrt{(a+d)^2 - 4\,(a\,d-b\,c)}}{2}\,;$$

3. se
$$(a+d)^2 - 4\,(a\,d - b\,c) = \Delta < 0\,,$$
o operador linear $\underline{T}$ **não** apresentará autovalores reais.

Introduziremos agora a:

Definição 12.106 *Dado o polinômio*

$$p(t) = a_o + a_1\,t + \cdots + a_m\,t^m \quad \textit{para} \quad t \in \mathbb{R}\,, \tag{12.107}$$

com coeficientes reais, isto é,

$$a_o\,, a_1\,, \cdots\,, a_m \in \mathbb{R}$$

e $A \in M_n(\mathbb{R})$, *definiremos a matriz quadrada de ordem* $\underline{n}$, *que indicaremos por* $p(A)$, *como sendo:*

$$p(A) \doteq a_o\,I_n + a_1\,A + \cdots + a_m\,A^m\,, \tag{12.108}$$

onde I_n *é a matriz identidade de ordem* $\underline{n}$.

Para ilustrar temos o:

Exemplo 12.109 *Sejam*

$$A \doteq \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

e a função polinomial $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *dada por*

$$p(t) \doteq 1 - 2\,t + 3\,t^2\,, \quad \textit{para} \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Encontre a matriz $p(A)$.

<u>**Resolução:**</u>

Notemos que,

$$\begin{aligned} p(A) &\overset{(12.107)}{=} I_2 - 2\,A + 3\,A^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -12 \\ 24 & 21 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -14 \\ 28 & 28 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ou seja, $$p(A) = \begin{pmatrix} 0 & -14 \\ 28 & 28 \end{pmatrix}.$$

□

Com isto temos a:

Proposição 12.110 *Sejam* $A\,, B \in M_n(\mathbb{R})$ *e* $p \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R})$.

Se a matriz $\underline{A}$ *é semelhante a matriz* $\underline{B}$, *então a matriz* $p(A)$ *será semelhante a matriz* $p(B)$, *isto é,*

$$\textit{se} \quad A \sim B\,, \quad \textit{então} \quad p(A) \sim p(B)\,.$$

Prova:

Notemos que, se matriz $\underline{A}$ é semelhante a matriz $\underline{B}$, então deverá existir uma matriz $M \in M_n(\mathbb{R})$, inversível, tal que

$$A = M^{-1}\,B\,M\,. \tag{12.111}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}
A^2 &= A\,A \\
&\overset{(12.111)}{=} \left(M^{-1}\,B\,M\right)\,\left(M^{-1}\,B\,M\right) \\
&= \left(M^{-1}\,B\right)\left(\underbrace{M\,M^{-1}}_{=I_n}\right)(B\,M) \\
&= \left(M^{-1}\,B\right)\,I_n\,(B\,M) \\
&= M^{-1}\,B^2\,M\,.
\end{aligned}$$

Utilizando-se indução sobre $j \in \mathbb{N}$, pode-se mostrar que

$$A^j = M^{-1}\,B^j\,M\,, \quad \text{para cada} \quad j \in \mathbb{N}\,. \tag{12.112}$$

A demonstração deste fato será deixada como exercício para o leitor.
Assim,

$$\begin{aligned}
p(A) &\overset{(12.108)}{=} a_o\,I_n + a_1\,A + \cdots + a_m\,A^m \\
&\overset{(12.111)}{=} a_o\,\left(M^{-1}\,I_n\,M\right) + a_1\,\left(M^{-1}\,B\,M\right) + \cdots + a_m\,\left(M^{-1}\,B^m\,M\right) \\
&= M^{-1}\,\left(a_o\,I_n + a_1\,B + \cdots + a_m\,B^m\right)M \\
&\overset{(12.108)}{=} M^{-1}\,p(B)\,M\,,
\end{aligned}$$

mostrando que a matriz $p(A)$ é semelhante a matriz $p(B)$, completando a demonstração do resultado.

∎

Observação 12.113 *Notemos que, da demonstração acima, a matriz que realiza a semelhança entre as matrizes* $p(A)$ *e* $p(B)$ *é a mesma matriz* M*, que realiza a semelhança entre as matrizes* A *e* B.

Podemos agora introduzir a:

Definição 12.114 *Sejam* $(U\,,+\,,\cdot)$ *espaço vetorial real (respectivamente, complexo),* $T \in \mathcal{L}(U)$ *e*

$$p(t) = a_o + a_1\,t + \cdots + a_m\,t^m\,, \quad \textit{para} \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

um polinômio com coeficientes reais (respectivamente complexos), ou seja,

$$a_o\,, a_1\,, \cdots\,, a_m \in \mathbb{R} \quad \textit{respectivamente, complexos)}\,.$$

Definamos o operador linear em $(U\,,+\,,\cdot)$*, que indicaremos por* $p(T)$*, como sendo:*

$$p(T) \doteq a_o \cdot I_U + a_1 \cdot T + \cdots + a_m \cdot T^m\,, \tag{12.115}$$

onde I_U *é o operador identidade em* $(U\,,+\,,\cdot)$.

Exemplo 12.116 *Sejam* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de soma de pares e multiplicação de número real por par, respectivamente), a aplicação* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$*, dada por*

$$T(x, y) \doteq (x + y, x - y), \quad \text{para cada} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \tag{12.117}$$

e a função polinomial $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, dada por*

$$p(t) \doteq 1 - 2t + 3t^2, \quad \text{para} \quad t \in \mathbb{R}. \tag{12.118}$$

Mostre que $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ *e encontre a expressão de* $p(T) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$*.*

Resolução:

Notemos que, para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, teremos:

$$\begin{aligned}
[p(T)](x, y) &\overset{(12.115) \text{ e } (12.118)}{=} \left[I_{\mathbb{R}^2} - 2T + 3T^2\right](x, y) \\
&= I_{\mathbb{R}^2}(x, y) - 2 \cdot T(x, y) + 3 \cdot T[T(x, y)] \\
&\overset{(12.117)}{=} (x, y) - 2(x + y, x - y) + T(\underbrace{x + y}_{\doteq X}, \underbrace{x - y}_{\doteq Y})] \\
&\overset{(12.117)}{=} (x, y) - 2 \cdot (x + y, x - y) + 3 \cdot (X + Y, X - Y) \\
&= (x, y) - 2 \cdot (x + y, x - y) + 3 \cdot ((x + y) + (x - y), (x + y) - (x - y)) \\
&= (x, y) - 2 \cdot (x + y, x - y) + 3 \cdot (2x, 2y) \\
&= (x, y) + (-2x - 2y, -2x + 2y) + (6x, 6y) \\
&= (5x - 2y, -2x + 9y)
\end{aligned}$$

ou seja, $[p(T)](x, y) = (5x - 2y, -2x + 9y)$.

□

Para finalizar este capítulo, da Proposição (12.110) acima, segue o:

Corolário 12.119 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *espaço vetorial real (respectivamente, complexo),* $T \in \mathcal{L}(U)$*,*

$$p(t) = a_o + a_1 t + \cdots + a_m t^m, \quad \text{para cada} \quad t \in \mathbb{R},$$

um polinômio com coeficientes reais e o conjunto de vetores $\mathcal{B}$ *é uma base de* $(U, +, \cdot)$*.*

Então

$$[p(T)]_{\mathcal{B}} = p([T]_{\mathcal{B}}). \tag{12.120}$$

Prova:

Pelas Proposições (10.264) e (10.276), segue que:

$$\begin{aligned}
[p(T)]_{\mathcal{B}} &\overset{(12.115)}{=} [a_o \cdot I_U + \cdots + a_m \cdot T^m]_{\mathcal{B}} \\
&\overset{(10.266)}{=} a_o [I]_{\mathcal{B}} + a_1 [T]_{\mathcal{B}} + \cdots + a_m [T]_{\mathcal{B}}^m \\
&\overset{(12.108)}{=} p([T]_{\mathcal{B}}),
\end{aligned}$$

completando a demonstração do resultado.

■

12.3 Exercícios

Capítulo 13

Diagonalização de Operadores Lineares

29.10.2015 - 23.a

13.1 Definição e Caracterização

Começaremos com a:

Definição 13.1 *Sejam* $(U\,,+\,,\cdot)$ *um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) de dimensão finita e* $T \in \mathcal{L}(U)$.

Diremos que o operador linear $\underline{T}$ *é* **diagonalizável** *, se existir uma base de* $(U\,,+\,,\cdot)$, *inteiramente formada por autovetores associados ao operador linear* $\underline{T}$.

Observação 13.2 *Na situação acima, se* $T \in \mathcal{L}(U)$ *é diagonalizável e o conjunto*

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_n\}$$

é uma base de $(U\,,+\,,\cdot)$, *inteiramente formada por autovetores do operador linear* $\underline{T}$, *associados aos autovalores*

$$\lambda_1\,,\lambda_2\,,\cdots\,,\lambda_n \in \mathbb{R} \qquad \textit{(respectivamente, } \mathbb{C}\textit{)},$$

(não necessariamente, distintos), então para cada

$$i \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\},$$

teremos

$$\begin{aligned} T(u_i) &= \lambda_i \cdot u_i \\ &= 0 \cdot u_1 + \cdots + 0 \cdot u_{i-1} + \lambda_i \cdot u_i + 0 \cdot u_{i+1} + \cdots + 0 \cdot u_n, \end{aligned}$$

ou seja, a matriz do operador linear $\underline{T}$, *com relação a base (ordenada)* $\mathcal{B}$, *será dada por:*

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}, \tag{13.3}$$

isto é, a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ *será uma matriz diagonal, mais especificamente, uma matriz quadrada* $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ *(ou* $M_n(\mathbb{C})$*), onde*

$$a_{ij} \doteq \begin{cases} 0\,, & se \quad i \neq j \\ \lambda_j\,, & se \quad i = j \end{cases}\,, \quad para \quad i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}.$$

Reciprocamente, se existir uma base

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$$

de $(U, +, \cdot)$*, em relação a qual a matriz de* $T \in \mathcal{L}(U)$ *é uma matriz diagonal, isto é, todos as suas entradas, fora da diagonal principal, forem iguais a zero, então o operador linear* $\underline{T}$ *será um operador linear diagonalizável.*

De fato, pois se

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

então, pela definição de matriz de operador linear, deveremos ter, para cada

$$i \in \{1, 2, \cdots, n\},$$

segue que:

$$\begin{aligned} T(u_i) &= 0 \cdot u_1 + \cdots + 0 \cdot u_{i-1} + \lambda_i \cdot u_i + 0 \cdot u_{i+1} + \cdots + 0 \cdot u_n \\ &= \lambda_i \cdot u_i\,, \end{aligned}$$

ou seja, a base (ordenada) $\mathcal{B}$ *de* $(U, +, \cdot)$*, é inteiramente formada por autovetores associados ao operador linear* $\underline{T}$*.*

Com isto acabamos de demonstrar o:

Teorema 13.4 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) de dimensão finita e* $T \in \mathcal{L}(U)$*.*

O operador linear $\underline{T}$ *é diagonalizável se, e somente se, existir uma base (ordenada) de* $(U, +, \cdot)$*, em relação a qual a matriz do operador linear* T *é um matriz diagonal.*

Observação 13.5

1. *Na situação acima, se* $T \in \mathcal{L}(U)$ *é diagonalizável, então existe uma base (ordenada), que indicaremos por* $\mathcal{B}$*, formada por autovetores associados ao operador linear* $\underline{T}$*, em relação a qual a matriz de* $\underline{T}$ *é uma matriz diagonal onde, na diagonal principal desta, aparecerão todos os autovalores do operador linear* $\underline{T}$ *(na ordem correta !).*

2. *Na situação acima, se o conjunto $\mathcal{C}$ é uma outra base (ordenada) de $(U, +, \cdot)$, das Proposições (10.285) e (8.42), segue que:*

$$[T]_{\mathcal{C}} \overset{(10.286)}{=} M_{\mathcal{C}\mathcal{B}}\,[T]_{\mathcal{B}}\,M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$$
$$\overset{(8.43)}{=} M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}{}^{-1}[T]_{\mathcal{B}}\,M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}\,,$$

isto é, a matriz $[T]_{\mathcal{C}}$ é semelhante a uma matriz diagonal, a saber, $[T]_{\mathcal{B}}$.

Esta última igualdade nos sugere a:

Definição 13.6 *Dizemos que uma matriz quadrada $A \in M_n(\mathbb{R})$ (ou $A \in M_n(\mathbb{C})$) é* **diagonalizável**, *se existir uma matriz $M \in M_n(\mathbb{R})$, invertível, tal que a matriz*

$$M^{-1}\,A\,M$$

é uma matriz diagonal.

Observação 13.7 *Logo, da Definição (13.6) acima e da Definição (12.77), uma matriz quadrada $A \in M_n(\mathbb{R})$ (ou $A \in M_n(\mathbb{C})$) é diagonalizável se, e somente se, ela é semelhante a uma matriz diagonal.*

Notação 13.8 *Se a matriz quadrada $M \in M_n(\mathbb{R})$ (ou $M \in M_n(\mathbb{C})$) é uma matriz diagonal, isto é,*

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

a denotaremos por

$$M = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)\,.$$

Com isto temos a:

Proposição 13.9 *Sejam $(U, +, \cdot)$ um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) de dimensão finita, $T \in \mathcal{L}(U)$ e o conjunto de vetores $\mathcal{B}$ é uma base (ordenada) de $(U, +, \cdot)$.*

Então o operador linear $\underline{T}$ é diagonalizável se, e somente se, a matriz quadrada $[T]_{\mathcal{B}}$ for uma matriz diagonalizável.

Prova:

Notemos que, pelo item 2. da Observação (13.5), se o operador linear $\underline{T}$ for diagonalizável, então a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ será uma matriz diagonalizável.

Suponhamos que

$$\dim(U) = n\,.$$

Reciprocamente, suponhamos que para a base (ordenada) $\mathcal{B}$ de $(U, +, \cdot)$, a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ seja uma matriz diagonalizável.

Assim, da Definição (13.6) acima, segue que existe uma matriz

$$M = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R}),$$

inversível, tal que a matriz

$$M^{-1}\,[T]_{\mathcal{B}}\,M$$

é uma matriz diagonal. (*)

Suponhamos que

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1\,, u_2\,, \cdots\,, u_n\}\,.$$

Então, para cada

$$j \in \{1\,, 2\,, \cdots\,, n\},$$

definido-se o vetor:

$$v_j \doteq a_{1j} \cdot u_1 + a_{2j} \cdot u_2 + \cdots + a_{nj} \cdot u_n\,, \tag{13.10}$$

como a matriz M é uma matriz inversível, da Proposição (8.50), segue que o conjunto

$$\mathcal{C} \doteq \{v_1\,, v_2\,, \cdots\,, v_n\}$$

será uma base de $(U\,, +\,, \cdot)$.

Além disso, de (13.10) e da Definição de matriz mudança de base (veja a Definição (8.3), segue que

$$M = M_{\mathcal{B}\,\mathcal{C}}\,.$$

Assim, das Proposições (10.285) e (8.42), segue que

$$\begin{aligned} [T]_{\mathcal{C}} &= M_{\mathcal{C}\,\mathcal{B}}\,[T]_{\mathcal{B}}\,M_{\mathcal{B}\mathcal{C}} \\ &= M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}^{-1}\,[T]_{\mathcal{B}}\,M_{\mathcal{B}\mathcal{C}} \\ &= M^{-1}[T]_{\mathcal{B}}M\,, \end{aligned}$$

que, por (*), é uma matriz diagonal, que pelo Teorema (13.4) segue que o operador linear $\underline{T}$ é diagonalizável, completando a demonstração do resultado.

∎

Observação 13.11

1. *Pela Proposição (13.9) acima, para verificar se um operador linear $\underline{T}$, definido em um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) $(U\,, +\,, \cdot)$, de dimensão finita, é diagonalizável, basta verificar se a matriz do operador linear $\underline{T}$ em relação a uma base* **qualquer** *de $(U\,, +\,, \cdot)$ é uma matriz diagonalizável.*

2. *Suponhamos que a matriz quadrada*

$$A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$$

seja uma matriz diagonalizável.

Vejamos como podemos encontrar uma matriz

$$M \in M_n(\mathbb{R}),$$

inversível, de modo que a matriz quadrada

$$M^{-1} A M$$

seja uma matriz diagonal.

Consideremos a aplicação $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, *dada por:*

$$T(x_1, x_2, \cdots, x_n) \doteq \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot x_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2j} \cdot x_j, \cdots, \sum_{j=1}^{n} a_{nj} \cdot x_j \right), \tag{13.12}$$

para $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Deixaremos como exercício para o leitor mostrar que $T \in \mathscr{L}(U)$.

Afirmamos que, se o conjunto de vetores

$$\mathcal{C} \doteq \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$$

é a base canônica de $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ *(ou de* $(\mathbb{C}^n, +, \cdot)$ *sobre* $\mathbb{C}$*), então teremos:*

$$[T]_{\mathcal{C}} = A. \tag{13.13}$$

De fato, de (13.12)*, segue que:*

$$\begin{aligned}
T(e_1) &= T(1, 0, \cdots, 0) \\
&\overset{x_j=1,\ se\ j=1\ e\ x_j=0,\ se\ j\neq 1}{=} (a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{n1}), \\
&\vdots \\
T(e_i) &= T(0, \cdots, 0, \underbrace{1}_{i-\text{ésima posição}}, 0, \cdots, 0) \\
&\overset{x_j=1,\ se\ j=i\ e\ x_j=0,\ se\ j\neq i}{=} (a_{1i}, a_{2i}, \cdots, a_{ni}), \\
&\vdots \\
T(e_n) &= T(0, \cdots, 0, 1) \\
&\overset{x_j=1,\ se\ j=n\ e\ x_j=0,\ se\ j\neq n}{=} (a_{1n}, a_{2n}, \cdots, a_{nn}),
\end{aligned}$$

implicando em (13.13)*.*

Como a matriz quadrada A *é uma matriz diagonalizável segue, da Proposição* ((13.9))*, que o operador linear* $\underline{T}$*, dado por* (13.12)*, é diagonalizável.*

Logo, da Observação (13.2)*, podemos considerar uma base*

$$\mathcal{B} \doteq \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$$

de $(\mathbb{R}^n\,,+\,,\cdot)$ *(ou de* $(\mathbb{C}^n\,,+\,,\cdot)$ *sobre* $\mathbb{C}$*), inteiramente formada por autovetores do operador linear* $\underline{T}$*.*

Como o conjunto $\mathcal{C}$ *é a base canônica de* $(\mathbb{R}^n\,,+\,,\cdot)$ *(ou de* $(\mathbb{C}^n\,,+\,,\cdot)$ *sobre* $\mathbb{C}$*), segue que*

$$M \doteq M_{\mathcal{C}\,\mathcal{B}} \tag{13.14}$$

é uma matriz inversível, cuja j*-ésima coluna é formada pelas coordenadas do* j*-ésimo autovetor da base (ordenada)* $\mathcal{B}$*, em relação à base canônica* $\mathcal{C}$*, isto é,*

$$M_{\mathcal{C}\,\mathcal{B}} = ([v_1]_{\mathcal{C}} \cdots [v_n]_{\mathcal{C}})\,.$$

Como a matriz quadrada $[T]_{\mathcal{B}}$ *é uma matriz diagonal, das Proposições* (10.285) *e* (8.42)*, segue que*

$$\begin{aligned} [T]_{\mathcal{B}} &= M_{\mathcal{B}\,\mathcal{C}}\,[T]_{\mathcal{C}}\,M_{\mathcal{C}\,\mathcal{B}} \\ &= M_{\mathcal{C}\,\mathcal{B}}^{-1}\,[T]_{\mathcal{C}}\,M_{\mathcal{C}\,\mathcal{B}} \\ &\overset{(13.13)\ e\ (13.13)}{=} M^{-1}\,A\,M\,, \end{aligned}$$

vemos que a matriz inversível M*, dada por* (13.14)*, resolverá o nosso problema.*

<u>**Conclusão:**</u> *a matriz* M *que realiza a semelhança da matriz* A*, com uma matriz diagonal, será a matriz cujas colunas são formadas pelas coordenadas dos autovetores do operador linear* T*, onde estes autovetores formam uma base (ordenada) de* $(U\,,+\,,\cdot)$*.*

3. *Seja* $(U\,,+\,,\cdot)$ *espaço vetorial real (respectivamente, complexo) com*

$$\dim(U) = n\,.$$

Se o operador linear $T \in \mathcal{L}(U)$ *for diagonalizável, o seu polinômio característico será da forma*

$$p_T(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)\,(\lambda_2 - \lambda)\cdots(\lambda_n - \lambda),$$

onde os escalares

$$\lambda_1\,,\lambda_2\,,\cdots\,,\lambda_n \in \mathbb{R} \quad (\textit{respectivamente, } \mathbb{C})$$

são todos os autovalores do operador linear $\underline{T}$*, não necessariamente distintos.*

De fato, pois se o operador linear T *for diagonalizável, existirá um base* $\mathcal{B}$ *(ordenada) de* $(U\,,+\,,\cdot)$*, de modo que a matriz* $[T]_{\mathcal{B}}$ *é uma matriz diagonal, onde na diagonal principal aparecerão os autovalores,*

$$\lambda_1\,,\lambda_2\,,\cdots\,,\lambda_n$$

do operador linear $\underline{T}$*.*

Logo

$$
\begin{aligned}
p_T(\lambda) &\overset{\text{Definição } (12.86)}{=} p_{[T]_{\mathcal{B}}}(\lambda) \\
&\overset{(12.76)}{=} \det\left[[T]_{\mathcal{B}} - \lambda\, I_U\right] \\
&= \left| \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right| \\
&= \left| \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n - \lambda \end{pmatrix} \right| \\
&= (\lambda_1 - \lambda)\,(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)\,.
\end{aligned}
$$

Com isto temos o:

Teorema 13.15 *Sejam* $(U\,,+\,,\cdot)$ *um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) de dimensão finita igual a* m*, ou seja,*

$$\dim(U) = m$$

e $T \in \mathcal{L}(U)$.

Então, o operador linear T *é diagonalizável se, e somente se, todos autovalores distintos*

$$\lambda_1\,, \lambda_2\,, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R} \quad \textit{(respectivamente, } \mathbb{C}\textit{)}$$

(em particular $n \leq m$*), do operador linear* T *forem tais que*

$$U = V(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_n)\,.$$

Prova:

Suponhamos que

$$U = V(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_n)\,.$$

Então podemos formar uma base (ordenada) $\mathcal{B}$, de $(U\,,+\,,\cdot)$, inteiramente formada pela reunião das bases (ordenadas) $\mathcal{B}_j$, dos subespaços próprios $(V(\lambda_j)\,,+\,,\cdot)$, para cada $j \in \{1\,,2\,,\cdots,n\}$.

Notemos que, para cada $j \in \{1\,,2\,,\cdots,n\}$, temos que, pela definição de $V(\lambda_j)$, cada vetor de $\mathcal{B}_j$ é um autovetor do operador linear T.

Logo, pela Definição (13.1), segue que o operador linear T é diagonalizável.

Reciprocamente, se o operador linear T é diagonalizável, pela Definição (13.1), existe uma base (ordenada) $\mathcal{B}$ de $(U\,,+\,,\cdot)$, formada por autovetores do operador linear T.

Como cada autovetor está associado a algum autovalor λ_j do operador linear T, para algum $j \in \{1\,,2\,,\cdots,n\}$, vemos que cada vetor de $\mathcal{B}$ pertencerá a $V(\lambda_j)$, para algum $j \in \{1\,,2\,,\cdots,n\}$.

Desta forma, a soma de todos os subespaços próprios do operador linear T conterá o conjunto $[\mathcal{B}]$ e, portanto, deverá ser igual a $(U\,,+\cdot)$, isto é,

$$U = V(\lambda_1) + \cdots + V(\lambda_n)\,.$$

Da Proposição (12.59), segue que esta soma deverá ser uma soma direta, ou seja,

$$U = V(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_n)\,,$$

completando a demonstração do resultado.

∎

05.11.2015 - 24.a

Utilizando o Teorema (13.15) acima, vemos que:

Exemplo 13.16 *Mostre que o operador linear do Exemplo* (12.16) *é diagonalizável.*

Resolução:

De fato, pois, como vimos na resolução do Exemplo (12.16), temos que

$$\begin{aligned} V(-2) \oplus V(2) &= [(1\,,-2)\,,(1\,,2)] \\ &\overset{\text{Exercício}}{=} \mathbb{R}^2\,. \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema (13.15), segue que o operador linear T é diagonalizável, completando a resolução.

□

Exemplo 13.17 *Mostre que o operador linear do Exemplo* (12.42) *é diagonalizável.*

Resolução:

De fato, como vimos na resolução do Exemplo (12.42), o operador linear T possui apenas dois subespaços próprios, cuja soma é $\left(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot\right)$, mais precisamente,

$$\begin{aligned} V(0) \oplus V(1) &= [(0\,,0\,,1)\,,(0\,,0\,,1)\,,(1\,,0\,,1)] \\ &\overset{\text{Exercício}}{=} \mathbb{R}^3\,. \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema (13.15), segue que o operador linear T é diagonalizável, completando a resolução.

□

Exemplo 13.18 *Mostre que o operador linear do Exemplo* (12.27) *não é diagonalizável.*

Resolução:

De fato, pois o operador linear em questão não possui autovetores.

Assim, $\left(\mathbb{R}^2, +, \cdot\right)$ não será a soma direta dos subespaços próprios associados ao operador linear T.

Logo, pelo Teorema (13.15), segue que o operador linear T não é diagonalizável, completando a resolução.

□

Exemplo 13.19 *Mostre que o operador linear do Exemplo* (12.37) *não é diagonalizável, se* $n \geq 1$.

Resolução:

De fato, pois todo autovetor do operador linear $\underline{T}$ pertence à $V(0)$, que é unidimensional, e

$$\dim[\mathscr{P}_n(\mathbb{R})] = n + 1 > 1 \,.$$

Assim, $(\mathscr{P}_n(\mathbb{R}) \,, + \,, \cdot)$ não será a soma direta dos subespaços próprios associados ao operador linear $\underline{T}$.

Logo, pelo Teorema (13.15), segue que o operador linear $\underline{T}$ não é diagonalizável, completando a resolução.

□

Observação 13.20

1. *Vejamos como é possível decidir se um operador linear é diagonalizável ou não, definido em um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) de dimensão finita, a partir das multiplicidades algébrica e geométrica de seus respectivos autovalores.*

   Sejam $(U \,, + \,, \cdot)$ *um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) de dimensão* $\underline{m}$ *e* $T \in \mathcal{L}(U)$.

   Suponhamos que polinômio característico associado ao operador linear $\underline{T}$, *seja dado por*
   $$p_T(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} \, (\lambda_2 - \lambda)^{m_2} \cdots (\lambda_n - \lambda)^{m_n} \,, \tag{13.21}$$
   onde, para cada $i \in \{1 \,, 2 \,, \cdots \,, n\}$,
   $$m_i \in \mathbb{N}$$
   denotará a multiplicidade algébrica do escalar λ_i, *ou seja,*
   $$m_i \doteq m_a(\lambda_i) \,,$$
   onde
   $$\lambda_i \neq \lambda_j \,, \quad \textit{para} \quad i \neq j \,, \quad \textit{com} \quad i, j \in \{1 \,, 2 \cdots \,, n\} \,.$$
   Em particular, teremos
   $$m = m_1 + m_2 + \cdots + m_n \,,$$
   pois o polinômio característico p_T *tem grau* $\underline{m}$ *(ou seja,* $\dim(U) = m$*).*

   Suponhamos também que, para cada $j \in \{1 \,, 2 \,, \cdots \,, k\} \subseteq \{1 \,, 2 \,, \cdots \,, n\}$, *tenhamos que* λ_j *é um autovalor do operador linear* $\underline{T}$ *e denotemos por*
   $$r_j \in \mathbb{N}$$
   a multiplicidade geométrica do autovalor λ_j, *isto é,*
   $$\begin{aligned} r_j &\doteq \dim[V(\lambda_j)] \\ &= m_g(\lambda_j) \,. \end{aligned}$$

Então, do Teorema (13.15) e do Corolário (7.49), segue que o operador linear T *é diagonalizável se, e somente se,*

$$m = r_1 + \cdots + r_k \,. \tag{13.22}$$

2. *Por este mesmo Teorema (ou seja, o Teorema Teorema (13.15)), o operador linear* T *será diagonalizável se, e somente se,* $(U\,,+\,,\cdot)$ *possuir uma base (ordenada), formada pela reunião de todas as bases (ordenadas) dos subespaços próprios associados ao operador linear* T *(pois, isto é equivalente a dizer que a soma destes subespaços próprios é uma soma direta).*

   A existência de uma tal base (ordenada), é equivalente ao operador linear T *apresentar uma matriz, em relação a essa base (ordenada), na seguinte forma:*

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_1 \end{bmatrix}_{r_1 \times r_1} & & O \\ & \ddots & \\ O & & \begin{bmatrix} \lambda_k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_k \end{bmatrix}_{r_k \times r_k} \end{pmatrix}_{m \times m} .$$

   Desta forma, se o operador linear T *for diagonalizável, segue que o seu polinômio característico será dado por*

$$p_T(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{r_1} (\lambda_2 - \lambda)^{r_2} \cdots (\lambda_k - \lambda)^{r_k} \,, \tag{13.23}$$

   para $\lambda \in \mathbb{R}$ *(respectivamente,* $\mathbb{C}$*) onde, para cada* $j \in \{1\,,2\,,\cdots\,,k\}$,

$$r_j \in \mathbb{N}$$

   é a multiplicidade geométrica do autovalor λ_j.

   Comparando (13.23) com (13.21), segue que

$$\begin{aligned} & k = n\,, \quad m_j = r_j\,, \quad \textit{para} \;\; j \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n = k\} \\ \textit{e} \qquad & r_1 + \cdots + r_n = m = m_1 + m_2 + \cdots + m_n \,. \end{aligned} \tag{13.24}$$

   Reciprocamente, suponhamos que

$$m_j = r_j\,, \quad \textit{para cada} \quad j \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n = k\}\,, \tag{13.25}$$

$$m_1 + \cdots + m_n = m \,. \tag{13.26}$$

   Notemos que (13.25), nos diz que a multiplicidade algébrica de cada autovalor é igual a sua multiplicidade geométrica, isto é, para cada $j \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n = k\}$, *o* *subespaço próprio* $V(\lambda_j)$

$$\begin{aligned} m_g(\lambda_j) &= r_j \\ &= m_j \\ &= m_a(\lambda_j)\,. \end{aligned}$$

Assim teremos

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 + \cdots + m_n &\overset{(13.25)}{=} r_1 + r_2 + \cdots + r_n \\ &\overset{(13.26)}{=} m\,. \end{aligned}$$

Portanto, de (13.26) *e do Teorema* (13.15)*, segue que a reunião das bases (ordenadas)* $\mathcal{B}_j$ *será uma base (ordenada) de* $(U\,,+\,,\cdot)$*, ou seja,*

$$\mathcal{B} \doteq \bigcup_{j=1}^{n} \mathcal{B}_j\,,$$

será uma base (ordenada) de $(U\,,+\,,\cdot)$.

Lembremos que, do Teorema (13.15)*, a soma dos subespaços próprios, associados a autovalores distintos, é uma soma direta onde, cada um destes subespaços próprios teremos autovetores do operador linear* $\underline{T}$.

Assim, o operador linear $\underline{T}$ *será diagonalizável.*

Com isto acabamos de provar o:

Teorema 13.27 *Sejam* $(U\,,+\,,\cdot)$ *um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) de dimensão finita igual a* m*, isto é,*

$$\dim(U) = m$$

e $T \in \mathcal{L}(U)$.

Suponhamos que os escalares

$$\lambda_1\,,\lambda_2\,,\cdots\,,\lambda_n \in \mathbb{R} \quad (\textit{respectivamente, } \mathbb{C})$$

são todos os autovalores do operador linear $\underline{T}$*, dois a dois, distintos, isto é,*

$$\lambda_i \neq \lambda_j\,, \quad \textit{para} \quad i \neq j\,, \quad \textit{com} \quad i\,,j \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}\,,$$

e, para cada $j \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}$*, denotemos por*

$$m_j \quad \textit{e} \quad r_j\,,$$

as multiplicidades algébricas e geométricas do autovalor λ_j*, respectivamente.*

O operador linear $\underline{T}$ *é diagonalizável* **SE, E SOMENTE SE***, as seguintes condições forem verificadas:*

1. *para cada autovalor do operador linear $\underline{T}$, as suas multiplicidades algébrica e geométrica, associadas ao mesmo, são iguais, ou seja,*

$$m_j = r_j \,, \quad \textit{para cada} \quad j \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}; \tag{13.28}$$

2. *a soma das multiplicidades geométricas de todos os autovalores do operador linear $\underline{T}$ é igual a dimensão de $(U\,,+\,,\cdot)$, ou seja,*

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_n = m\,. \tag{13.29}$$

Como consequência temos o:

Corolário 13.30 *Sejam $(U\,,+\,,\cdot)$ um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) de dimensão $\underline{n}$ e $T \in \mathcal{L}(U)$.*

Se o polinômio característico associado ao operador linear $\underline{T}$ é dado por:

$$p_T(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)\,(\lambda_2 - \lambda)\cdots(\lambda_n - \lambda)\,, \tag{13.31}$$

para $\lambda \in \mathbb{R}$ (respectivamente, $\mathbb{C}$), onde

$$\lambda_1\,,\lambda_2\,,\cdots\,,\lambda_n$$

são autovalores do operador linear $\underline{T}$, dois a dois distintos, então o operador linear $\underline{T}$ será diagonalizável.

Prova:

De (13.31) segue que os autovalores do operador linear $\underline{T}$ serão os escalares

$$\lambda_1\,,\lambda_2\,,\cdots\,,\lambda_n \in \mathbb{R} \quad (\text{respectivmanete, } \mathbb{C})\,,$$

ou seja, serão as $\underline{n}$ raízes reias (respectivamente, complexas) distintas do polinômio caraterísitico p_T.

Como, por hipótese, os autovalores do operador linear $\underline{T}$ são dois a dois distintos, segue que as raízes do polinômio p_T são todas simples, isto é, têm multiplicidade algébrica igual a um, ou seja,

$$m_j = 1\,, \quad \text{para cada} \quad j \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}, \tag{13.32}$$

teremos que , para cada $j \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}$, o autovalor λ_j do operador linear $\underline{T}$ deverá ter multiplicidade algébrica igual a um.

Assim, pela Proposição (12.100), a multiplicidade geométrica do autovalor λ_j do operador linear $\underline{T}$ deverá ser menor ou igual a um, ou seja,

$$r_j \overset{\text{Prop. (12.100)}}{\leq} m_j = 1\,, \quad \text{para cada} \quad j \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}.$$

Como, para cada $j \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}$, temos que

$$r_j = \dim[V(\lambda_j)] \geq 1\,,$$

segue-se que a multiplicidade geométrica do autovalor λ_j deverá ser, necessariamente, igual a um, ou seja, igual à sua multiplicidade algébrica do autovalor λ_j.

Portanto:

$$\begin{aligned} & m_j = r_j \,, \quad \text{para cada} \quad j \in \{1\,,2\,,\cdots,n\} \\ \text{e} \qquad & r_1 + \cdots + r_n \stackrel{(13.32)}{=} n \\ & \qquad\qquad = \dim(U)\,. \end{aligned}$$

Logo, do Teorema (13.27) acima, segue que o operador linear $\underline{T}$ é diagonalizável, completando a demonstração do resultado.

∎

Apliquemos as ideias acima ao:

Exemplo 13.33 *Sejam* $(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de soma de ternas e multiplicação de número real por ternas, respcetivamente) e a aplicação* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*, dado por*

$$T(x\,,y\,,z) \doteq (x+z\,,y+z\,,x+y+2\,z)\,, \quad \textit{para cada} \quad (x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,. \tag{13.34}$$

Mostre que $T \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ *e que o operador linear* $\underline{T}$ *é diagonalizável.*

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação que $T \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$.

Encontremos a matriz do operador linear $\underline{T}$ em relação à base canônica, que indicaremos por

$$\mathcal{C} \doteq \{\underbrace{(1\,,0\,,0)}_{\doteq e_1}\,,\underbrace{(0\,,1\,,0)}_{\doteq e_2}\,,\underbrace{(0\,,0\,,1)}_{\doteq e_3}\}\,,$$

de $(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot)$.

Para isto, notemos que

$$
\begin{aligned}
T(e_1) &= T(1\,,0\,,0)\\
&\overset{(13.34)}{=} (1\,,0\,,1)\\
&= 1\cdot\underbrace{(1\,,0\,,0)}_{e_1}+0\cdot\underbrace{(0\,,1\,,0)}_{=e_2}+1\cdot\underbrace{(0\,,0\,,1)}_{=e_3}\\
&= 1\cdot e_1+0\cdot e_2+1\cdot e_3\,,\\
T(e_2) &= T(0\,,1\,,0)\\
&\overset{(13.34)}{=} (0\,,1\,,1)\\
&= 0\cdot\underbrace{(1\,,0\,,0)}_{e_1}+1\cdot\underbrace{(0\,,1\,,0)}_{=e_2}+1\cdot\underbrace{(0\,,0\,,1)}_{=e_3}\\
&= 0\cdot e_1+1\cdot e_2+1\cdot e_3\,,\\
T(e_3) &= T(0\,,0\,,1)\overset{(13.34)}{=} (1\,,1\,,2)\\
&= 1\cdot\underbrace{(1\,,0\,,0)}_{e_1}+1\cdot\underbrace{(0\,,1\,,0)}_{=e_2}+2\cdot\underbrace{(0\,,0\,,1)}_{=e_3}\\
&= 1\cdot e_1+1\cdot e_2+2\cdot e_3\,.
\end{aligned}
$$

Logo, a matriz do operador linear $\underline{T}$, em relação à abse $\mathcal{C}$, será dada por:

$$
[T]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{13.35}
$$

Assim, o polinômio caraterístico associado ao operador linear $\underline{T}$, será dado por:

$$
\begin{aligned}
p_T(\lambda) &\overset{\text{Definição (12.86)}}{=} p_{[T]_{\mathcal{C}}}(\lambda)\\
&\overset{(12.76)}{=} \det([T]_{\mathcal{C}}-\lambda\, I_3)\\
&\overset{(13.35)}{=} \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1\\ 0 & 1-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}\\
&= (1-\lambda)\,[(1-\lambda)\,(2-\lambda)-1]+1\cdot[-(1-\lambda)]\\
&= (1-\lambda)\,\left(\lambda^2-3\,\lambda\right)\\
&= \lambda\,(1-\lambda)\,(\lambda-3)\,.
\end{aligned} \tag{13.36}
$$

Desta forma, vemos que o polinômio p_T apresenta 3 $(=\dim(\mathbb{R}^3))$ raízes **reais, simples e distintas**.

Portanto, pelo Corolário (13.30), segue-se que o operador linear $\underline{T}$ é diagonalizável.

□

Exemplo 13.37 *Encontre uma base de* $\left(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot\right)$ *formada por autovetores para o operador linear do Exemplo* (13.33) *acima.*

Encontre também a matriz do operador linear $\underline{T}$, com relação a esta base (ordenada) de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Resolução:

Notemos que, de (13.36), segue que os autovalores associados ao operador linear $\underline{T}$ serão:

$$\lambda_1 \doteq 0, \quad \lambda_2 \doteq 1 \quad \text{e} \quad \lambda_3 \doteq 3.$$

Autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 0$:

Precisamos encontrar um vetor

$$(x, y, z) \neq (0, 0, 0),$$

tal que

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= \lambda_1 \cdot (x, y, z) \\ &\overset{\lambda_1=0}{=} (0, 0, 0) \end{aligned}$$

que, de (13.34), equivale à: $\quad (x+z, y+z, x+y+2z) = (0, 0, 0),$

que é equivalente ao sistema linear (homogêneo)

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases},$$

ou seja, $\quad \begin{cases} x = y = -z \\ x + y + 2z = 0 \end{cases},$

ou ainda, $\quad x = y = -z.$

Logo, o vetor

$$u_1 \doteq (-z, -z, z), \quad \text{com} \quad z \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

será autovetor do operador linear $\underline{T}$ associado ao autovalor $\lambda_1 = 0$.

Em particular, podemos tomar como um autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 0$, o vetor (basta tomar $z = -1$ acima)

$$u_1 \doteq (1, 1, -1).$$

Autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 \doteq 1$:

Neste casos precisamos encontrar um vetor

$$(x, y, z) \neq (0, 0, 0),$$

tal que

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= \lambda_2 \cdot (x, y, z) \\ &\overset{\lambda_2=1}{=} (x, y, z) \end{aligned}$$

que, de (13.34), equivale a: $\quad (x+z, y+z, x+y+2z) = (x, y, z),$

que é equivalente ao sistema linear

$$\begin{cases} x+z=x \\ y+z=y \\ x+y+2z=z \end{cases},$$

ou seja, $$\begin{cases} z=0 \\ x=-y \end{cases}.$$

Logo, o vetor

$$u_2 \doteq (-y\,,y\,,0), \quad \text{com} \quad y \in \mathbb{R}\setminus\{0\},$$

será autovetor do operador linear $\underline{T}$ associado ao autovalor $\lambda_2 = 1$.

Em particular, podemos tomar como autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = 1$, o vetor (basta tomar $y = -1$ acima)

$$u_2 \doteq (1\,,-1\,,0)\,.$$

<u>**Autovetor associado ao autovalor $\lambda_3 \doteq 3$:**</u>

Precisamos encontrar um vetor

$$(x\,,y\,,z) \neq (0\,,0\,,0)\,,$$

satisfazendo

$$\begin{aligned} T(x\,,y\,,z) &= \lambda_3 \cdot (x\,,y\,,z) \\ &\overset{\lambda_3=3}{=} (3\,x\,,3\,y\,,3\,z) \end{aligned}$$

que, de (13.34), equivale a: $$(x+z\,,y+z\,,x+y+2\,z) = (3\,x\,,3\,y\,,3\,z)\,,$$

que é equivalente ao sistema linear

$$\begin{cases} x+z=3\,x \\ y+z=3\,y \\ x+y+2\,z=3\,z \end{cases},$$

ou seja, $$\begin{cases} x=y \\ z=2\,y \end{cases}.$$

Logo, o vetor

$$u_3 \doteq (y\,,y\,,2\,y), \quad \text{com} \quad y \in \mathbb{R}\setminus\{0\},$$

será autovetor do operador linear $\underline{T}$ associado ao autovalor $\lambda_3 = 3$.

Em particular, podemos tomar como autovetor associado ao autovalor $\lambda_3 = 3$, o vetor (basta tomar $y = 1$ acima)

$$u_3 \doteq (1\,,1\,,2)\,.$$

Desta forma temos que o conjunto de vetores

$$\mathcal{C} \doteq \{u_1\,,u_2\,,u_3\}\,,$$

será uma base de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, formada por autovetores do operador linear T.

De fato, pois os autovalores são dois a dois distintos logo, pela Proposição (12.49), segue que os autovetores associados deverão ser L.I. em $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Desta forma a matriz do operador linear T, com relação à base (ordenada) $\mathcal{C}$, será dada por:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Logo, $[T]_{\mathcal{C}}$ será uma matriz diagonal, cuja diagonal principal é formada pelos autovalores associados ao operador linear T.

□

Exemplo 13.38 *Sejam $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ espaço vetorial real (onde $+$ e $\cdot$ são as operações usuais de $\mathbb{R}^2$), o conjunto de vetores $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^2$ e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear em $\mathbb{R}^2$, cuja matriz com relação à base $\mathcal{B}$ é dada por*

$$[T]_{\mathcal{B}} = A \doteq \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Mostre que o operador linear T diagonalizável.

Resolução:

Notemos que a matriz A é uma matriz simétrica, isto é,

$$A^t = A.$$

O polinômio característico associado ao operador linear T, será dado por:

$$\begin{aligned} p_T(\lambda) &\overset{\text{Definição (12.86)}}{=} p_{[T]_{\mathcal{B}}}(\lambda) \\ &= p_A(\lambda) \\ &\overset{(12.76)}{=} \det[A - \lambda I_2] \\ &= \det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{pmatrix} \\ &= \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2. \end{aligned}$$

Vemos que o polinômio p_T, que tem grau dois, apresenta duas raízes reais simples (isto é, cada uma delas tem multiplicidade algébrica igual a um) se, e somente se, o discriminante

$$\Delta \doteq (a+c)^2 - 4(ac - b^2) > 0.$$

Mas,

$$\begin{aligned} (a+c)^2 - 4(ac - b^2) &= a^2 + c^2 - 2ac + 4b^2 \\ &= (a-c)^2 + 4b^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Em particular,

$$\Delta \geq 0\,, \quad \text{para cada} \quad a\,,b\,,c \in \mathbb{R}\,.$$

Logo

$$\Delta > 0 \quad \text{se, e somente, se} \quad a \neq c \quad \text{ou} \quad b \neq 0\,.$$

Com isto temos as seguintes possibilidades:

(i) Se

$$a \neq c \quad \text{ou} \quad b \neq 0\,,$$

as multiplicidades algébrica e geométrica de cada um dos autovalores associados ao operador linear T (as raízes do polinômio p_T) coincidem (pois serão iguais a 1).

Portanto, pelo Corolário (13.30), segue que o operador linear $\underline{T}$ será diagonalizável.

(ii) Se

$$a = c \quad \text{e} \quad b = 0\,,$$

então vê-se claramente que o operador linear $\underline{T}$ é diagonalizável pois, neste caso, a matriz $\underline{A}$ será uma matriz diagonal (será da forma $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$).

Portanto, em qualquer caso, o operador linear $\underline{T}$ será diagonalável.

Observação 13.39

1. **Conclusão:** *o Exemplo* (13.38) *acima, nos diz que se uma matriz quadrada de ordem* 2*, com entradas reais, é* **simétrica***, então ela será diagonalizável.*

2. **Pergunta-se:** *será que isto também será verdade para matriz simétricas de ordem maior? mais precisamente, se uma matriz quadrada de ordem* $\underline{n}$*, com entradas reais, é simétrica, então ela será diagonalizável?*

   A resposta a esta questão é positiva.

   No Capítulo 14 enunciaremos e daremos a demonstração deste fato (veja o Corolário (14.189)*).*

Temos também o seguinte exercício resolvido:

Exercício 13.40 *Sejam* $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$*) e a aplicação* $T : \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ *dado por*

$$T(p) \doteq p\,'' - 2\,p\,' + p\,, \quad \textit{para cada} \quad p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})\,. \tag{13.41}$$

Pergunta-se: o operador linear T *é um operador linear diagonalizável?*

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação que $T \in \mathcal{L}(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}))$.

Suponhamos que o conjunto de vetores

$$\mathcal{B} \doteq \{p_o, p_1, p_2\}$$

é a base canônica de $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, isto é,

$$p_j(t) \doteq t^j, \quad \text{para cada} \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{onde} \ \ j \in \{0, 1, 2\}.$$

Então, para cada $t \in \mathbb{R}$ teremos:

$$\begin{aligned}
[T(p_o)](t) &= p_o''(t) - 2\,p_o'(t) + p_o(t) \\
&\overset{p_o(t)=1,\ \text{para}\ t\in\mathbb{R}}{=} 1 \\
&= p_o(t) \\
&= 1 \cdot p_o(t) + 0 \cdot p_1(t) + 0 \cdot p_2(t) \\
&= [1 \cdot p_o + 0 \cdot p_1 + 0 \cdot p_2](t), \\
[T(p_1)](t) &= p_1''(t) - 2\,p_1'(t) + p_1(t) \\
&\overset{p_1(t)=t,\ \text{para}\ t\in\mathbb{R}}{=} -2 + t \\
&= -2\,p_o(t) + 1\,p_1(t) \\
&= [-2 \cdot p_o + 1 \cdot p_1 + 0 \cdot p_2](t), \\
[T(p_2)](t) &= p_2''(t) - 2\,p_2'(t) + p_2(t) \\
&\overset{p_2(t)=t^2,\ \text{para}\ t\in\mathbb{R}}{=} 2 - 2\,(2\,t) + t^2 \\
&= 2\,p_o(t) - 4\,p_1(t) + p_2(t) \\
&= [2 \cdot p_o - 4 \cdot p_1 + 1 \cdot p_2](t).
\end{aligned}$$

Logo, a matriz do operador linear $\underline{T}$, com relação à $\mathcal{B}$, será dada por:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim, o polinômio característico associado ao operador linear T será:

$$\begin{aligned}
p_T(\lambda) &= p_{[T]_{\mathcal{B}}}(\lambda) \\
&= \det[[T]_{\mathcal{B}} - \lambda\, I_3] \\
&= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & -4 \\ 0 & 0-\lambda & 1 \end{pmatrix} \\
&\overset{\text{Exercício}}{=} (1-\lambda)^3.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\lambda \doteq 1$$

é o único autovalor do operador linear $\underline{T}$ e sua multiplicidade algébrica será igual a 3.

Do Teorema (13.27), segue que o operador linear $\underline{T}$ será diagonalizável se, e somente se,

$$\dim[V(1)] = 3\,.$$

Vejamos qual é a dimensão deste subespaço próprio.

Para isto lembremos que $p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ se, e somente se,

$$p(t) = a_o + a_1\,t + a_2\,t^2\,, \quad \text{para cada} \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

para $a_o, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ ou, equivalentemente,

$$[p]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_o \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\,.$$

Logo

$$\begin{aligned}
& p \in V(1) \\
\text{se, e somente se,} \quad & T(p) = \lambda \cdot p \\
\text{ou, equivalentemente} \quad & [T(p)]_{\mathcal{B}} = [\lambda \cdot p]_{\mathcal{B}}\,, \\
\text{ou, de (10.304), teremos:} \quad & [T]_{\mathcal{B}}\,[p]_{\mathcal{B}} = \lambda\,[p]_{\mathcal{B}}\,, \\
\text{isto é,} \quad & ([T]_{\mathcal{B}} - \lambda\,I_3)[p]_{\mathcal{B}} = O\,, \\
\text{ou seja,} \quad & \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_o \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\text{ou, equivalentemente} \quad & a_1 = a_2 = 0\,.
\end{aligned}$$

A verificação da última igualdade será deixada como exercício para o leitor.

Logo

$$p(t) = a_o = p_o(t)\,, \quad \text{para cada} \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

ou seja,

$$V(1) = [p_o]$$

e, do Teorema (13.27), segue que o operador linear $\underline{T}$ não será diagonalizável.

$\square$

Temos também o seguinte exemplo:

Exemplo 13.42 *Sejam $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ espaço vetorial real (onde $+$ e $\cdot$ são as operações usuais de $\mathbb{R}^4$) e a aplicação $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dada por*

$$T(x\,,y\,,z\,,t) \doteq (x+y\,,y\,,2\,z+t\,,2\,z+t)\,, \quad \textit{para cada} \quad (x\,,y\,,z\,,t) \in \mathbb{R}^4\,. \tag{13.43}$$

Mostre que $T \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^4\right)$ e verifique se o operador linear $\underline{T}$ é diagonalizável.

Encontre também os subespaços próprios associados ao operador linear $\underline{T}$.

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação que $T \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^4\right)$.

Suponhamos que o conjunto de vetores

$$\mathcal{C} \doteq \{e_1\,, e_2\,, e_3\,, e_4\}$$

é a base canônica de $\mathbb{R}^4$.

Com isto teremos:

$$\begin{aligned}
T(e_1) &= T(1\,,0\,,0\,,0) \overset{(13.43)}{=} (1\,,0\,,0\,,0) \\
&= 1\cdot(1\,,0\,,0\,,0) + 0\cdot(0\,,1\,,0\,,0) + 0\cdot(0\,,0\,,1\,,0) + 0\cdot(0\,,0\,,0\,,1) \\
&= 1\cdot e_1 + 0\cdot e_2 + 0\cdot e_3 + 0\cdot e_4; \\
T(e_2) &= T(0\,,1\,,0\,,0) \overset{(13.43)}{=} (1\,,1\,,0\,,0) \\
&= 1\cdot(1\,,0\,,0\,,0) + 1\cdot(0\,,1\,,0\,,0) + 0\cdot(0\,,0\,,1\,,0) + 0\cdot(0\,,0\,,0\,,1) \\
&= 1\cdot e_1 + 1\cdot e_2 + 0\cdot e_3 + 0\cdot e_4; \\
T(e_3) &= T(0\,,0\,,1\,,0) \overset{(13.43)}{=} (0\,,0\,,2\,,2) \\
&= 0\cdot(1\,,0\,,0\,,0) + 0\cdot(0\,,1\,,0\,,0) + 2\cdot(0\,,0\,,1\,,0) + 2\cdot(0\,,0\,,0\,,1) \\
&= 0\cdot e_1 + 0\cdot e_2 + 2\cdot e_3 + 2\cdot e_4; \\
T(e_4) &= T(0\,,0\,,0\,,1) \overset{(13.43)}{=} (0\,,0\,,1\,,1) \\
&= 0\cdot(1\,,0\,,0\,,0) + 0\cdot(0\,,1\,,0\,,0) + 1\cdot(0\,,0\,,1\,,0) + 1\cdot(0\,,0\,,0\,,1) \\
&= 0\cdot e_1 + 0\cdot e_2 + 1\cdot e_3 + 1\cdot e_4\,.
\end{aligned} \tag{13.44}$$

Logo, a matriz do operador linear $\underline{T}$, com relação à $\mathcal{B}$, será dada por:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

cujo polinômio característico associado será

$$\begin{aligned}
p_T(\lambda) &= \det\{[T]_{\mathcal{B}} - \lambda\, I_4\} \\
&= \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (1-\lambda)^2\,[(2-\lambda)\,(1-\lambda) - 2] \\
&= (1-\lambda)^2\,\left(\lambda^2 - 3\,\lambda\right) \\
&= \lambda\,(\lambda-3)\,(1-\lambda)^2,
\end{aligned}$$

Logo os autovalores associados ao operador linear T serão:

$$\lambda_1 \doteq 0, \quad \lambda_2 \doteq 3 \quad \text{e} \quad \lambda_3 \doteq 1 \text{ (com multiplicidade algébrica igual a 2).}$$

Encontremos os subespaços próprios associados a cada um dos autovalores obtidos acima.

Autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 0$:

Observemos que

$$
\begin{aligned}
& (x\,,y\,,z\,,t) \in V(0) \\
\text{se, e somente se,} \quad & T(x\,,y\,,z\,,t)) = \lambda_1 \cdot (x\,,y\,,z\,,t) \\
\text{de } (13.43) \overset{(\lambda_1=0)}{\text{ segue que:}} \quad & (x+y\,,y\,,2z+t\,,2z+t) = (0\,,0\,,0\,,0) \\
\text{isto é,} \quad & \begin{cases} x+y=0 \\ y=0 \\ 2z+t=0 \\ 2z+t=0 \end{cases}, \\
\text{ou ainda,} \quad & \begin{cases} x=y=0 \\ t=-2z \end{cases} \\
\text{equivalentemente,} \quad & (x\,,y\,,z\,,t) = (0\,,0\,,z\,,-2z) \\
& \qquad\qquad = z\cdot(0\,,0\,,1\,,-2)\,.
\end{aligned}
\tag{13.45}
$$

Logo, tomando-se

$$z = 1\,,$$

teremos que o vetor, não nulo,

$$u_1 \doteq (0\,,0\,,1\,,-2)\,,$$

será um autovetor do operador linear T, associado ao autovalor $\lambda_1 = 0$.

Além disso, de (13.45), segue que

$$
\begin{aligned}
V(0) &= [u_1] \\
&= [(0\,,0\,,1\,,-2)]\,,
\end{aligned}
$$

ou seja, a multiplicidade algébrica do autovalor $\lambda_1 = 0$ é igual a sua multiplicidade geométrica (ambas são iguais a 1).

Autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = 3$:

Observemos que

$$
\begin{aligned}
& && (x\,,y\,,z\,,t) \in V(3) \\
& \text{se, e somente se,} && T(x\,,y\,,z\,,t)) = \lambda_2 \cdot (x\,,y\,,z\,,t) \\
& \text{de } \overset{(\lambda_1=0)}{(13.43)} \text{ segue que:} && (x+y\,,y\,,2z+t\,,2z+t) = (3x\,,3y\,,3z\,,3t)\,, \\
& \text{isto é,} && \begin{cases} x+y = 3x \\ y = 3y \\ 2z+t = 3z \\ 2z+t = 3t \end{cases}, \\
& \text{ou ainda,} && \begin{cases} x = y = 0 \\ t = z \end{cases} \\
& \text{equivalentemente,} && (x\,,y\,,z\,,t) = (0\,,0\,,z\,,z) \\
& && \qquad = z \cdot (0\,,0\,,1\,,1)\,. \qquad (13.46)
\end{aligned}
$$

Logo, tomando-se

$$z = 1\,,$$

segue que

$$u_2 \doteq (0\,,0\,,1\,,1)\,,$$

será um autovetor associado do operador linear T, associado autovalor $\lambda_2 = 3$.

Além disso, de (13.46), segue que

$$
\begin{aligned}
V(3) &= [u_2] \\
&= [(0\,,0\,,1\,,1)]\,,
\end{aligned}
$$

ou seja, a multiplicidade algébrica do autovalor $\lambda_2 = 3$ é igual a sua multiplicidade geométrica (ambas iguais a 1).

<u>Autovetores associados ao autovalor $\lambda_3 = 1$:</u>

Observemos que

$$
\begin{aligned}
& && (x\,,y\,,z\,,t) \in V(1) \\
& \text{se, e somente se,} && T(x\,,y\,,z\,,t) = \lambda_3 \cdot (x\,,y\,,z\,,t) \\
& \text{de } \overset{(\lambda_1=0)}{(13.43)} \text{ segue que:} && (x+y\,,y\,,2z+t\,,2z+t) = (x\,,y\,,z\,,t)\,, \\
& \text{ou seja,} && \begin{cases} x+y = x \\ y = y \\ 2z+t = z \\ 2z+t = t \end{cases}, \\
& \text{isto é,} && y = z = t = 0 \\
& \text{equivalentemente,} && (x\,,y\,,z\,,t) = (x\,,0\,,0\,,0) \\
& && \qquad = x \cdot (1\,,0\,,0\,,0)\,. \qquad (13.47)
\end{aligned}
$$

Logo, tomando-se

$$x = 1\,,$$

segue que

$$u_3 \doteq (1\,,0\,,0\,,0)$$

será um autovetor do operador linear $\underline{T}$ associado ao autovalor $\lambda_3 = 1$.

Além disso, de (13.47), segue que

$$\begin{aligned} V(1) &= [u_1] \\ &= [(1\,,0\,,0\,,0)]\,. \end{aligned}$$

Notemos que a multiplicidade algébrica do autovalor $\lambda_3 = 1$ é igual a 2 e a sua multiplicidade geométrica é igual a 1.

Logo, pelo Teorema (13.27), segue que que o operador linear $\underline{T}$ **não** será diagonalizável.

□

Exemplo 13.48 *Ainda com relação ao operador linear do Exemplo (13.42) acima, encontre a matriz do operador linear $\underline{T}$, com relação à base $\mathcal{B}$ de $\left(\mathbb{R}^4, +, \cdot\right)$, formada pelos vetores*

$$u_1 \doteq (0\,,0\,,1\,,-2), \quad u_2 \doteq (0\,,0\,,1\,,1), \quad u_3 \doteq (1\,,0\,,0\,,0) \quad e \quad u_4 \doteq (0\,,1\,,0\,,0)\,. \tag{13.49}$$

Resolução:

Observemos que

$$\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$$

é uma base de $\left(\mathbb{R}^4, +, \cdot\right)$.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Além disso, do Exemplo (13.42) acima, temos:

$$\begin{aligned} T(u_1) &= T(0\,,0\,,1\,,-2) \\ &\overset{(13.43)}{=} (0\,,0\,,0\,,0) \\ &= 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3 + 0 \cdot u_4, \\ T(u_2) &= T(0\,,0\,,1\,,1) \\ &\overset{(13.43)}{=} (0\,,0\,,3\,,3) \\ &= 3 \cdot u_2 \\ &= 0 \cdot u_1 + 3 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3 + 0 \cdot u_4, \\ T(u_3) &= T(1\,,0\,,0\,,0) \\ &\overset{(13.43)}{=} (1\,,0\,,0\,,0) \\ &= 1 \cdot u_3 \\ &= 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 1 \cdot u_3 + 0 \cdot u_4, \\ T(u_4) &= T(0\,,1\,,0\,,0) \\ &\overset{(13.43)}{=} (1\,,1\,,0\,,0) \\ &= 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 1 \cdot u_3 + 1 \cdot u_4\,, \end{aligned}$$

ou seja, a matriz do operador linear $\underline{T}$, em relação à base $\mathcal{B}$, será dada por

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Observação 13.50 *Vale observar que a matriz acima* **não** *é diagonalizável e que os vetores*

$$u_1, u_2, u_3,$$

dados por (13.49)*, são autovetores do operador linear* $\underline{T}$ *que são L.I. em* $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$*, e o vetor* u_4 **não** *é um autovetor associado ao operador linear* $\underline{T}$*.*

Temos também a:

Proposição 13.51 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real (respectivamente, complexo), finitamente gerado e* $T \in \mathcal{L}(U)$ *um operador diagonalizável com autovalores*

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R} \text{ (respectivamente, } \mathbb{C}),$$

não, necessariamente distintos, onde

$$\dim(U) = n.$$

Dados

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R} \text{ (respectivamente, } \mathbb{C}),$$

denotemos por

$$\operatorname{diag}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (a_{ij}),$$

a matriz diagonal tal que

$$a_{ii} \doteq x_i, \quad \text{para cada} \quad i \in \{1, \cdots, n\}.$$

Consideremos $\underline{p}$ *um polinômio de grau* $\underline{m}$*, com coeficientes reais (ou complexos), dado por*

$$p(t) = a_o + a_1 t \cdots + a_m t^m, \quad \text{para cada} \quad t \in \mathbb{R} \text{ (respectivamente, } \mathbb{C}). \tag{13.52}$$

Suponhamos que o conjunto de vetores $\mathcal{B}$*, formado por autovetores do operador linear* $\underline{T}$*, é uma base de* $(U, +, \cdot)$*, ou seja,*

$$[T]_B = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \tag{13.53}$$

e o conjunto de vetores $\mathcal{C}$ *é uma outra base de* $(U, +, \cdot)$*.*

Então a matriz $[p(T)]_{\mathcal{C}}$ *é semelhante a matriz* $\operatorname{diag}(p(\lambda_1), p(\lambda_2), \cdots, p(\lambda_n))$*, isto é, existe uma matriz* $M \in M_n(\mathbb{R})$ *(ou* $M \in M_n(\mathbb{C})$*) inversível, de modo que*

$$[p(T)]_{\mathcal{C}} = M^{-1} \operatorname{diag}[p(\lambda_1), p(\lambda_2), \cdots, p(\lambda_n)]\, M. \tag{13.54}$$

Mais explicitamente, temos que

$$M = M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}. \tag{13.55}$$

Prova:

Da Proposição (10.286), segue que

$$[T]_{\mathcal{C}} = (M_{\mathcal{B}\mathcal{C}})^{-1}[T]_{\mathcal{B}}\, M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}\,. \tag{13.56}$$

Como operador linear $\underline{T}$ é diagonalizável, segue que a matriz $[T]_{\mathcal{C}}$ será semelhante a matriz diagonal $[T]_{\mathcal{B}}$.

Pelas Proposição (12.110) e Corolário (12.119) (veja a Observação (12.113)), segue que

$$[p(T)]_{\mathcal{C}} = (M_{\mathcal{B}\mathcal{C}})^{-1}\,[p(T)]_{\mathcal{B}}\, M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}\,. \tag{13.57}$$

Notemos que, para cada $k \in \mathbb{N}$, temos que

$$[\,\mathrm{diag}\,(\lambda_1\,,\lambda_2\,,\cdots\,,\lambda_n)]^k = [\,\mathrm{diag}\,(\lambda_1{}^k\,,\lambda_2^k\,,\cdots\,,\lambda_n{}^k)]\,. \tag{13.58}$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Mas

$$\begin{aligned}
[p(T)]_{\mathcal{B}} &\overset{(13.52)}{=} [a_o\, I_U + a_1\, T + \cdots + a_m\, T^m]_{\mathcal{B}} \\
&\overset{(10.265),(10.278)}{=} a_o\, I_n + a_1\, [T]_{\mathcal{B}} + \cdots + a_m\, [T]_{\mathcal{B}}^m \\
&\overset{(13.53)}{=} a_o\ \mathrm{diag}\,(1\,,\cdots\,,1) + a_1\ \mathrm{diag}\,(\lambda_1\,,\cdots\,,\lambda_n) + \cdots + a_m\,[\mathrm{diag}\,(\lambda_1\,,\cdots\,,\lambda_n)]^m \\
&\overset{(13.58)}{=} a_o\ \mathrm{diag}\,(1\,,\cdots\,,1) + a_1\ \mathrm{diag}\,(\lambda_1\,,\cdots\,,\lambda_n) + \cdots + a_m\ \mathrm{diag}\,(\lambda_1{}^m\,,\cdots\,,\lambda_n{}^m) \\
&= \mathrm{diag}\,(a_o\,,\cdots\,,a_o) + \mathrm{diag}\,(a_1\,\lambda_1\,,\cdots\,,a_1\,\lambda_n) + \cdots + \mathrm{diag}\,(a_m\,\lambda_1{}^m\,,\cdots\,,a_m\,\lambda_n{}^m) \\
&= \mathrm{diag}\,(a_o + a_1\,\lambda_1 + \cdots + a_m\,\lambda_1{}^m\,,\cdots\,,a_o + a_1\,\lambda_n + \cdots + a_m\,\lambda_n{}^m) \\
&\overset{(13.52)}{=} \mathrm{diag}\,(p(\lambda_1)\,,\cdots\,,p(\lambda_n))\,.
\end{aligned} \tag{13.59}$$

Logo, de (13.57), segue que

$$[p(T)]_{\mathcal{C}} = (M_{\mathcal{B}\mathcal{C}})^{-1}\ \mathrm{diag}\,(p(\lambda_1)\,,\cdots\,,p(\lambda_n))\,M_{\mathcal{B}\mathcal{C}},$$

ou seja, a matriz $[p(T)]_{\mathcal{C}}$ é semelhante a matriz $\mathrm{diag}\,(p(\lambda_1)\,,\cdots\,,p(\lambda_n))$, completando a demonstração do resultado.

∎

Como consequência temos o:

Corolário 13.60 *Sejam $(U,+,\cdot)$ um espaço vetorial real (respectivamente, complexo), finitamente gerado e $T \in \mathcal{L}(U)$ um operador diagonalizável.*

Então

$$p_T(T) = O$$

(o operador linear nulo), onde p_T é o polinômio característico associado ao operador linear $\underline{T}$.

Prova:

Consideremos o conjunto $\mathcal{B}$ uma base de $(U\,,+\,,\cdot)$, de modo que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \operatorname{diag}(\lambda_1\,,\lambda_2\,,\cdots\,,\lambda_n)\,,$$

onde

$$\lambda_1\,,\lambda_2\,,\cdots\,,\lambda_n \in \mathbb{R} \text{ (respectivamente, } \mathbb{C})$$

são os autovalores associados ao operador linear $\underline{T}$.

Segue, de (13.59) (que está na demonstração da Proposição acima), que

$$\begin{aligned}[p_T(T)]_B &= \operatorname{diag}(p_T(\lambda_1)\,,p_T(\lambda_2)\,,\cdots\,,p(\lambda_n)) \\ &\overset{\lambda_j \text{ é autovalor de } \underline{T}}{=} \operatorname{diag}(0\,,0\,,\cdots\,,0) \\ &= O\,,\end{aligned}$$

pois, para cada $j \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}$, temos que λ_j é um autovalor do operador linear T assim, pela Proposição (14.266), deveremos ter:

$$p_T(\lambda_j) = 0\,, \quad .$$

Assim o operador linear $p_T(T)$ deverá ser o operador linear nulo, isto é,

$$p_T(T) = O\,,$$

completando a demonstração do resultado

∎

Observação 13.61 *Podemos exibir um exemplo de $T \in \mathcal{L}(U)$ que <u>não</u> seja diagonalizável mas que*

$$p_T(T) = O\,.$$

Deixaremos como exercício para o leitor a construção de tal operador linear $\underline{T}$.
Sugestão: veja o Exemplo (12.27).

13.2 Exercícios

Capítulo 14

Espaços Euclidianos

$\boxed{\textbf{10.11.2015 - 25.a}}$

14.1 Produto Interno

Nos primeiros capítulos estudaremos outras propriedades básicas de um espaço vetorial reais (ou complexos).

A introdução de conceitos como geradores e base foram feitas a partir de combinações lineares que, por sua vez, envolvem apenas a adição de vetores e a multiplicação dos mesmos por escalares, dois objetos que estão presentes na própria definição do espaço vetorial real (respectivamente, complexo).

Neste capítulo veremos tipos especiais de espaços vetoriais reais (ou complexos), que possuem uma estrutura mais refinada, que nos proporcionará desenvolver alguns aspectos geométricos, como por exemplo, calcular o ângulo entre vetores e o comprimento de um vetor.

Veremos também que é possível elaborar mais detalhes sobre a questão relacionada com a diagonalização de operadores lineares definidos em tais espaços vetoriais reais (ou complexos).

Começaremos pela:

Definição 14.1 *Seja* $(V, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real.*

Um **produto interno em** $(V, +, \cdot)$ *, é uma aplicação que a cada par ordenado* $(u, v) \in V \times V$*, associa um número real, que será denotado por* $\langle u, v \rangle$*, satisfazendo as seguintes propriedades:*

(P1) para cada $u, v, w \in V$*, temos que*

$$\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle . \tag{14.2}$$

(P2) para cada $u, v \in V$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$*, temso que*

$$\langle \alpha \cdot u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle ; \tag{14.3}$$

(P3) para cada $u, v \in V$*, devemos ter*

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle ; \tag{14.4}$$

(P4) para cada $u \in V$ *temos que*

$$\langle u, u \rangle \geq 0 . \tag{14.5}$$

Além disso, se

$$\langle u, u \rangle = 0 , \quad \textit{deveremos ter} \quad u = O . \tag{14.6}$$

O espaço vetorial real $(V, +, \cdot)$ *munido de um produto interno* $\langle \cdot, \cdot \rangle$*, será chamado de* **espaço euclidiano***.*

Observação 14.7 *Suponhamos que* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *é um produto interno em* $(V, +, \cdot)$*.*

1. *O produto interno* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *em* $(V, +, \cdot)$ *também é chamado de* **produto escalar***.*

2. *Notemos que*

$$\langle O, u \rangle = 0 , \quad \textit{para cada} \quad u \in V . \tag{14.8}$$

De fato, pois

$$\begin{aligned} \langle O, u \rangle &= \langle O + O, u \rangle \\ &\overset{(P1)}{=} \langle O, u \rangle + \langle O, u \rangle , \end{aligned}$$

o que implicará na identidade (14.8).

3. *Outra propriedade é que, para cada* $v, w \in V$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$*, temos que*

$$\langle u, v + \alpha \cdot w \rangle = \langle u, v \rangle + \alpha \langle u, w \rangle . \tag{14.9}$$

De fato, basta combinar as propriedades (P1), (P2) e (P3) acima.

Deixaremos os detalhes como exercício para o leitor.

4. *Notemos que, o produto interno é um funcional linear, em cada uma de suas entradas, mais precisamente, para cada* $u \in V$ *fixado, temos que as aplicações*

$$\langle \cdot, u \rangle : V \to \mathbb{R} \quad \textit{e} \quad \langle u, \cdot \rangle : V \to \mathbb{R} \tag{14.10}$$

são funcionais lineares em $(V, +, \cdot)$*.*

Para espaços vetoriais complexos temos a:

Definição 14.11 *Seja* $(V, +, \cdot)$ *um espaço vetorial complexo.*

Diremos que a aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ *é um* **produto interno em** $(V, +, \cdot)$ *se, e somente se, valem as seguintes propriedades:*

(PC1) para cada $u, v, w \in V$ *temos que*

$$\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle ; \tag{14.12}$$

(PC2) para cada $u, v \in V$ *e* $\alpha \in \mathbb{C}$*, temos que*

$$\langle \alpha \cdot u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle ; \tag{14.13}$$

(PC3) para cada $u, v \in V$ *temos que*

$$\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle} , \tag{14.14}$$

onde $\overline{z}$ *denota o conjugado do número complexo* z*;*

(PC4) para cada $u \in V$ *temos que*

$$\langle u, u \rangle \in \mathbb{R} , \quad \text{e além disso,} \quad \langle u, u \rangle \geq 0 . \tag{14.15}$$

Se $u \in V$ *satisfaz*

$$\langle u, u \rangle = 0 , \quad \text{deveremos ter} \quad u = O . \tag{14.16}$$

Observação 14.17 *Notemos que comparando-se os itens das Definições* (14.1) *e* (14.11)*, temos que*

$$(P1) = (PC1) , \quad (P2) = (PC2) , \quad (P4) = (PC4) , \quad \text{mas} \quad (P3) \text{ e } (PC3) \text{ são diferentes.}$$

A seguir apresentamos alguns exemplos de produto interno em vários espaços vetoriais reais (ou complexos).

Começaremos introduzindo um produto interno no $\mathbb{R}^n$, a saber:

Exemplo 14.18 *Sejam* $(\mathbb{R}^n , + , \cdot)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de adição de* n*-uplas e multiplicação de número real por* n*-upla, respectivamente)) e consideremos a aplicação* $\langle \cdot , \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\langle x , y \rangle \doteq x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n , \tag{14.19}$$

onde

$$x \doteq (x_1 , x_2 , \cdots , x_n) \quad \text{e} \quad y \doteq (y_1 , y_2 , \cdots , y_n) \in \mathbb{R}^n .$$

Então a aplicação $\langle \cdot , \cdot \rangle$ *é um produto interno em* $(\mathbb{R}^n , + , \cdot)$.

Resolução:

De fato, sejam

$$x \doteq (x_1 , x_2 , \cdots , x_n) , \quad y \doteq (y_1 , y_2 , \cdots , y_n) , \quad z \doteq (z_1 , z_2 , \cdots , z_n) \in \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad \alpha \in \mathbb{R} .$$

Logo

$$x + z = (x_1 + z_1 , x_2 + z_2 , \cdots , x_n + z_n), \tag{14.20}$$

$$\alpha \cdot x = (\alpha x_1 , \alpha x_1 , \cdots , \alpha x_n) \tag{14.21}$$

Então

1. Notemos que:

$$\begin{aligned}
\langle x + z \, , y \rangle &\overset{(14.20),(14.19)}{=} (x_1 + z_1)\, y_1 + (x_2 + z_2)\, y_2 + \cdots + (x_n + z_n)\, y_n \\
&= (x_1\, y_1 + x_2\, y_2 + \cdots + x_n\, y_n) + (z_1\, y_1 + z_2\, y_2 + \cdots + z_n\, y_n) \\
&\overset{(14.19)}{=} \langle x \, , y \rangle + \langle z \, , y \rangle \, ,
\end{aligned}$$

   ou seja, vale (P1).

2. Notemos também que:

$$\begin{aligned}
\langle \alpha \cdot x \, , y \rangle &\overset{(14.21),(14.19)}{=} (\alpha\, x_1)\, y_1 + (\alpha\, x_2)\, y_2 + \cdots + (\alpha\, x_n)\, y_n \\
&= \alpha\, (x_1\, y_1 + \cdots + x_n\, y_n) \\
&\overset{(14.19)}{=} \alpha \, \langle x \, , y \rangle \, ,
\end{aligned}$$

   ou seja, vale (P2).

3. Observemos que:

$$\begin{aligned}
\langle x \, , y \rangle &\overset{(14.19)}{=} x_1\, y_1 + x_2\, y_2 + \cdots + x_n\, y_n \\
&= y_1\, x_1 + y_1\, x_1 + \cdots + y_n\, x_n \\
&\overset{(14.19)}{=} \langle y \, , x \rangle \, ,
\end{aligned}$$

   isto é, vale (P3).

4. Observemos também que:

$$\begin{aligned}
\langle x \, , x \rangle &\overset{((14.19)}{=} x_1\, x_1 + x_2\, x_2 + \cdots + x_n\, x_n \\
&= {x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2 \geq 0 \, ,
\end{aligned}$$

   ou seja,

$$\langle x \, , y \rangle \geq 0 \, .$$

   Além disso,

$$\langle x \, , x \rangle = 0$$

   se, e somente se,

$$ {x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2 = 0$$

   ou, equivalentemente,

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0 \, , \quad \text{isto é,} \quad x = O \, ,$$

   ou seja, vale (P4).

Portanto a aplicação $\langle \cdot \, , \cdot \rangle$, definida por (14.19) é um produto interno em $(\mathbb{R}^n \, , + \, , \cdot)$.

□

Temos também o:

Exemplo 14.22 *Com relação ao Exemplo (14.18) acima, tomando-se* $n = 3$*, calcule o produto interno entre os vetores*

$$u \doteq (1\,,-1\,,1) \quad e \quad v \doteq (0\,,2\,,4)\,. \tag{14.23}$$

Resolução:

Temos que

$$\begin{aligned}\langle u\,,v\rangle &\overset{(14.23)}{=} \langle (1\,,-1\,,1)\,,(0\,,2\,,4)\rangle \\ &\overset{(14.19)}{=} 1\cdot 0 + (-1)\cdot 2 + 1\cdot 4 \\ &= 2\,.\end{aligned}$$

□

Exemplo 14.24 *Ainda em relação ao Exemplo (14.18) acima, tomando-se* $n = 2$*, calcule* $\langle u\,,v\rangle$ *onde*

$$u \doteq (\cos(\theta)\,,\operatorname{sen}(\theta)) \quad e \quad v \doteq (\cos(\alpha)\,,\operatorname{sen}(\alpha))\,, \tag{14.25}$$

onde $\theta\,,\alpha \in \mathbb{R}$ *estão fixos.*

Resolução:

Temos que

$$\begin{aligned}\langle u\,,v\rangle &\overset{(14.25)}{=} \langle\, (\cos(\theta)\,,\operatorname{sen}(\theta))\,,(\cos(\alpha)\,,\operatorname{sen}(\alpha))\,\rangle \\ &\overset{(14.19)}{=} \cos(\theta)\cos(\alpha) + \operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\alpha) \\ &\overset{\text{Exercício}}{=} \cos(\theta-\alpha)\,.\end{aligned}$$

□

Observação 14.26 *Observemos que no Exemplo (14.24) acima, temos que*

$$\begin{aligned} & \langle u\,,v\rangle = 0 \\ \textit{se, e somente se,} \quad & \cos(\theta-\alpha) = 0 \\ \textit{ou seja,} \quad & \theta - \alpha = \frac{\pi}{2} + K\pi\,, \quad \textit{para algum} \quad k \in \mathbb{Z}\,, \\ \textit{ou ainda,} \quad & \theta = \alpha + \frac{\pi}{2} + K\pi\,, \quad \textit{para algum} \quad k \in \mathbb{Z}\,. \end{aligned} \tag{14.27}$$

Portanto,

$$\theta = \alpha + \frac{\pi}{2} + K\pi\,, \quad \textit{para algum} \quad k \in \mathbb{Z} \quad \textit{se, e somente se,} \quad \langle u\,,v\rangle = 0\,.$$

Podemos apresentar outros produtos internos no $(\mathbb{R}^n\,,+\,,\cdot)$ além do apresentado no Exemplo (14.19).

A seguir exibiremos um outro exemplo de produto interno para o caso $n = 3$, isto é, em $(\mathbb{R}^3\,,+\,,\cdot)$, a saber:

Exemplo 14.28 *Sejam* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $\mathbb{R}^3$*) e consideremos a aplicação* $\langle \cdot , \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle \doteq \frac{1}{2} x_1 x_2 + \frac{1}{3} y_1 y_2 + \frac{1}{4} z_1 z_2 , \tag{14.29}$$

para

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3 .$$

Mostre que a aplicação $\langle \cdot , \cdot \rangle$ *define um produto interno em* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Resolução:

De fato, sejam

$$u \doteq (x_1, y_1, z_1), \; v \doteq (x_2, y_2, z_2), \; w \doteq (x_3, y_3, z_3) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{e} \quad \alpha \in \mathbb{R} . \tag{14.30}$$

Logo

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2), \tag{14.31}$$

$$\alpha \cdot (x_1, y_1, z_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1) \tag{14.32}$$

Então

1. Notemos que:

$$\begin{aligned}
\langle u + v, w \rangle &\overset{(14.31)}{=} \langle (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2), (x_3, y_3, z_3) \rangle \\
&\overset{(14.29)}{=} \frac{1}{2}(x_1 + x_2) x_3 + \frac{1}{3}(y_1 + y_2) y_3 + \frac{1}{4}(z_1 + z_2) z_3 \\
&= \left(\frac{1}{2} x_1 x_3 + \frac{1}{3} y_1 y_3 + \frac{1}{4} z_1 z_3 \right) + \left(\frac{1}{2} x_2 x_3 + \frac{1}{3} y_2 y_3 + \frac{1}{4} z_2 z_3 \right) \\
&\overset{(14.29)}{=} \langle (x_1, y_1, z_1), (x_3, y_3, z_3) \rangle + \langle (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) \rangle \\
&= \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle ,
\end{aligned}$$

ou seja, vale (P1).

2. Observemos que:

$$\begin{aligned}
\langle \alpha \cdot u, v \rangle &\overset{(14.32)}{=} \langle (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle \\
&\overset{(14.29)}{=} \frac{1}{2}(\alpha x_1) x_2 + \frac{1}{3}(\alpha y_1) y_2 + \frac{1}{4}(\alpha z_1) z_2 \\
&= \alpha \left(\frac{1}{2} x_1 x_2 + \frac{1}{3} y_1 y_2 + \frac{1}{4} z_1 z_2 \right) \\
&\overset{(14.29)}{=} \alpha \langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle \\
&\langle u, \alpha \cdot v \rangle ,
\end{aligned}$$

isto é, vale (P2).

3. Notemos também que:

$$\begin{aligned}
\langle u, v\rangle &\overset{(14.30)}{=} \langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\rangle \\
&\overset{(14.19)}{=} \frac{1}{2} x_1 x_2 + \frac{1}{3} y_1 y_2 + \frac{1}{4} z_1 z_2 \\
&= \frac{1}{2} x_2 x_1 + \frac{1}{3} y_2 y_1 + \frac{1}{4} z_2 z_1 \\
&= \langle (x_2, y_2, z_2), (x_1, y_1, z_1)\rangle \\
&= \langle v, u\rangle,
\end{aligned}$$

ou seja, vale (P3).

4. Observemos também que:

$$\begin{aligned}
\langle u, u\rangle &\overset{(14.30)}{=} \langle (x_1, y_1, z_1), (x_1, y_1, z_1)\rangle \\
&\overset{(14.19)}{=} \frac{1}{2} x_1 x_1 + \frac{1}{3} y_1 y_1 + \frac{1}{4} z_1 z_1 \\
&= \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{3} y_1^2 + \frac{1}{4} z_1^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Logo

$$\langle u, u\rangle \geq 0$$

para cada $u \in \mathbb{R}^3$.

Além disso,

$$\begin{aligned}
& \langle u, u\rangle \overset{(14.19)}{=} \langle (x_1, y_1, z_1), (x_1, y_1, z_1)\rangle = 0 \\
\text{se, e somente se,}\quad & \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{3} y_1^2 + \frac{1}{4} z_1^2 = 0, \\
\text{ou seja,}\quad & x_1 = y_1 = z_1 = 0, \\
\text{isto é,}\quad & u = (0, 0, 0) = O, \\
\text{ou seja,}\quad & \text{vale (P4).}
\end{aligned}$$

Portanto a aplicação $\langle \cdot, \cdot\rangle$ é um produto interno em $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

□

Exemplo 14.33 *Com relação ao produto interno apresentado no Exemplo* (14.28) *acima, calcule*

$$\langle (1, -1, 1), (0, 2, 4)\rangle.$$

Resolução:

Temos que

$$\begin{aligned}
\langle (1, -1, 1), (0, 2, 4)\rangle &\overset{(14.29)}{=} \frac{1}{2}(1 \cdot 0) + \frac{1}{3}(-1 \cdot 2) + \frac{1}{4}(1 \cdot 4) \\
&= \frac{1}{3}.\text{nonumber} \qquad (14.34)
\end{aligned}$$

□

Para o espaço das funções contínuas a valores reais, definidas em um intervalo fechado e limitado, temos o:

Exemplo 14.35 *Sejam* $(C([a\,,b]\,;\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de adiçaõ de funções e multiplicação de número real por função, respectivamente) e consideremos a aplicação* $\langle\,\cdot\,,\cdot\rangle : C([a\,,b]\,;\mathbb{R}) \times C([a\,,b]\,;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$*, dada por:*

$$\langle\, f\,, g\rangle \doteq \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx\,, \tag{14.36}$$

para cada $f, g \in C([a\,,b]\,;\mathbb{R})$.

Mostre que a aplicação $\langle\,\cdot\,,\cdot\rangle$ *é um produto interno em* $(C([a\,,b]\,;\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$.

Resolução:

De fato, se

$$f\,,g\,,h \in C([a\,,b]\,;\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad \alpha \in \mathbb{R}\,,$$

então:

1. Notemos que:

$$\begin{aligned}\langle\, f+g\,,h\rangle &\overset{(14.36)}{=} \int_a^b (f+g)(x)\,h(x)\,dx \\ &= \int_a^b f(x)\,h(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,h(x)\,dx \\ &\overset{(14.36)}{=} \langle\, f\,,h\rangle + \langle\, g\,,h\rangle\,,\end{aligned}$$

ou seja, vale (P1).

2. Observemos que:

$$\begin{aligned}\langle\, \alpha\cdot f\,,g\rangle &\overset{(14.36)}{=} \int_a^b (\alpha\, f)(x)\,g(x)\,dx \\ &= \alpha \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \\ &\overset{(14.36)}{=} \alpha\,\langle\, f\,,g\rangle\,,\end{aligned}$$

isto é, vale (P2).

3. Notemos também que:

$$\begin{aligned}\langle\, f\,,g\rangle &\overset{(14.36)}{=} \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \\ &= \int_a^b g(x)\,f(x)\,dx \\ &\overset{(14.36)}{=} \langle\, g\,,f\rangle\,,\end{aligned}$$

ou seja, vale (P3).

4. Observemos também que:

$$\langle f, f\rangle \overset{(14.36)}{=} \int_a^b f(x)\, f(x)\, dx \int_a^b f^2(x)\, dx \geq 0,$$

assim teremos

$$\langle f, f\rangle \geq 0.$$

Lembremos, do Cálculo 1, que se $f \in C([a, b]; \mathbb{R})$ e

$$f(x_o) \neq 0, \text{ para algum } x_o \in [a, b],$$

$$\text{então} \quad \int_a^b f^2(x)\, dx > 0. \tag{14.37}$$

Logo

$$\begin{aligned} & \langle f, f\rangle = 0 \\ \text{se, e somente se,} \quad & \int_a^b f^2(x)\, dx = 0, \\ \text{e segue, de (14.37), que} \quad & f = O, \\ \text{isto é,} \quad & \text{vale (P4).} \end{aligned}$$

Portanto a aplicação $\langle \cdot, \cdot\rangle$ é um produto interno em $(C([a, b]; \mathbb{R}), +, \cdot)$.

□

Exemplo 14.38 *Com relação ao produto interno apresentado no Exemplo (14.35) acima, calcule o produto interno entre as funções*

$$f(x) \doteq \operatorname{sen}(x) \quad e \quad g(x) \doteq \cos(x), \quad \textit{para cada} \quad x \in [0, 2\pi]. \tag{14.39}$$

Resolução:

Notemos que $f, g \in C([0, 2\pi]; \mathbb{R})$ e

$$\begin{aligned} \langle f, g\rangle & \overset{(14.36)}{=} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(x) \cos(x)\, dx \\ & \overset{\text{Exercício}}{=} \left. \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{2} \right|_{x=0}^{x=2\pi} \\ & = 0. \end{aligned}$$

□

Para o espaço das matrizes de ordem $m \times n$ com entrada reais temos o:

Exemplo 14.40 *Sejam* $(M_{m\times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de adição de matrizes e multiplicação de número real por matriz, respectivamente) e consideremos a aplicação* $\langle \cdot, \cdot\rangle : M_{m\times n}(\mathbb{R}) \times M_{m\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, *dada por:*

$$\langle A, B\rangle \doteq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{ij}, \tag{14.41}$$

onde

$$A \doteq (a_{ij}), \; B \doteq (b_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R}).$$

Mostre que a aplicação $\langle \cdot , \cdot \rangle$ *é um produto interno em* $(M_{m\times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Resolução:

De fato, sejam

$$A \doteq (a_{ij}), \; B \doteq (b_{ij}), \; C \doteq (c_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{14.42}$$

Logo

$$A + B \overset{(14.42)}{=} (a_{ij} + b_{ij}), \tag{14.43}$$

$$\alpha \cdot A \overset{(14.42)}{=} (\alpha\, a_{ij}). \tag{14.44}$$

Então:

1. Notemos que

$$\begin{aligned}\langle A + B , C\rangle &\overset{(14.43)}{=} \langle (a_{ij} + b_{ij}), (c_{ij})\rangle \\ &\overset{(14.41)}{=} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + b_{ij})\, c_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, c_{ij} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, c_{ij} \\ &\overset{(14.41)}{=} \langle A , C\rangle + \langle B , C\rangle,\end{aligned}$$

ou seja, vale (P1).

2. Observemos que:

$$\begin{aligned}\langle \alpha \cdot A , B\rangle &\overset{(14.44)}{=} \langle (\alpha\, a_{ij}), (b_{ij})\rangle \\ &\overset{(14.41)}{=} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (\alpha\, a_{ij})\, b_{ij} \\ &= \alpha \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{ij} \\ &\overset{(14.41)}{=} \alpha \langle A , B\rangle,\end{aligned}$$

isto é, vale (P2).

3. Notemos também que:

$$\begin{aligned}\langle A , B\rangle &\overset{(14.41)}{=} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} b_{ij}\, a_{ij} \\ &\overset{(14.41)}{=} \langle B , A\rangle,\end{aligned}$$

ou seja, vale (P3).

4. Observemos também que:

$$\langle A\,,A\rangle \overset{((14.41)}{=} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,a_{ij}$$
$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} {a_{ij}}^2 \geq 0\,,$$
ou seja, $\langle A\,,A\rangle \geq 0\,.$

Além disso,

$$\langle A\,,A\rangle = 0$$

se, e somente se, $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} {a_{ij}}^2 = 0\,,$

ou seja, $a_{ij} = 0\,,$ para cada $i \in \{1\,,2\,,\cdots\,,m\}$ e $j \in \{1\,,2\,\cdots\,,n\}$,

isto é, deveremos ter $A = O\,,$

isto é, vale (P4).

Portanto a aplicação $\langle\,\cdot\,,\cdot\rangle$ é um produto interno em $(M_{m\times n}(\mathbb{R}),+,\cdot)$.

□

Exemplo 14.45 *Com relação ao produto interno apresentado no Exemplo (14.40) acima, tomando-se $m = n = 2$, calcule o produto interno entre os vetores*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{14.46}$$

Resolução:

Temos que

$$\langle A\,,B\rangle \overset{(14.46)}{=} \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$
$$\overset{(14.41)}{=} 1\cdot(-2) + 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 2\cdot 1$$
$$= 0\,.$$

□

Observação 14.47 *Lembremos que o traço de uma matriz quadrada $\underline{A}$ é a soma dos elementos da diagonal da matriz e é denotado por* $\operatorname{tr}(A)$.

Para mais detalhes sobre o traço de uma matriz ver o apênice A.

Um outro modo de introduzir um produto interno no espaço vetorial real das matrizes quadradas é dado pelo:

Exemplo 14.48 *Sejam* $(M_{m\times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de adição de matrizes e multiplicação de número real por matrizes, respectivamente) e consideremos a aplicação* $\langle \cdot, \cdot \rangle : M_{m\times n}(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$*, dada por:*

$$\langle A, B \rangle \doteq \operatorname{tr}\left(B^t A\right), \tag{14.49}$$

onde

$$A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R}).$$

Mostre que a aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *é um produto interno em* $(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$*.*

Resolução:

Notemos que se

$$A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R}),$$

então

$$B^t \in M_{n\times m}(\mathbb{R}).$$

Logo podemos fazer o produto

$$\left(B^t \cdot A\right) \in M_{m\times n}(\mathbb{R}),$$

ou seja, será uma matriz quadrada de ordem $\underline{n}$ e assim poderemos calcular o seu traço.

Notemos também que do Apêndice (A), segue que se

$$A = (a_{ij}), \;\; B = (b_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R}),$$

então

$$\operatorname{tr}(B^t A) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, b_{ji}\,. \tag{14.50}$$

Logo, se

$$A, B, C \in M_n(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

então:

1. Notemos que

$$\begin{aligned}
\langle A + B, C \rangle &\overset{(14.49)}{=} \operatorname{tr}\left[C^t (A + B)\right] \\
&\overset{\text{Prop. (A.21) do Apêndice (A)}}{=} \operatorname{tr}\left[C^t A + C^t B\right] \\
&\overset{\text{Prop. (A.48) do Apêndice (A)}}{=} \operatorname{tr}\left(C^t A\right) + \operatorname{tr}\left(C^t B\right) \\
&\overset{(14.49)}{=} \langle A, C \rangle + \langle B, C \rangle,
\end{aligned}$$

ou seja, vale (P1).

2. Observemos que:

$$\begin{aligned}
\langle \alpha \cdot A , B \rangle &\overset{(14.49)}{=} \operatorname{tr}\left[B^t\,(\alpha\, A)\right] \\
&\overset{\text{Prop. (A.21) do Apêndice (A)}}{=} \operatorname{tr}\left[\alpha\,\left(B^t\, A\right)\right] \\
&\overset{\text{Prop. (A.48) do Apêndice (A)}}{=} \alpha \operatorname{tr}\left(B^t\, A\right) \\
&\overset{(14.49)}{=} \alpha\,\langle A , B \rangle\,,
\end{aligned}$$

isto é, vale (P2).

3. Notemos também que:

$$\begin{aligned}
\langle A , B \rangle &\overset{(14.49)}{=} \operatorname{tr}\left(B^t A\right) \\
&\overset{\text{Prop. (A.48) do Apêndice (A)}}{=} \operatorname{tr}\left[\left(B^t\, A\right)^t\right] \\
&\overset{\text{Prop. (A.107) do Apêndice (A)}}{=} \operatorname{tr}\left[A^t\,\underbrace{\left(B^t\right)^t}_{=B}\right] \\
&= \operatorname{tr}\left(A^t\, B\right) \\
&\overset{(14.49)}{=} \langle B , A \rangle\,,
\end{aligned}$$

ou seja, vale (P3).

4. Notemos também que:

$$\begin{aligned}
\langle A , A \rangle &\overset{(14.49)}{=} \operatorname{tr}\left(A^t\, A\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} {a_{ij}}^2 \geq 0\,.
\end{aligned}$$

Logo

$$\langle A , A \rangle \geq 0\,.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
& \langle A , A \rangle = 0 \\
\text{se, e somente se,} \quad & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} {a_{ij}}^2 = 0\,, \\
\text{ou seja,} \quad & a_{ij} = 0\,, \quad \text{para cada} \quad i \in \{1 , 2 , \cdots , m\} \ \text{ e } \ j \in \{1 , 2 , \cdots , n\}\,, \\
\text{isto é, deveremos ter} \quad & A = O\,, \\
\text{isto é,} \quad & \text{vale (P4).}
\end{aligned}$$

Portanto a aplicação $\langle \cdot , \cdot \rangle$ é um produto interno em $(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Observação 14.51 *Em vista das Proposições (A.48) e (A.107)do Apêndice (A), temos que, se* $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ *então*

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}\left(B^t A\right) &= \operatorname{tr}\left[\left(B^t A\right)^t\right] \\ &= \operatorname{tr}\left[A^t \left(B^t\right)^t\right] \\ &= \operatorname{tr}\left(A^t B\right), \end{aligned}$$

ou seja, poderíamos ter definido o produto interno do Exemplo (14.48) acima, por

$$\langle A, B \rangle \doteq \operatorname{tr}\left(A^t B\right),$$

que teríamos o mesmo resultado.

14.2 Norma

Definição 14.52 *Seja* $(V, +, \cdot)$ *é um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) munido de um produto interno.*

Dado $u \in V$*, definiremos a* **norma do vetor** $\underline{u}$*, que será denotada por* $\|u\|$*, como sendo*

$$\|u\| \doteq \sqrt{\langle u, u \rangle}. \tag{14.53}$$

Observação 14.54 *Notemos que é possível extrair a raiz quadrada de* $\langle u, u \rangle$ *pois, pela propriedade (P4) (ou (PC4)), temos que*

$$\langle u, u \rangle \geq 0.$$

Consideremos alguns exemplos:

Exemplo 14.55 *Consideremos o espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $\mathbb{R}^3$*), munido o produto interno dado por (14.19).*

Encontre a expressão para a norma do vetor

$$x \doteq (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{14.56}$$

Resolução:

Neste caso teremos

$$\begin{aligned} \|x\| &\overset{(14.53)}{=} \sqrt{\langle u, u \rangle} \\ &\overset{(14.56) \text{ e } (14.19)}{=} \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}. \end{aligned} \tag{14.57}$$

□

Observação 14.58 *No curso de Geometria Analítica vimos que a norma do vetor* $x \in \mathbb{R}^3$ *(ou de*$\mathbb{R}^2$*) nos fornece o comprimento do vetor* $\underline{x}$.

Logo é natural pensarmos que a norma de um vetor em um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) munido de um produto interno nos forneça o comprimento do vetor em questão.

Temos também o:

Exemplo 14.59 *Consideremos o espaço vetorial real* $(C([a,b];\mathbb{R}),+,\cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de adiçaõ de funções e multiplicação de número real por função, respectivamente), munido do produto interno definido por* (14.36).

Encontre a expressão para a norma do vetor $f \in C([a,b];\mathbb{R})$.

Resolução:

Neste caso temos

$$\|f\| \stackrel{(14.53)}{=} \sqrt{\langle f, f\rangle} \stackrel{(14.36)}{=} \sqrt{\int_a^b [f(x)]^2\,dx}\,. \tag{14.60}$$

□

Exemplo 14.61 *Consideremos o espaço vetorial* $(M_n(\mathbb{R}),+,\cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de adição de matrizes e multiplicação de número real por matriz, respectivamente), munido do produto interno definido por (14.49).*

Encontre a expressão para a norma do vetor $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Resolução:

Neste caso temos

$$\|A\| \stackrel{(14.53)}{=} \sqrt{\langle A, A\rangle} \stackrel{(14.49)}{=} \sqrt{\operatorname{tr}\,(A^t A)}\,.$$

□

Temos as seguintes propriedades para a norma associada a um produto interno em um espaço vetorial real (ou complexo):

Proposição 14.62 *Seja* $(V,+,\cdot)$ *um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) munido de um produto interno.*

Então:

1. *para cada* $u \in V$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$, *temos*
$$\|\alpha \cdot u\| = |\alpha|\,\|u\|\,. \tag{14.63}$$

2. *para cada* $u \in V$, *temos*
$$\|u\| \geq 0\,. \tag{14.64}$$

3. *para cada* $u \in V$, *temos*
$$\|u\| = 0 \quad \textit{se, e somente se,} \quad u = O\,. \tag{14.65}$$

4. *vale a* **desigualdade de Cauchy-Schwarz**, *isto é, para cada* $u, v \in V$, *teremos:*

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \, \|v\| \,. \tag{14.66}$$

5. *vale a* **desigualdade triangular**, *isto é, para cada* $u, v \in V$, *teremos:*

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \,. \tag{14.67}$$

Prova:

De 1. :

Observemos que, se o espaço vetorial $(V, +, \cdot)$ for real, então

$$\begin{aligned} \|\alpha \cdot u\| &\overset{(14.53)}{=} \sqrt{\langle \alpha \cdot u, \alpha \cdot u\rangle} \\ &\overset{(P2)}{=} \sqrt{\alpha^2 \langle u, u\rangle} \\ &= \sqrt{\alpha^2} \sqrt{\langle u, u\rangle} \\ &= |\alpha| \sqrt{\langle u, u\rangle} \\ &\overset{(14.53)}{=} |\alpha| \, \|u\| \,, \end{aligned}$$

mostrando a indentidade (14.63).

Se o espaço vetorial $(V, +, \cdot)$ for complexo, então

$$\begin{aligned} \|\alpha \cdot u\| &\overset{(14.53)}{=} \sqrt{\langle \alpha \cdot u, \alpha \cdot u\rangle} \\ &\overset{(PC2)}{=} \sqrt{\alpha \, \overline{\alpha} \langle u, u\rangle} \\ &= \sqrt{|\alpha|^2} \sqrt{\langle u, u\rangle} \\ &= |\alpha| \sqrt{\langle u, u\rangle} \\ &\overset{(14.53)}{=} |\alpha| \, \|u\| \,, \end{aligned}$$

mostrando a identidade (14.63).

De 2.:

Notemos que

$$\|u\| \overset{(14.53)}{=} \sqrt{\langle u, u\rangle} \geq 0 \,,$$

mostrando a desigualdade (14.64).

De 3.:

Se

$$\begin{aligned} & u = O \,, \\ \text{então} \qquad & \|u\| = \sqrt{\underbrace{\langle O, O\rangle}_{=0}} = 0 \,. \end{aligned}$$

Reciprocamente, se

$$\begin{aligned} & u \neq O\,, \\ \text{então, de (P3) (ou (PC3)), segue que} \quad & \langle\, u\,,u \rangle > 0\,, \\ \text{assim} \quad & \|u\| = \sqrt{\langle\, u\,,u \rangle} > 0\,, \end{aligned}$$

mostrando a indentidade (14.65).

<u>De 4.:</u>

Se

$$v = O\,, \quad \text{segue que,} \quad |\langle\, u\,,O \rangle| = 0$$

e por outro lado

$$\|u\|\,\|O\| = 0\,,$$

em particular, teremos

$$|\langle\, u\,,v \rangle| \leq \|u\|\,\|v\|\,,$$

mostrando a identidade (14.66).

Suponhamos agora, que

$$v \neq O\,.$$

Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, temos, pela propriedade 2., que

$$\|u + \alpha \cdot v\|^2 \geq 0\,.$$

Observemos que, se o espaço vetorial real $(V\,,+\,,\cdot)$, teremos:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|u + \alpha \cdot v\|^2 \\ &\overset{(14.53)}{=} \langle\, u + \alpha \cdot v\,, u + \alpha \cdot v \rangle \\ &\overset{(P1),(P2),(P3)}{=} \langle\, u\,,u \rangle + 2\,\langle\, u\,,v \rangle\,\alpha + \langle\, v\,,v \rangle\,\alpha^2 \\ &\overset{(14.53)}{=} \|u\|^2 + 2\,\langle\, u\,,v \rangle\,\alpha + \|v\|^2\,\alpha^2\,. \end{aligned}$$

Notemos que o lado direito da desigualdade acima, é um polinômio do 2.o grau na variável $\alpha \in \mathbb{R}$ (pois $\|v\|^2 \neq 0$).

Como ele deve ser maior ou igual a zero deverá possuir, no máximo, uma raiz real, ou seja, seu discriminante deverá ser <u>**menor ou igual a zero**</u>.

Mas o discriminante associado ao lado direito da desigualdade acima será dado por

$$\begin{aligned} & \Delta \doteq 4\,\langle\, u\,,v \rangle^2 - 4\,\|u\|^2\|v\|^2 \leq 0 \\ \text{ou seja,} \quad & \langle\, u\,,v \rangle^2 \leq \|u\|^2\,\|v\|^2\,. \end{aligned}$$

Extraindo a raiz quadrada, obtemos

$$|\langle\, u\,,v \rangle| \leq \|u\|\,\|v\|\,,$$

mostrando a identidade (14.66).

Deixaremos como exercício para o leitor provar a propriedade (N4), para o caso que o espaço vetorial seja sobre os complexos.

De 5.:

Observemos que, se o espaço vetorial $(V, +, \cdot)$ sobre real, teremos:

$$\begin{aligned} \|u+v\|^2 &\overset{(14.53)}{=} \langle u+v, u+v\rangle \\ &\overset{(P1),(P2),(P3)}{=} \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v\rangle \\ &\overset{\text{des. Cauchy-Schwarz}}{\leq} \|u\|^2 + \|u\|^2 + 2\|u\|\,\|v\| \\ &= (\|u\| + \|v\|)^2 . \end{aligned}$$

Extraindo a raiz quadrada, obteremos a identidade (14.67).

Deixaremos como exercício para o leitor provar a propriedade (N5), para o caso que o espaço vetorial seja sobre os complexos.

Com isto completamos a demonstração do resultado.

∎

Observação 14.68

1. *Em um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) munido de um produto interno, um vetor que tem norma igual a $\underline{1}$ será dito* **vetor unitário**.

2. *Observemos que a desigualdade de Cauchy-Schwarz, aplicada ao produto interno do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ dado por (14.19), nos fornece a seguinte desigualdade:*

$$\underbrace{(x_1\,y_1 + \cdots + x_n\,y_n)^2}_{=\langle (x_1,\cdots,x_n),(y_1,\cdots,y_n)\rangle^2} \leq \left(\underbrace{x_1{}^2 + \cdots + x_n{}^2}_{=\|(x_1,\cdots,x_n)\|^2}\right)\left(\underbrace{y_1{}^2 + \cdots + y_n{}^2}_{=\|(y_1,\cdots,y_n)\|^2}\right).$$

3. *A mesma desigualdade aplicada ao produto interno (14.36) no espaço vetorial real $(C([a, b,]; \mathbb{R}), +, \cdot)$ fornecerá a seguinte desigualdade:*

$$\underbrace{\left(\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right)^2}_{=\langle f,g\rangle^2} \leq \underbrace{\int_a^b [f(x)]^2\,dx}_{=\|f\|^2}\;\underbrace{\int_a^b [g(x)]^2\,dx}_{=\|g\|^2} .$$

4. *A mesma desigualdade aplicada ao produto interno (14.49) do espaço vetorial real $(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$, nos fornecerá a seguinte desigualdade:*

$$\underbrace{\left[\operatorname{tr}\,(B^t\,A)\right]^2}_{=\langle A,B\rangle^2} \leq \underbrace{\operatorname{tr}\,(A^t\,A)}_{=\|A\|^2}\;\underbrace{\operatorname{tr}\,(B^t\,B)}_{=\|B\|^2} .$$

$\boxed{\textbf{12.11.2015 - 26.a}}$

Temos também a:

Proposição 14.69 (Identidade do Paralelogramo) *Sejam* $(V, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real (respectivamente, complexo), munido de um produto interno* $\langle \cdot , \cdot \rangle$ *e* $u, v \in V$.

Então

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right) . \tag{14.70}$$

Prova:

Observemos que

$$\begin{aligned}
\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 &\overset{(14.53)}{=} \langle u+v , u+v\rangle + \langle u-v , u-v\rangle \\
&\overset{(P1),(P2),(P3)\ (\text{ou } (PC1),(PC2),(PC3))}{=} (\langle u , u\rangle + \langle u , v\rangle + \langle v , u\rangle + \langle v , v\rangle) \\
&\quad + (\langle u , u\rangle - \langle u , v\rangle - \langle v , u\rangle + \langle v , v\rangle) \\
&= 2\langle u , u\rangle + 2\langle v , v\rangle \\
&= 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right) ,
\end{aligned}$$

completando a demonstração do resultado.

∎

O próximo resultado nos mostra como podemos obter o produto interno entre dois vetores, a partir das normas da soma e diferença dos respectivos vetores, mais precisamente:

Proposição 14.71 *Sejam* $(V, +, \cdot)$ *um espaço vetorial* <u>real</u>, *munido de um produto interno* $\langle \cdot , \cdot \rangle$ *e* $u, v \in V$.

Então

$$\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = 4\langle u , v\rangle , \tag{14.72}$$

ou, equivalentemente,

$$\langle u , v\rangle = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right) . \tag{14.73}$$

Prova:

Observemos que:

$$\begin{aligned}
\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 &\overset{(14.53)}{=} \langle u+v , u+v\rangle - \langle u-v , u-v\rangle \\
&\overset{(P1),(P2),(P3)}{=} (\langle u , u\rangle + \langle u , v\rangle + \langle v , u\rangle + \langle v , v\rangle) \\
&\quad - (\langle u , u\rangle - \langle u , v\rangle - \langle v , u\rangle + \langle v , v\rangle) \\
&= 4\langle u , v\rangle ,
\end{aligned}$$

completando a demonstração do resultado.

∎

Observação 14.74 *Se considerarmos o espaço vetorial* <u>**complexo**</u> $(V, +, \cdot)$ *munido de um produto interno, teremos a seguinte identidade:*

$$\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = 4\,\mathrm{Re}\left[\langle u , v\rangle\right] . \tag{14.75}$$

A demonstração deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Apliquemos a Proposição (14.71) acima, ao:

Exemplo 14.76 *Sejam* $(V, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real, munido de um produto interno* $\langle \cdot , \cdot \rangle$ *e* $u, v \in V$*, tais que*

$$\|u + v\| = 1 \quad e \quad \|u - v\| = 1\,. \tag{14.77}$$

Calcule $\langle u, v \rangle$.

Resolução:

Da Proposição (14.71) acima temos que

$$\begin{aligned}\langle u, v \rangle &\overset{(14.75)}{=} \frac{1}{4}\left(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2\right)\\ &\overset{(14.77)}{=} 0\,.\end{aligned}$$

□

Observação 14.78 *Podemos ver geometricamente o que ocorre no Exemplo* (14.76) *acima, para o caso de*

$$V = \mathbb{R}^3 \quad ou \quad V = \mathbb{R}^2\,.$$

Neste caso a conclusão do Exemplo (14.76) *acima nos diz que os vetores* $\underline{u}$ *e* $\underline{v}$ *são, do ponto de vista de Geometria Analítica, dois vetores ortogonais.*

14.3 Distância

Definição 14.79 *Seja* $(V, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) munido de um produto interno* $\langle \cdot , \cdot \rangle$.

Definimos a função $d : V \times V \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$d(u, v) \doteq \|u - v\|\,, \quad para\ cada \quad u, v \in V\,, \tag{14.80}$$

que será denominada por **distância do vetor $\underline{u}$ ao vetor $\underline{v}$**.

A função distância, definida acima, satisfaz as seguintes propriedades.

Proposição 14.81 *Seja* $(V, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) munido de um produto interno* $\langle \cdot , \cdot \rangle$ *e* d *a função dada por* (14.80).

Temos que:

1. *para cada* $u, v \in V$*, segue que*
$$d(u, v) \geq 0\,; \tag{14.82}$$

2. *para cada* $u, v \in V$*, temos que*
$$d(u, v) = 0 \quad se,\ e\ somente\ se, \quad u = v\,,; \tag{14.83}$$

3. *para cada* $u, v \in V$, *temos que*

$$d(u, v) = d(v, u); \tag{14.84}$$

4. *para cada* $u, v, w \in V$, *temos que*

$$d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v). \tag{14.85}$$

Prova:

De 1.:

Notemos que, para cada $u, v \in V$, temos que:

$$d(u, v) \overset{(14.80)}{=} \|u - v\| \overset{\text{item 2. da Proposição (14.62)}}{\geq} 0,$$

mostrando a validade da afirmação 1. .

De 2.:

Observemos que, para cada $u, v \in V$, temos que:

$$\begin{aligned}
& d(u, v) = 0 \\
\text{de (14.80), é equivalente à:} \quad & \|u - v\| = 0, \\
\text{isto é, pelo item 3. da Proposição (14.62),} \quad & u - v = O \\
\text{ou seja,} \quad & u = v,
\end{aligned}$$

mostrando a validade de afirmação 2. .

De 3.:

Notemos que, para cada $u, v \in V$, temos que:

$$\begin{aligned}
d(u, v) & \overset{(14.80)}{=} \|u - v\| \\
& = \|(-1) \cdot (v - u)\| \\
& \overset{\text{item 1. da Proposição (14.62)}}{=} \underbrace{|-1|}_{=1} \|v - u\| \\
& = \|v - u\| \\
& \overset{(14.80)}{=} d(v, u),
\end{aligned}$$

mostrando a validade de afirmação 3. .

De 4.:

Observemos que, para cada $u, v, w \in V$, temos que:

$$\begin{aligned}
d(u, v) & \overset{(14.80)}{=} \|u - v\| \\
& = \|u - v + (w - w)\| = \|(u - w) + (v - w)\| \\
& \overset{\text{item 5. da Proposição (14.62)}}{\leq} \|u - w\| + \|v - w\| \\
& \overset{(14.80)}{=} d(u, w) + d(w, v),
\end{aligned}$$

mostrando a validade da afirmação 4. e completando a demonstração do resultado.

∎

Consideremos o:

Exemplo 14.86 *Com relação ao produto interno* (14.19) *do Exemplo* (14.18)*, no caso* $n = 4$*, calcule a distância entre os vetores*

$$u \doteq (1\,,1\,,3\,,2) \quad e \quad v \doteq (2\,,2\,,1\,,0) \tag{14.87}$$

de $\left(\mathbb{R}^4\,,+\,,\cdot\right)$.

Resolução:

Temos

$$\begin{aligned} d(u\,,v) &\overset{(14.80)}{=} \|u - v\| \\ &\overset{(14.87)}{=} \|(1-2\,,1-2\,,3-1\,,2-0)\| \\ &= \|(-1\,,-1\,,2\,,2)\| \\ &\overset{(14.19)}{=} \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 2^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{10}\,. \end{aligned}$$

□

Exemplo 14.88 *Com relação ao produto interno (14.36) do Exemplo* (14.35)*, calcule a distância entre as funções* $\underline{f}$ *e* $\underline{g}$*, onde*

$$f(x) \doteq \operatorname{sen}(x) \quad e \quad g(x) \doteq \cos(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in [0\,,2\,\pi]$$

em $(C([0\,,2\,\pi]\,;\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$.

Resolução:

Notemos que:

$$\begin{aligned} [d(f\,,g)]^2 &\overset{(14.80)}{=} \|f - g\|^2 \\ &\overset{(14.36)}{=} \int_0^{2\,\pi} [f(x) - g(x)]^2\,dx \\ &= \int_0^{2\,\pi} [\operatorname{sen}(x) - \cos(x)]^2\,dx \\ &= \int_0^{2\,\pi} \left[\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) - 2\,\operatorname{sen}(x)\cos(x)\right]\,dx \\ &= \int_0^{2\,\pi} [1 - 2\,\operatorname{sen}(x)\cos(x)]\,dx \\ &\overset{\text{Exercício}}{=} \left[x - \operatorname{sen}^2(x)\right]\Big|_0^{2\,\pi} \\ &= 2\,\pi\,. \end{aligned}$$

Portanto,

$$d(f\,,g) = \sqrt{2\,\pi}\,.$$

□

14.4 Ângulo

Observação 14.89 *Sejam* $(V\,,+\,,\cdot)$ *um espaço vetorial real (respectivamente, complexo), munido de um produto interno* $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ *e* $u\,,v\in V$ *dois vetores* **não nulos**.

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz (veja o item 4. da Proposição (14.62)) temos

$$-\,\|u\|\,\|v\|\leq\langle\,u\,,v\rangle\leq\|u\|\,\|v\|\,. \tag{14.90}$$

Como

$$u\,,v\neq O\,,$$

dos itens 2. e 3. da Proposição (14.62), segue que

$$\|u\|\,,\|v\|>0\,.$$

Logo dividindo-se ambos os membros da desigualdade (14.90) por $(\|u\|\,\|v\|)$, *obteremos:*

$$-\,1\leq\frac{\langle\,u\,,v\rangle}{\|u\|\,\|v\|}\leq 1\,. \tag{14.91}$$

Desta forma, existe um único número real $\theta\in[0\,,\pi]$ *tal que*

$$\cos(\theta)=\frac{\langle u\,,v\rangle}{\|u\|\,\|v\|}\,. \tag{14.92}$$

Com isto podemos introduzir a:

Definição 14.93 *O número real*

$$\theta\in[0\,,\pi]\,,$$

obtido em (14.92), será chamado de **ângulo entre os vetores $\underline{u}$ e $\underline{v}$**.

Observação 14.94 *De (14.92), segue que*

$$\langle u\,,v\rangle=\|u\|\,\|v\|\cos(\theta)\,. \tag{14.95}$$

Apliquemos essas ideias ao:

Exemplo 14.96 *Calcule o ângulo entre as funções* $\underline{f}$ *e* $\underline{g}$, *onde*

$$f(x)\doteq\text{sen}(x)\quad e\quad g(x)\doteq\cos(x)\,,\quad para\ cada\quad x\in[0\,,2\,\pi]\,, \tag{14.97}$$

por meio do produto interno dado por (14.36), do Exemplo (14.35), em $(C([0\,,2\,\pi]\,;\,\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$.

Resolução:

Observemos que

$$\begin{aligned}
\langle f\,,g\rangle &\overset{(14.36)}{=} \int_0^{2\pi} f(x)\,g(x)\,dx \\
&= \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(x)\cos(x)\,dx \\
&\overset{\text{Exercício}}{=} \left[\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2(x)\right]\Big|_{x=0}^{x=2\pi} \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

Desta forma, de (14.92), segue que

$$\cos(\theta) = 0\,, \quad \text{para} \quad \theta \in [0\,,\pi]\,,$$

ou seja, o ângulo entre as funções $\underline{f}$ e $\underline{g}$ será

$$\theta = \frac{\pi}{2}\,.$$

□

Temos também o:

Exemplo 14.98 *Sejam* $(V\,,+\,,\cdot)$ *espaço vetorial real (respectivamente, complexo), munido de um produto interno* $\langle\,\cdot\,,\cdot\rangle$ *e* $u\,,v \in V$*, tais que*

$$\|u\| = \|v\| = 1 \quad e \quad \|u - v\| = 2\,. \tag{14.99}$$

Calcule o ângulo entre os vetores $\underline{u}$ *e* $\underline{v}$*.*

Resolução:

Como

$$\|u\| = \|v\| = 1\,,$$

do item 3. da Proposição (14.62), segue que $\quad u\,,v \neq O\,.$

Logo

$$\begin{aligned}
4 &\overset{\|u-v\| \overset{(14.99)}{=} 2}{=} \|u - v\|^2 \\
&\overset{(14.53)}{=} \langle\,u - v\,,u - v\rangle \\
&= \langle\,u\,,u\rangle - \langle\,u\,,v\rangle - \langle\,v\,,u\rangle + \langle\,v\,,v\rangle \\
&= \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle\,u\,,v\rangle \\
&\overset{\|u\|=\|v\| \overset{(14.99)}{=} 1}{=} 2 - 2\,\langle\,u\,,v\rangle,
\end{aligned}$$

que implicará que

$$\langle u\,,v\rangle = -1\,. \tag{14.100}$$

Portanto

$$\cos(\theta) \overset{(14.92)}{=} \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\,\|v\|} \overset{(14.99)\text{ e }(14.100)}{=} \frac{-1}{1\cdot 1} = -1\,,$$

implicando que

$$\theta = \pi\,,$$

ou seja, o ângulo entre os vetores (não nulos) $\underline{u}$ e $\underline{v}$ será igual a π.

14.5 Ortogonalidade

Definição 14.101 *Sejas* $(V, +, \cdot)$ *espaço vetorial real (respectivamente, complexo) munido de um produto interno* $< \cdot, \cdot >$.

Diremos que os vetores $\underline{u}$ *e* $\underline{v}$ *são* **ortogonais** *em* $(V, +, \cdot)$ *se*

$$\langle u, v\rangle = 0\,. \tag{14.102}$$

Neste caso, escreveremos

$$u \perp v\,.$$

Diremos que um conjunto finito

$$S \doteq \{u_1, u_2, \cdots, u_n\} \subseteq V$$

é um **conjunto ortogonal** *em* $(V, +, \cdot)$*, se*

$$u_i \perp u_j\,, \quad \textit{para cada} \quad i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}, \quad \textit{com} \quad i \neq j\,. \tag{14.103}$$

Diremos que um conjunto ortogonal

$$S \doteq \{u_1, u_2, \cdots, u_n\} \subset V$$

é um **conjunto ortonomal** *em* $(V, +, \cdot)$ *se*

$$\|u_j\| = 1\,, \quad \textit{para cada} \quad j \in \{1, 2, \cdots, n\}, \tag{14.104}$$

ou seja, para cada $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ *temos:*

$$\langle u_i, u_j\rangle = \begin{cases} 1\,, & \textit{se} \quad i = j \\ 0\,, & \textit{se} \quad i \neq j \end{cases}\,. \tag{14.105}$$

Sejam $u \in V$ *e* $S \subseteq V$*, de modo que* $S \neq \emptyset$.

Diremos que o vetor $\underline{u}$ *é* **ortogonal ao conjunto** $\underline{S}$*, se o vetor* $\underline{u}$ *for ortogonal a todos os vetores do conjunto* $\underline{S}$*, isto é,*

$$\langle u, v\rangle = 0\,, \quad \textit{para cada} \quad v \in S\,. \tag{14.106}$$

Neste caso escreveremos

$$u \perp S\,.$$

Apliquemos estas ideias ao:

Exemplo 14.107 *Seja* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real, munido do produto interno* (14.19) *do Exemplo* (14.18) *(com* $n = 3$*).*

Mostre que a base canônica de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$*, isto é,*

$$\mathcal{B} \doteq \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \tag{14.108}$$

é um conjunto ortonormal, relativamente ao produto interno (14.19)*.*

Resolução:

Sejam

$$e_1 \doteq (1, 0, 0), \quad e_2 \doteq (0, 1, 0) \quad \text{e} \quad e_3 \doteq (0, 0, 1). \tag{14.109}$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
\langle e_1, e_1 \rangle &\overset{(14.109)}{=} \langle (1, 0, 0), (1, 0, 0) \rangle \\
&\overset{(14.19),\ \text{com } n=3}{=} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\
&= 1, \\
\langle e_1, e_2 \rangle &\overset{(14.109)}{=} \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle \\
&\overset{(14.19),\ \text{com } n=3}{=} 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\
&= 0, \\
\langle e_1, e_3 \rangle &\overset{(14.109)}{=} \langle (1, 0, 0), (0, 0, 1) \rangle \\
&\overset{(14.19),\ \text{com } n=3}{=} 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\
&= 0, \\
\langle e_2, e_2 \rangle &\overset{(14.109)}{=} \langle (0, 1, 0), (0, 1, 0) \rangle \\
&\overset{(14.19),\ \text{com } n=3}{=} 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\
&= 1, \\
\langle e_2, e_3 \rangle &\overset{(14.109)}{=} \langle (0, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle \\
&\overset{(14.19),\ \text{com } n=3}{=} 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\
&= 0, \\
\langle e_3, e_3 \rangle &\overset{(14.109)}{=} \langle (0, 0, 1), (0, 0, 1) \rangle \\
&\overset{(14.19),\ \text{com } n=3}{=} 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \\
&= 1,
\end{aligned}$$

mostrando que o conjunto $\mathcal{B}$ é um conjunto ortonormal, relativamente ao produto interno (14.19).

□

Observação 14.110

1. *Notemos que se* $(V\,,+\,,\cdot)$ *é um espaço vetorial real (respectivamente, complexo), munido de um produto interno* $\langle\,\cdot\,,\cdot\rangle$ *e*

$$u = O \quad \textit{ou} \quad v = O\,,$$

então deveremos ter

$$u \perp v\,.$$

De fato, pois se, por exemplo, $u = O$*, teremos:*

$$\begin{aligned}\langle\,u\,,v\rangle &= \langle\,O\,,v\rangle\\ &= \langle\,0\cdot v\,,v\rangle\\ &= 0\,\langle\,v\,,v\rangle\\ &= 0\,,\end{aligned}$$

mostrando que

$$u \perp v\,.$$

2. *Na situação acima, se* $u\,,v \neq O$ *então*

$$u \perp v \quad \textit{se, e somente se, o ângulo entre os vetores } \underline{u} \textit{ e } \underline{v} \textit{ é} \quad \theta = \frac{\pi}{2}\,. \tag{14.111}$$

De fato, pois se $\theta \in [0\,,\pi]$ *é o ângulo entre os vetores* $\underline{u}$ *e* $\underline{v}$ *então, de (14.92), segue que*

$$\langle\,u\,,v\,\rangle = \|u\|\,\|v\|\cos(\theta)\,.$$

Logo

$$u \perp v \quad \textit{se, e somente se,} \quad \cos(\theta) = 0\,,$$

ou, equivalentemente,

$$\theta = \frac{\pi}{2}\,,$$

isto é, o ângulo entre os vetores $\underline{u}$ *e* $\underline{v}$ *é* $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

3. *Ainda na situaçao do item 1., se*

$$S = \{u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_n\} \subset V$$

é um conjunto ortogonal com

$$u_j \neq O\,, \quad \textit{para cada} \quad j \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}\,,$$

então o conjunto

$$\overline{S} \doteq \left\{\frac{u_1}{\|u_1\|}\,,\frac{u_2}{\|u_2\|}\,,\cdots\,,\frac{u_n}{\|u_n\|}\right\}$$

será um conjunto ortonormal em $(V, +, \cdot)$.

De fato, pois para cada

$$i, j \in \{1, 2, \cdots, n\},$$

como

$$u_i \neq O, \quad \textit{segue que} \quad \|u_i\| \neq 0,$$

logo

$$\left\langle \frac{u_i}{\|u_i\|}, \frac{u_j}{\|u_j\|} \right\rangle \overset{\textit{propriedade de p.i.}}{=} \frac{1}{\|u_i\|\,\|u_j\|} \langle u_i, u_j \rangle$$
$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\|u_i\|\,\|u_i\|} \langle u_i, u_i \rangle = \dfrac{1}{\|u_i\|\,\|u_i\|} \|u_i\|^2 = 1\,, & \textit{se} \quad j = i \\ 0\,, & \textit{se} \quad i \neq j \end{cases},$$

mostrando que o conjunto $\overline{S}$ *é ortonormal em* $(V, +, \cdot)$.

Temos a:

Proposição 14.112 *Sejam* $(V, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real (respectivamente, complexo) munido de um produto interno* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *e*

$$S = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\} \subseteq V$$

um conjunto ortonormal em $(V, +, \cdot)$.

Então o conjunto $\underline{S}$ *é L.I. em* $(V, +, \cdot)$.

Prova:

Notemos que, se

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R} \text{ (respectivamente, } \mathbb{C})$$

satisfazem

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n = O, \tag{14.113}$$

fazendo o produto interno do vetor acima com o vetor u_1 e lembrando que

$$\begin{aligned} & \langle u_1, u_1 \rangle = \|u_1\|^2 = 1 \\ \text{e} \quad & \langle u_j, u_1 \rangle = 0, \quad \text{para cada} \quad j \in \{2, 3, \cdots, n\}, \end{aligned} \tag{14.114}$$

obteremos:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle O, u_1 \rangle \\ &\overset{(14.113)}{=} \langle \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n, u_1 \rangle \\ &= \alpha_1 \underbrace{\langle u_1, u_1 \rangle}_{\overset{(14.114)}{=} 1} + \alpha_2 \underbrace{\langle u_1, u_2 \rangle}_{\overset{(14.114)}{=} 0} + \cdots + \alpha_n \underbrace{\langle u_n, u_1 \rangle}_{\overset{(14.114)}{=} 0} \\ &= \alpha_1, \end{aligned}$$

$$\text{isto é,} \quad \alpha_1 = 0. \tag{14.115}$$

Logo (14.113), tornar-se-á:

$$\alpha_2 \cdot u_2 + \alpha_3 \cdot u_3 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n = 0 . \tag{14.116}$$

Tomando o produto interno do vetor acima com u_2, obtemos,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle O , u_2 \rangle \\ &\overset{(14.116)}{=} \langle \alpha_2 \cdot u_2 + \alpha_3 \cdot u_3 \cdots + \alpha_n \cdot u_n , u_2 \rangle \\ &= \alpha_2 \underbrace{\langle u_2 , u_2 \rangle}_{\overset{(14.114)}{=} 1} + \alpha_3 \underbrace{\langle u_3 , u_2 \rangle}_{\overset{(14.114)}{=} 0} + \cdots + \alpha_n \underbrace{\langle u_n , u_2 \rangle}_{\overset{(14.114)}{=} 0} \\ &= \alpha_2 , \end{aligned}$$

isto é, $$\alpha_2 = 0 . \tag{14.117}$$

Repetindo o processo acima com os vetores u_j, para $j \in \{3 , 4 , \cdots , n\}$ (ou seja, por indução), chegaremos à conclusão que a única possibilidade para (14.113) será

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0 ,$$

ou seja, os vetores $u_1 , u_2 , \cdots , u_n$ são L.I. em $(V , + , \cdot)$, completando a demonstração do resultado.

∎

Observação 14.118

1. *A Proposição (14.112) acima, continua válida se o conjunto $\underline{S}$ for apenas um conjunto ortogonal, formado por vetores* **<u>não nulos</u>**.

   Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

2. *Se o espaço vetorial real (ou compexo) $(V , + , \cdot)$, munido de um produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$, tem dimensão $\underline{n}$ então, pela Proposição (14.112) acima, um conjunto ortonormal $\underline{S}$ de $(V , + , \cdot)$ que tenha $\underline{n}$ elementos será uma base de V (pois o conjunto $\underline{S}$ será L.I. em $(V , + , \cdot)$, que tem dimensão $\underline{n}$).*

Isto nos motiva a introduzir a:

Definição 14.119 *Seja $(V , + , \cdot)$ é um espaço vetorial real (respectivamente, complexo), munido de um produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$, de dimensão $\underline{n}$.*

Diremos que o conjunto

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1 , u_2 , \cdots , u_n\}$$

é uma **base ortonormal de** $(V , + , \cdot)$, *se o conjunto $\mathcal{B}$ for um conjunto ortonormal em $(V , + , \cdot)$, segundo o produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$.*

Com isto temos a:

Proposição 14.120 *Sejam* $(V, +, \cdot)$ *é um espaço vetorial real (respectivamente, complexo), munido de um produto interno* $\langle \cdot, \cdot \rangle$, *de dimensão* $\underline{n}$,

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$$

uma base ortonormal de $(V, +, \cdot)$ *e* $u \in V$.

Então

$$u = \langle u, u_1 \rangle \cdot u_1 + \langle u, u_2 \rangle \cdot u_2 + \cdots + \langle u, u_n \rangle \cdot u_n, \tag{14.121}$$

ou seja, os coeficientes, quando escrevemos o vetor u *como combinação linear dos vetores da base ortonormal* $\mathcal{B}$, *serão dados pelos coeficientes em* (14.121).

Prova:

Como o conjunto

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$$

é uma base de $(V, +, \cdot)$, existem

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad \text{(respectivamente, } \mathbb{C}),$$

tais que

$$u = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n. \tag{14.122}$$

Logo, tomando-se o produto interno do vetor $\underline{u}$ com o vetor $\underline{u_1}$, obteremos:

$$\begin{aligned}
\langle u, u_1 \rangle &\overset{(14.122)}{=} \langle \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 \cdots + \alpha_n \cdot u_n, u_1 \rangle \\
&\overset{\text{propriedades do p.i.}}{=} \alpha_1 \underbrace{\langle u_1, u_1 \rangle}_{\mathcal{B} \text{ é base ortonormal } 1} + \alpha_2 \underbrace{\langle u_2, u_1 \rangle}_{\mathcal{B} \text{ é base ortonormal } 0} + \cdots + \alpha_n \underbrace{\langle u_n, u_1 \rangle}_{\mathcal{B} \text{ é base ortonormal } 0} \\
&= \alpha_1,
\end{aligned} \tag{14.123}$$

pois a base $\mathcal{B}$ é ortonormal.

Com isto, teremos

$$\alpha_1 = \langle u, u_1 \rangle.$$

Para cada $j \in \{2, 3, \cdots, n\}$ temos, de modo análogo, que

$$\begin{aligned}
\langle u, u_j \rangle &\overset{(14.122)}{=} \langle \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_{j-1} \cdot u_{j-1} + \alpha_j \cdot u_j + \alpha_{j+1} \cdot u_{j+1} + \cdots + \alpha_n \cdot u_n, u_j \rangle \\
&\overset{\text{prop. de p.i.}}{=} \alpha_1 \underbrace{\langle u_1, u_j \rangle}_{\mathcal{B} \text{ é ortonormal } 0} + \cdots + \alpha_{j-1} \underbrace{\langle u_{j-1}, u_j \rangle}_{\mathcal{B} \text{ é ortonormal } 0} + \alpha_j \underbrace{\langle u_j, u_j \rangle}_{\mathcal{B} \text{ é ortonormal } 1} + \alpha_{j+1} \underbrace{\langle u_{j+1}, u_j \rangle}_{\mathcal{B} \text{ é ortonormal } 0} \\
&\quad + \cdots + \alpha_n \underbrace{\langle u_n, u_j \rangle}_{\mathcal{B} \text{ é ortonormal } 0} \\
&= \alpha_j,
\end{aligned} \tag{14.124}$$

pois a base $\mathcal{B}$ é um conjunto ortonormal, mostrando que

$$\alpha_j = \langle u, u_j \rangle.$$

Substituindo em (14.123), (14.124) em (14.122), teremos

$$u = \langle u, u_1 \rangle \cdot u_1 + \langle u, u_2 \rangle \cdot u_2 + \cdots + \langle u, u_n \rangle \cdot u_n \,,$$

completando a demonstração do resultado.

∎

Observação 14.125

1. *Na situação do resultado acima, para cada $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, o vetor*

$$\langle u, u_j \rangle \cdot u_j \tag{14.126}$$

será denominado **projeção ortogonal do vetor u na direção do vetor u_j** .

2. *Mais geralmente, se $v \in V$ é um* **vetor unitário** *(isto é, $\|v\| = 1$) então o vetor*

$$\langle u, v \rangle \cdot v \tag{14.127}$$

será denominado **projeção ortogonal do vetor u na direção do vetor v**.

3. *Notemos que, se $v \in V$ é não nulo (ou seja, $\|v\| \neq 0$) então*

$$\frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2} \cdot v \,, \tag{14.128}$$

será a projeção ortogonal do vetor u, na direção do vetor $\dfrac{v}{\|v\|}$.

Apliquemos o resultado acima ao:

Exemplo 14.129 *Seja $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ espaço vetorial real munido do produto interno (14.19) (com $n = 2$).*

Encontre as coordenadas e a matriz das coordenadas do vetor

$$u \doteq (1, 1) \in \mathbb{R}^2 \,, \tag{14.130}$$

em relação à base

$$\mathcal{B} \doteq \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\} \tag{14.131}$$

de $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

Resolução:

Sejam

$$u_1 \doteq \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \quad \text{e} \quad u_2 \doteq \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right). \tag{14.132}$$

Observemos que o conjunto $\mathcal{B}$ é uma base ortonormal de $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

De fato, pois:

$$
\begin{aligned}
\langle u_1 , u_1 \rangle &\overset{(14.132)}{=} \left\langle \left(\frac{\sqrt{2}}{2} , \frac{\sqrt{2}}{2} \right) , \left(\frac{\sqrt{2}}{2} , \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\rangle \\
&\overset{(14.19) \text{ com } n=2}{=} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
&= 1 , \\
\langle u_1 , u_2 \rangle &\overset{(14.132)}{=} \left\langle \left(\frac{\sqrt{2}}{2} , \frac{\sqrt{2}}{2} \right) , \left(\frac{\sqrt{2}}{2} , -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\rangle \\
&\overset{(14.19) \text{ com } n=2}{=} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\
&= 0 , \\
\langle u_2 , u_2 \rangle &\overset{(14.132)}{=} \left\langle \left(\frac{\sqrt{2}}{2} , -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) , \left(\frac{\sqrt{2}}{2} , -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\rangle \\
&\overset{(14.19) \text{ com } n=2}{=} \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
&= 1 .
\end{aligned}
$$

Como o conjunto $\mathcal{B}$ é uma base ortonormal de $\left(\mathbb{R}^2 , + , \cdot\right)$, pela Proposição (14.120) acima, segue que:

$$
\begin{aligned}
u &\overset{(14.121)}{=} \langle u , u_1 \rangle \cdot u_1 + \langle u , u_2 \rangle \cdot u_2 \\
&\overset{(14.130) \text{ e } (14.132)}{=} \left\langle (1 , 1) , \left(\frac{\sqrt{2}}{2} , \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\rangle \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} , \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \left\langle (1 , 1) , \left(\frac{\sqrt{2}}{2} , -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\rangle \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} , -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\
&\overset{(14.19) \text{ com } n=2}{=} \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} , \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + 0 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} , -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) .
\end{aligned}
$$

Desta forma a matriz coordenadas do vetor

$$u = (1 , 1) ,$$

em relação à base $\mathcal{B}$ de $\left(\mathbb{R}^2 , + , \cdot\right)$, será dada por:

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} .$$

□

Temos também a:

Proposição 14.133 *Sejam $(V\,,+\,,\cdot)$ é um espaço vetorial real (respectivamente, complexo), munido de um produto interno $\langle\,\cdot\,,\cdot\rangle$ e*

$$U=[S] \tag{14.134}$$

o subespaço gerado por um conjunto ortonormal

$$S\doteq\{u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_n\}\subseteq V\,. \tag{14.135}$$

Então, se $u\in V$, temos que o vetor $v\in V$, dado por

$$v\doteq u-\langle\,u\,,u_1\rangle\cdot u_1-\langle\,u\,,u_2\rangle\cdot u_2-\cdots-\langle\,u\,,u_n\rangle\cdot u_n \tag{14.136}$$

é um vetor ortogonal a todo vetor $w\in U$, isto é,

$$v\perp U\,.$$

Em particular,

$$v=O$$

se, e somente se, $$u=\langle\,u\,,u_1\rangle\cdot u_1+\langle\,u\,,u_2\rangle\cdot u_2+\cdots+\langle u\,,u_n\rangle\cdot u_n, \tag{14.137}$$

ou seja, $$u\in U=[u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_n]\,. \tag{14.138}$$

Prova:

Seja $w\in U$.

Como o conjunto S é um conjunto ortonormal de $(V\,,+\,,\cdot)$, segue que, para cada $i\,,j\in\{1\,,2\,,\cdots\,,n\}$, teremos

$$\langle\,u_i\,,u_j\rangle=\begin{cases}1\,, & \text{para} \quad i=j\\ 0\,, & \text{para} \quad i\neq j\end{cases}\,. \tag{14.139}$$

Como o conjunto S é um conjunto ortonormal de $(V\,,+\,,\cdot)$, e gera U, pela Proposição (14.112), segue que o conjunto S será uma base para o subespaço vetorial U, de $(V\,,+\,,\cdot)$ (pois os elementos do conjunto S deverão ser L.I. em $(V\,,+\,,\cdot)$).

Logo, existem escalares

$$\alpha_1\,,\alpha_2\,,\cdots\,,\alpha_n\in\mathbb{R}\ \text{(respectivamente, } \mathbb{C})\,,$$

tais que

$$w=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\cdot u_j\,. \tag{14.140}$$

Para mostrar que $v\perp U$, precisaremos mostrar que

$$\langle\,v\,,w\rangle=0\,. \tag{14.141}$$

Observemos que

$$\langle v\,,w\rangle = \left\langle v\,,\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\cdot u_j\right\rangle \overset{\text{propriedades de p.i. real}}{=} \sum_{j=1}^{n}\alpha_j\,\langle\, v\,,u_j\rangle\,. \tag{14.142}$$

Portanto, da identidade acima, para mostrar (14.141), basta mostrar que

$$\langle v\,,u_j\rangle = 0\,,\quad \text{para cada}\quad j\in\{1\,,2\,,\cdots,n\}\,. \tag{14.143}$$

Como o conjunto $S=\{u_1\,,u_2\,,\cdots,u_n\}$ é um conjunto ortonormal em $(V\,,+\,,\cdot)$, para cada $j\in\{1\,,2\,,\cdots,n\}$, temos que:

$$\begin{aligned}
\langle\, v\,,u_j\rangle &\overset{(14.136)}{=} \langle\,[u-\langle\, u\,,u_1\rangle\cdots-\langle\, u\,,u_j\rangle-\cdot u_j-\cdots-\langle\, u\,,u_n\rangle\cdot u_n]\,,u_j\rangle\\
&\overset{\text{propriedades de p.i.}}{=} \langle\, u\,,u_j\rangle-\langle\, u\,,u_1\rangle\,\langle\, u_1\,,u_j\rangle-\cdots-\langle\, u\,,u_j\rangle\,\langle\, u_j\,,u_j\rangle-\cdots-\langle\, u\,,u_n\rangle\,\langle\, u_n\,,u_j\rangle\\
&\overset{\langle u_i\,,u_j\rangle=0,\ \text{se}\ i\neq j}{=} \langle\, u\,,u_j\rangle-\langle\, u\,,u_j\rangle\,\underbrace{\langle\, u_j\,,u_j\rangle}_{\overset{(14.139)}{=}1}\\
&= \langle\, u_j\,,u\rangle-\langle\, u\,,u_j\rangle\\
&= 0\,,
\end{aligned}$$

completando a demonstração do resultado.

∎

Observação 14.144 *Observemos que, se o produto interno, no resultado acima, for complexo, então* (14.142) *tornar-se-á:*

$$\langle\, v\,,w\rangle = \left\langle v\,,\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\cdot u_j\right\rangle \overset{\textit{propriedades de p.i. complexo}}{=} \sum_{j=1}^{n}\overline{\alpha_j}\,\langle\, v\,,u_j\rangle\,,$$

e podemos continuar os mesmos passos da demonstração acima.

17.11.2015 - 27.a

Temos também a:

Proposição 14.145 *Sejam* $(V\,,+\,,\cdot)$ *é um espaço vetorial real (respectivamente, complexo), munido de um produto interno* $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle$ *e* U *um subespaço vetorial de* $(V\,,+\,,\cdot)$.

Se

$$u\in U \quad e \quad u\perp U\,,\quad \textit{deveremos ter}\quad u=O\,.$$

Prova:

Como $u \in U$ e, por hipótese, o vetor $\underline{u}$ é ortogonal a todo vetor de U, deveremos ter, em particular, que

$$u \perp u \quad (\text{pois } u \in U)\,.$$

Assim, teremos:

$$\|u\|^2 = \langle u\,, u\rangle \stackrel{u \perp u}{=} 0\,,$$

$$\text{ou seja,} \qquad \|u\| = 0\,,$$

que, pelas propriedades de norma, implicará que

$$u = O\,,$$

completando a demosntração do resultado.

∎

Como consequência temos a

Proposição 14.146 *Sejam $(V\,,+\,,\cdot)$ é um espaço vetorial real (respectivamente, complexo), munido de um produto interno $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$,*

$$S \doteq \{u_1\,, u_2\,, \cdots\,, u_n\} \quad e \quad R \doteq \{v_1\,, v_2\,, \cdots\,, v_n\}$$

conjuntos ortonormais em $(V\,,+\,,\cdot)$, tais que

$$[S] = [R]\,.$$

Então, para cada $u \in V$, temos

$$\langle u\,, u_1\rangle \cdot u_1 + \cdots + \langle u\,, u_n\rangle \cdot u_n = \langle u\,, v_1\rangle \cdot v_1 + \cdots + \langle u\,, v_n\rangle \cdot v_n\,. \tag{14.147}$$

Prova:

De fato, se $u \in V$, definamos

$$U \doteq [R] = [S]\,, \tag{14.148}$$

$$w_1 \doteq u - [\langle u\,, u_1\rangle \cdot u_1 + \cdots + \langle u\,, u_n\rangle \cdot u_n]\,, \tag{14.149}$$

$$\text{e} \qquad w_2 \doteq u - [\langle u\,, v_1\rangle \cdot v_1 + \cdots + \langle u\,, v_n\rangle \cdot v_n]\,. \tag{14.150}$$

Pela Proposição (14.133), segue que

$$w_1\,, w_2 \perp U\,. \tag{14.151}$$

Logo, se $w \in U$, temos que:

$$\langle w_1 - w_2\,, w\rangle = \underbrace{\langle w_1\,, w\rangle}_{\stackrel{(14.151)}{=} 0} - \underbrace{\langle w_2\,, w\rangle}_{\stackrel{(14.151)}{=} 0} = 0\,,$$

$$\text{isto é,} \qquad (w_1 - w_2) \perp U\,. \tag{14.152}$$

Notemos também que:

$$w_1 - w_2 \overset{(14.149) \text{ e } (14.150)}{=} \langle u, v_1 \rangle \cdot v_1 + \cdots + \langle u, v_n \rangle \cdot v_n \\ - [\langle u, u_1 \rangle \cdot u_1 + \cdots + \langle u, u_n \rangle \cdot u_n] \in U. \quad (14.153)$$

Portanto, de (14.152), (14.153) e da da Proposição (14.145), segue que

$$w_1 - w_2 = O,$$

isto é,

$$\langle u, u_1 \rangle \cdot u_1 + \cdots + \langle u, u_n \rangle \cdot u_n = \langle u, v_1 \rangle \cdot v_1 + \cdots + \langle u, v_n \rangle \cdot v_n,$$

completando a demonstração do resultado.

∎

Podemos agora introduzir a:

Definição 14.154 *Sejam* $(V, +, \cdot)$ *é um espaço vetorial real (respectivamente, complexo), munido de um produto interno* $\langle \cdot, \cdot \rangle$,

$$S \doteq \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$$

um conjunto ortonormal em $(V, +, \cdot)$,

$$U \doteq [u_1, u_2, \cdots, u_n]$$

e $u \in V$.

O vetor $w \in V$ *dado por*

$$w \doteq \langle u, u_1 \rangle \cdot u_1 + \cdots + \langle u, u_n \rangle \cdot u_n, \quad (14.155)$$

será chamado de **projeção ortogonal do vetor $\underline{u}$ sobre o subespaço vetorial U.**

Observação 14.156 *Se* $(V, +, \cdot)$ *é um espaço vetorial real (respectivamente, complexo), munido de um produto interno* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *e* $v \in V$ *é um vetor, não nulo.*

Então

$$S \doteq \left\{ \frac{v}{\|v\|} \right\}$$

é um conjunto ortonormal em $(V, +, \cdot)$.

Assim, da Definição (14.154), temos que, se $u \in V$, *a projeção ortogonal do vetor* $\underline{u}$ *sobre o subespaço vetorial* $[S]$ *será o vetor*

$$w \doteq \left\langle u, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle \cdot \frac{v}{\|v\|} \\ = \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2} \cdot v,$$

como vimos no item 3. Observação (14.125).

Neste caso, por abuso de, diremos que o vetor $\underline{w}$ *é chamado de* **projeção ortogonal do vetor $\underline{u}$ na direção do vetor v.**

Notemos que o vetor não nulo $\underline{v}$ *não é, necessariamente, unitário mas o vetor* $\dfrac{v}{\|v\|}$ *é unitário em* $(V, +, \cdot)$ *(veja da Observação (14.125)).*

Apliquemos estas idéias ao:

Exemplo 14.157 *Considere o espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, *munido do produto interno* (14.19) *(com* $n = 3$*).*

Verifique se o conjunto

$$S = [u_1, u_2] \tag{14.158}$$

é um subconjunto ortonormal em $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, *onde*

$$u_1 \doteq \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad e \quad u_2 \doteq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right). \tag{14.159}$$

Caso seja, encontre a projeção ortogonal do vetor

$$u \doteq (2, 3, 1) \tag{14.160}$$

sobre o subespaço gerado pelos vetores $\underline{u_1}$ *e* $\underline{u_2}$.

Resolução:

Notemos que

$$\begin{aligned}
\langle u_1, u_1\rangle &\overset{(14.159)}{=} \left\langle \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\rangle \\
&\overset{(14.19)\ \text{com}\ n=3}{=} \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \\
&= 1, \\
\langle u_1, u_2\rangle &\overset{(14.159)}{=} \left\langle \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)\right\rangle \\
&\overset{(14.19)\ \text{com}\ n=3}{=} \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 0 \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + 0 \\
&= 0, \\
\langle u_2, u_2\rangle &\overset{(14.159)}{=} \left\langle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)\right\rangle \\
&\overset{(14.19)\ \text{com}\ n=3}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 \cdot 0 \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
&= 1,
\end{aligned}$$

ou seja, o conjunto

$$S \doteq \{u_1, u_2\}$$

é um subconjunto ortonormal em $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, munido do produto interno (14.19) (com $n = 3$)..

Logo, da Definição (14.154), a projeção ortogonal do vetor

$$u \doteq (2\,,3\,,1)$$

sobre o subespaço vetorial

$$[u_1\,,u_2]\,,$$

será o vetor $\underline{w}$, dado por:

$$\begin{aligned}
w &\overset{(14.155)}{=} \langle\, u\,,u_1 \rangle \cdot u_1 + \langle\, u\,,u_2 \rangle \cdot u_2 \\
&\overset{(14.159)\text{ e }(14.160)}{=} \left\langle (2\,,3\,,1)\,,\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\,,-\frac{1}{\sqrt{3}}\,,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\rangle \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\,,-\frac{1}{\sqrt{3}}\,,\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\
&\quad + \left\langle (2\,,3\,,1)\,,\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\frac{1}{\sqrt{2}}\,,0\right)\right\rangle \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\frac{1}{\sqrt{2}}\,,0\right) \\
&\overset{\text{Exercicio}}{=} \left(\frac{5}{2}\,,\frac{5}{2}\,,0\right)\,.
\end{aligned}$$

□

Podemos aplicar as idéias acima ao:

Exemplo 14.161 *Considere o espaço vetorial real $(\mathscr{P}_3(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$, munido do produto interno dado por*

$$\langle\, p\,,q \rangle \doteq \int_0^1 p(x)\,q(x)\,dx\,, \quad \textit{para cada} \quad p\,,q \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})\,. \tag{14.162}$$

Encontre a projeção do vetor $p \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$, dado por

$$p(x) \doteq 1 + x + x^2 + x^3\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,, \tag{14.163}$$

sobre o subespaço vetorial gerado pelo vetor $\underline{q}$, onde

$$q(x) \doteq x^3 - x\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{14.164}$$

Resolução:

Observemos que

$$\begin{aligned}
\|q\|^2 &= \langle\, q\,,q \rangle \\
&\overset{(14.162)}{=} \int_0^1 q^2(x)\,dx \\
&\overset{(14.164)}{=} \int_0^1 \left(x^3 - x\right)^2\,dx \\
&= \int_0^1 \left(x^6 + x^2 - 2x^4\right)\,dx \\
&= \left[\frac{x^7}{7} + \frac{x^3}{3} - \frac{2x^5}{5}\right]\Bigg|_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{1}{7} + \frac{1}{3} - \frac{2}{5} \\
&\overset{\text{Exercício}}{=} \frac{8}{105}\,,
\end{aligned} \tag{14.165}$$

logo $q \neq O$ e não é unitário.

Além disso, temos:

$$\begin{aligned}
\langle p, q\rangle &\overset{(14.162)}{=} \int_0^1 p(x)\, q(x)\, dx \\
&\overset{(14.164)}{=} \int_0^1 \left(1 + x + x^2 + x^3\right)\left(x^3 - x\right)\, dx \\
&= \int_0^1 \left(-x - x^2 + x^5 + x^6\right)\, dx \\
&= \left[-\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7}\right]\Bigg|_{x=0}^{x=1} \\
&\overset{\text{Exercício}}{=} -\frac{11}{21}\,.
\end{aligned} \tag{14.166}$$

Assim, da Definição (14.154), a projeção ortogonal do vetor $\underline{p}$ sobre o subespaço vetorial gerado pelo vetor $\underline{q}$, será o vetor $r \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$, dado por:

$$\begin{aligned}
r(x) &\overset{(14.155)}{=} \frac{\langle p, q\rangle}{\|q\|^2} \cdot q(x) \\
&\overset{(14.164),(14.165)\text{ e }(14.166)}{=} -\frac{\frac{11}{21}}{\frac{8}{105}}\left(x^3 - x\right) \\
&\overset{\text{Exercício}}{=} -\frac{55}{8}\left(x^3 - x\right), \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

□

14.6 Operador Autoadjunto

Definição 14.167 *Sejam $(U, +, \cdot)$ um espaço vetorial* **real**, *munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot\rangle$ e $T \in \mathcal{L}(U)$.*

Diremos que o operador linear $\underline{T}$ é um **operador autoadjunto em U**, *se*

$$\langle T(u), v\rangle = \langle u, T(v)\rangle\,, \tag{14.168}$$

para cada $u, v \in U$.

Com isto temos o:

Exemplo 14.169 *Sejam $\left(\mathbb{R}^2, +, \cdot\right)$ espaço vetorial real, munido do produto interno (14.19) (com $n = 2$) e a aplicação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por*

$$T(x, y) \doteq (a\,x + b\,y, b\,x + c\,y)\,, \quad \textit{para cada} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2\,. \tag{14.170}$$

Mostre que $T \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2\right)$ e é um operador autoadjunto em $\left(\mathbb{R}^2, +, \cdot\right)$.

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação que $T \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2\right)$.

Mostremos que ele é autoadjunto.

Para isto, sejam $(x\,,y)\,,(z\,,t) \in \mathbb{R}^2$, e notemos que:

$$\begin{aligned}
\langle T(x\,,y)\,,(z\,,t)\rangle &\overset{(14.170)}{=} \langle\,(a\,x+b\,y\,,b\,x+c\,y)\,,(z\,,t)\rangle \\
&\overset{(14.19)}{=} a\,x\,z+b\,y\,z+b\,x\,t+c\,y\,t\,.
\end{aligned} \tag{14.171}$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}
\langle\,(x\,,y)\,,T(z\,,t)\rangle &\overset{(14.170)}{=} \langle(x\,,y)\,,(a\,z+b\,t\,,b\,z+c\,t)\rangle \\
&\overset{(14.19)}{=} a\,x\,z+b\,x\,t+b\,y\,z+c\,y\,t\,.
\end{aligned} \tag{14.172}$$

De (14.171) e (14.172), segue que

$$\langle\,T(x\,,y)\,,(z\,,t)\rangle \overset{(14.171)\text{ e }(14.172)}{=} \langle\,(x\,,y)\,,T(z\,,t)\rangle\,,$$

mostrando que o operador linear $\underline{T}$ é um operador autoadjunto em $\left(\mathbb{R}^2\,,+\,,\cdot\right)$.

Observação 14.173 *Encontremos a matriz do operador linear do Exemplo (14.169) acima, com relação à base ortonormal (base canônica)*

$$\mathcal{B} \doteq \{(1\,,0)\,,(0\,,1)\}$$

de $\left(\mathbb{R}^2,+,\cdot\right)$

Para isto temos que

$$\begin{aligned}
T(1\,,0) &\overset{(14.170)}{=} (a\cdot 1+b\cdot 0\,,b\cdot 1+c\cdot 0) \\
&= (a\,,b) \\
&= a\cdot(1\,,0)+b\cdot(0\,,1)\,, \\
T(0\,,1) &\overset{(14.170)}{=} (a\cdot 0+b\cdot 1\,,b\cdot 0+c\cdot 1) \\
&= (b\,,c) \\
&= b\cdot(1\,,0)+c\cdot(0\,,1)\,.
\end{aligned}$$

Assim, temos que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Notemos que a matriz acima é uma **matriz simétrica**, *pois*

$$[T]_{\mathcal{B}}{}^t = [T]_{\mathcal{B}}\,.$$

Isto, como vermos no próximo resultado, **não** *é uma simples coincidência.*

Temos o:

Teorema 14.174 *Seja $(U,+,\cdot)$ um espaço vetorial real, munido de um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ de dimensão finita e $T\in\mathcal{L}(U)$.*

O operador linear $\underline{T}$ será um operador autoadjunto em $(U,+,\cdot)$ **se, e somente se,** *a matriz do operador linear $\underline{T}$, em relação a uma base ortonormal de $(U,+,\cdot)$ for uma matriz simétrica.*

Prova:

Sejam

$$\mathcal{B}\doteq\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$$

uma base ortonormal e $A=(a_{ij})$ a matriz do operador linear $\underline{T}$, em relação à base $\mathcal{B}$ de $(U,+,\cdot)$, isto é,

$$[T]_{\mathcal{B}}=(a_{ij})\,. \tag{14.175}$$

Com isto, de (14.175), segue que, para cada $k\in\{1,2,\cdots,n\}$, temos:

$$\begin{aligned} T(u_k)&=a_{1k}\cdot u_1+a_{2k}\cdot u_2+\cdots+a_{nk}\cdot u_n\\ &=\sum_{m=1}^{n}a_{mk}\cdot u_m\,. \end{aligned} \tag{14.176}$$

Logo

$$\begin{aligned} \langle T(u_i),u_j\rangle &\overset{(14.176)\text{ com } k=i}{=}\left\langle\sum_{m=1}^{n}a_{mi}\cdot u_m,u_j\right\rangle\\ &\overset{\text{Propriedades de p.i.}}{=}\sum_{m=1}^{n}a_{mi}\underbrace{\langle u_m,u_j\rangle}_{\overset{\text{base ortonormal}}{=}\begin{cases}1, & \text{para } m=j\\ 0, & \text{para } m\neq j\end{cases}}\\ &=a_{ji}\,. \end{aligned} \tag{14.177}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \langle u_i,T(u_j)\rangle &\overset{(14.176)\text{ com } k=j}{=}\left\langle u_i,\sum_{m=1}^{n}a_{mj}\cdot u_m\right\rangle\\ &\overset{\text{Propriedades de p.i.}}{=}\sum_{m=1}^{n}a_{mj}\underbrace{\langle u_i,u_m\rangle}_{\overset{\text{base ortonormal}}{=}\begin{cases}1, & \text{para } m=i\\ 0, & \text{para } m\neq i\end{cases}}\\ &=a_{ij}. \end{aligned} \tag{14.178}$$

Suponha que o operador linear $\underline{T}$, seja um operador autoadjunto em $(U,+,\cdot)$.
Logo, de (14.177) e (14.178), segue que

$$a_{ij}=a_{ji}\,,\quad\text{para cada}\quad i,j\in\{1,2,\cdots,n\},$$

ou seja, a matriz do operador linear $\underline{T}$, em relação à base ortonormal $\mathcal{B}$, é uma matriz simétrica.

Reciprocamente, suponha que a matriz do operador linear $\underline{T}$, em relação à base ortonormal $\mathcal{B} \doteq \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ de $(U, +, \cdot)$, seja uma matriz simétrica, isto é,

$$[T]_{\mathcal{B}}^t = [T]_{\mathcal{B}} . \tag{14.179}$$

Devemos mostrar que

$$\langle T(u), v\rangle = \langle u, T(v)\rangle , \quad \text{para cada} \qquad u, v \in U . \tag{14.180}$$

Como $u, v \in U$ e $\mathcal{B}$ é uma base de $(U, +, \cdot)$, segue que existem escalares

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n \in \mathbb{R},$$

tais que

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n \\ &= \sum_{m=1}^{n} \alpha_m \cdot u_m , \\ v &= \beta_1 \cdot u_1 + \cdots + \beta_n \cdot u_n \\ &= \sum_{k=1}^{n} \beta_k \cdot u_k . \end{aligned} \tag{14.181}$$

Então, como o produto interno (real!) é linear em cada uma de suas entradas e a base $\mathcal{B}$ é um base ortonormal de $(U, +, \cdot)$, teremos:

$$\begin{aligned} \langle T(u), v\rangle &\overset{(14.181)}{=} \left\langle T\left(\sum_{m=1}^{n} \alpha_m \cdot u_m\right), v\right\rangle \\ &\overset{\text{T é operador linear}}{=} \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_m \cdot T(u_m), v\right\rangle \\ &\overset{(14.181)}{=} \left\langle \sum_{m=1}^{n} \alpha_m \cdot T(u_m), \sum_{k=1}^{n} \beta_k \cdot u_k\right\rangle \\ &\overset{\text{Propriedades de p.i.}}{=} \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_m \, \beta_k \, \langle T(u_m), u_k\rangle . \end{aligned} \tag{14.182}$$

Analogamente, teremos:

$$\begin{aligned}
\langle u\,,T(v)\rangle &\overset{(14.181)}{=} \left\langle u\,,T\left(\sum_{k=1}^{n}\beta_k\cdot u_k\right)\right\rangle \\
&\overset{\text{T é operador linear}}{=} \left\langle u\,,\sum_{k=1}^{n}\beta_k\cdot T(u_k)\right\rangle \\
&\overset{(14.181)}{=} \left\langle \sum_{m=1}^{n}\alpha_m\cdot u_m\,,\sum_{k=1}^{n}\beta_k\cdot T(u_k)\right\rangle \\
&\overset{\text{Propriedades de p.i.}}{=} \sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_m\beta_k\,\langle u_m\,,T(u_k)\rangle\,.
\end{aligned} \tag{14.183}$$

Logo, de (14.182) e (14.183), segue que, para verificar a validade da identidade (14.180), basta mostrar que

$$\langle T(u_m)\,,u_k\rangle = \langle u_m\,,T(u_k)\rangle\,, \quad \text{para cada} \qquad m\,,k\in\{1\,,2\,,\cdots\,,n\}\,.$$

Se a matriz (a_{ij}) é a matriz do operador linear $\underline{T}$ em relação a esta base, isto é

$$(a_{ij}) \doteq [T]_{\mathcal{B}}\,,$$

então, por hipótese, ela é uma matriz simétrica.

Logo, de (14.177) e (14.178), segue que

$$\begin{aligned}
\langle T(u_i)\,,u_j\rangle &\overset{(14.177)}{=} a_{ij} \\
&\overset{\text{matriz simétrica}}{=} a_{ji} \\
&\overset{(14.177)}{=} \langle u_i\,,T(u_j)\rangle\,,
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar, completando a demonstração do resultado.

∎

Com isto temos o:

Teorema 14.184 *Sejam* $(U\,,+\,,\cdot)$ *um espaço vetorial real, munido de um produto interno* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *e* $T\in\mathcal{L}(U)$.

Se o operador linear T *é autoadjunto e* λ,μ *são autovalores distintos de* $\underline{T}$, *então os autovetores do operador linear* $\underline{T}$, *correspondentes aos respectivos autovalores, serão ortogonais, isto é, se existem* $u\,,v\in U$ *e* $\lambda\,,\beta\in\mathbb{R}$ *tais que*

$$T(u)=\lambda\cdot u \quad e \quad T(v)=\beta\cdot v\,, \tag{14.185}$$

com

$$\lambda\neq\beta\,, \tag{14.186}$$

então

$$u\perp v\,. \tag{14.187}$$

Prova:

Sejam $u, v \in U$, autovetores correspondentes aos autovalores $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, respectivamente, isto é, (14.158).

Com isto temos

$$
\begin{aligned}
(\lambda - \mu)\langle u, v\rangle &\overset{\text{Propriedades de p.i. real}}{=} \langle \lambda \cdot u, v\rangle - \langle u, \mu \cdot v\rangle \\
&\overset{(14.185)}{=} \langle T(u), v\rangle - \langle u, T(v)\rangle \\
&\overset{\text{T é autoadjunto}}{=} \langle T(u), v\rangle - \langle T(u), v\rangle = 0 .
\end{aligned}
$$

Da identidade acima, como $\lambda \neq \mu$, segue-se que

$$\langle u, v\rangle = 0 ,$$

completando a demonstração do resultado.

∎

Finalizaremos esta seção, com o seguinte resultado que provaremos apenas no caso bidimensional.

A demonstração do caso unidimensional é trivial e será deixada como exercício para o leitor.

Para a prova no caso geral, indicamos a leitura do livro **Álgebra Linear**, de Elon L. Lima, Coleção Matemática Universitária [L].

Teorema 14.188 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real, de dimensão finita, munido de um produto interno* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *e* $T \in \mathcal{L}(U)$ *um operador autoadjunto em* $(U, +, \cdot, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Então existe uma base ortonormal de $(U, +, \cdot, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *formada por autovetores do operador linear* $\underline{T}$.

Em particular, o operador linear $\underline{T}$ *será diagonalizável.*

Prova:

Faremos a demonstração do caso bidimensional, isto é,

$$\dim(U) = 2 .$$

Como comentamos acima, a demonstração do caso geral, poderá ser encontrada em ([L]).

Seja

$$\mathcal{B} \doteq \{u, v\}$$

uma base ortonormal de $(U, +, \cdot)$.

Pelo Teorema (14.174), segue que a matriz do operador linear $\underline{T}$ será uma matriz simétrica, ou seja, da forma

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} ,$$

para algum $a, b \in \mathbb{R}$.

Desta forma, o polinômio característico associado ao operador linear $\underline{T}$, será da forma

$$p_T(\lambda) = \lambda^2 - (a + c)\,\lambda + a\,c - b^2\,, \quad \text{para cada} \quad \lambda \in \mathbb{C}\,.$$

Como

$$\begin{aligned}\Delta &= (a + c)^2 - 4\,(a\,c - b^2)\\ &= a^2 + c^2 - 2\,a\,c + 4\,b^2\\ &= (a - c)^2 + 4\,b^2 \geq 0\end{aligned}$$

vemos que o polinômio p_T, apresenta duas raízes reais (não, necessariamente, distintas).

Se

$$a = c \quad \text{e} \quad b = 0\,,$$

segue que a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ será da forma

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a\,I_2$$

e a própria base $\mathcal{B}$, serve para completar a prova do resultado (pois já temos uma matriz diagonal).

Por outro lado, se

$$a \neq c \quad \text{ou} \quad b \neq 0\,,$$

então o polinômio p_T possui duas raízes reais distintas (pois $\Delta > 0$), isto é, o operador linear $\underline{T}$, apresenta dois autovalores reais e distintos.

Logo, pelo Teorema (14.184), dois autovetores

$$u_1 \quad \text{e} \quad u_2$$

correspondentes serão ortogonais e como são não nulos, pois são autovetores, serão L.I. em $(U\,, +\,, \cdot)$.

Para finalizar, bastas tomar como base para $(U\,, +\,, \cdot)$, o conjunto

$$\mathcal{B} \doteq \left\{ \frac{u_1}{\|u_1\|}\,, \frac{u_2}{\|u_2\|} \right\}\,,$$

que está será uma base ortonormal de $(U\,, +\,, \cdot)$, formada por autovetores de $\underline{T}$, completando a demonstração do resultado.

∎

Como consequência temos o:

Corolário 14.189 *Se a matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ é uma matriz simétrica, então ela é uma matriz diagonalizável.*

Prova:

Consideremos o espaço vetorial real $(M_{n\times 1}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ munido do produto interno usual.

Observemos que se definirmos a aplicação $T : M_{n\times 1}(\mathbb{R}) \to M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ por

$$T(X) \doteq A\,X\,, \quad \text{para cada} \quad X \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})\,, \tag{14.190}$$

então a aplicação $\underline{T}$ será um operador linear em $(M_{n\times 1}(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$, cuja matriz, em relação a base canônica de $(M_{n\times 1}(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$, (que é uma base ortonormal de $(M_{n\times 1}(\mathbb{R})\,,+\,,\cdot)$, relativamente ao produto interno dado por (14.40)) será a matriz $\underline{A}$ que, por hipótese, é simétrica.

Logo, do Teorema (14.174), segue que o operador $\underline{T}$ será autoadjunto que, pelo Teorema (14.188) acima, será diagonalizável.

Portanto, pela Proposição (13.9), temos que a matriz $\underline{A}$ será diagonalizável, completando a demonstração do resultado.

∎

14.7 Processo de Gram-Schmidt

A demonstração do próximo resultado, fornece um método para se conseguir uma base ortonormal de um espaço euclideano finitamente gerado, a partir de uma base dada do mesmo.

Para isto temos o:

Teorema 14.191 *Todo espaço vetorial real (respectivamente, complexo), finitamente gerado, munido de um produto interno $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$, possui uma base ortonormal.*

Prova:

A prova é feita por indução sobre a dimensão do espaço vetorial dado.

Seja $(V\,,+\,,\cdot)$ um espaço vetorial real (respectivamente, complexo), munido de um produto interno $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ de dimensão finita.

Se

$$\dim(V) = 1\,,$$

segue que existe $v_1 \in V$, com $v_1 \neq O$, de modo que

$$V = [v_1]\,.$$

Como $v_1 \neq O$, definindo-se

$$u_1 \doteq \frac{v_1}{\|v_1\|}\,, \tag{14.192}$$

segue que o conjunto

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1\}$$

será um conjunto ortonormal e $V = [u_1]$, ou seja, o conjunto $\mathcal{B}$ é uma base ortonormal de $(V\,,+\,,\cdot)$.

Se

$$\dim(V) = 2\,,$$

segue que existem vetores

$$v_1\,, v_2$$

L.I. em $(V, +, \cdot)$, tais que

$$V = [v_1, v_2],$$

ou seja, o conjunto

$$\mathcal{C} \doteq \{v_1, v_2\}$$

é uma base de $(V, +, \cdot)$.

Definamos

$$u_1 \doteq \frac{v_1}{\|v_1\|}. \tag{14.193}$$

Nosso trabalho se resume a encontrar um vetor ortogonal ao vetor $\underline{u_1}$ e que tenha norma igual a 1.

Primeiramente vamos encontrar um vetor não nulo, que seja ortogonal ao vetor $\underline{u_1}$.

Para isto, utilizaremos a Proposição (14.133) (ou (14.137)), ou seja, basta definirmos

$$u_2{}' \doteq v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle \cdot u_1. \tag{14.194}$$

Notemos que

$$u_2{}' \neq O$$

pois os vetores $\underline{u_1}$ (que é paralelo ao vetor $\underline{v_1}$) e $\underline{v_2}$ são L.I. em $(V, +, \cdot)$.

Resta agora " normalizar" o vetor $u_2{}'$, isto é, obter um vetor que tenha a "mesma direção" do vetor $u_2{}'$ e tenha norma igual a 1.

Para isto, basta definirmos

$$\begin{aligned} u_2 &\doteq \frac{u_2{}'}{\|u_2{}'\|} \\ &\overset{(14.194)}{=} \frac{v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle \cdot u_1}{\|v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle \cdot u_1\|}. \end{aligned} \tag{14.195}$$

Deste modo, os vetores

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} \quad \text{e} \quad u_2 = \frac{v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle \cdot u_1}{\|v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle \cdot u_1\|}$$

formam uma base ortonormal de $(V, +, \cdot)$.

Dado $n \in \{3, 4, \cdots\}$, suponhamos que tenhamos provado o resultado para todos os espaços vetorial real (ou compelxo), munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de dimensão igual a $n - 1$.

Queremos provar que o mesmo é verdade para um espaço vetorial real (respectivamente, complexo), munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, de dimensão $\underline{n}$.

Como

$$\dim(V) = n,$$

segue que existem vetores

$$v_1, v_2, \cdots, v_n$$

que formam uma base de $(V, +, \cdot)$.

Notemos que

$$U \doteq [v_1\,,v_2\,,\cdots\,,v_{n-1}]$$

é um subespaço vetorial de $(V\,,+\,,\cdot)$, que tem dimensão $n-1$.

Desse modo, usando a nossa hipótese de indução, é possível encontrar uma base ortonormal para $(U\,,+_V\,,\cdot_V)$.

Denotaremos esta base ortonormal de $(U,+_V,\cdot_V)$ por

$$\mathcal{U} \doteq \{u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_{n-1}\}\,. \tag{14.196}$$

Notemos que

$$v_n \notin U$$

pois, caso contrário os vetores $v_1\,,v_2\,,\cdots\,,v_n$ seriam L.D. em $(V\,,+\,,\cdot)$.

Logo, pela Proposição (14.133), o vetor

$$u_n{}' \doteq v_n - \langle v_n\,,u_1\rangle\cdot u_1 - \cdots - \langle v_n\,,u_{n-1}\rangle\cdot u_{n-1} \tag{14.197}$$

é um vetor, não nulo e ortogonal a todos os elementos de U, portanto, ortogonal aos vetores

$$u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_{n-1}\,.$$

Para finalizar, tomando-se

$$\begin{aligned} u_n &\doteq \frac{u_n{}'}{\|u_n{}'\|} \\ &\overset{(14.197)}{=} \frac{v_n - \langle v_n\,,u_1\rangle\cdot u_1 - \cdots - \langle v_n\,,u_{n-1}\rangle\cdot u_{n-1}}{\|v_n - \langle v_n\,,u_1\rangle\cdot u_1 - \cdots - \langle v_n\,,u_{n-1}\rangle\cdot u_{n-1}\|}\,, \end{aligned}$$

segue que o conjunto

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_{n-1},u_n\}$$

será uma base ortonormal de $(V\,,+\,,\cdot)$ completando a demonstração de resultado.

∎

Observação 14.198

1. *Notemos que na demonstração do Teorema (14.191) acima, partimos da existência de uma base do espaço vetorial real (respectivamente, complexo), munido de um produto interno, e* **ortonormalizamos** *a mesma.*

2. *O procedimento de, partindo de uma base de um espaço vetorial real (respectivamente, complexo), munido de um produto interno, obter uma base ortonormal do mesmo (que foi o que fizemos na demonstração do Terema (14.191) acima) é conhecido como* **processo de Gram-Schmidt**.

3. *No caso de um espaço vetorial real (respectivamente, complexo)* $(V, +, \cdot)$, *munido de um produto interno tridimensional, se o conjunto*

$$\mathcal{B} \doteq \{v_1, v_2, v_3\}$$

é uma base de $(V, +, \cdot)$, *então uma base ortonormal de* $(V, +, \cdot)$, *pode ser dada, explicitamente, pelos vetores:*

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|}, \\ u_2 &= \frac{v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle \cdot u_1}{\|v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle \cdot u_1\|}, \\ u_3 &= \frac{v_3 - \langle v_3, u_1 \rangle \cdot u_1 - \langle v_3, u_2 \rangle \cdot u_2}{\|v_3 - \langle v_3, u_1 \rangle \cdot u_1 - \langle v_3, u_2 \rangle \cdot u_2\|}. \end{aligned}$$

Apliquemos este processo aos:

Exemplo 14.199 *Encontre uma base ortonormal do espaço vetorial real* $(W, +, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de adição de ternas e multiplicação de número real por terna, respectivamente), munido do produto interno* (14.19) *(com* $n = 3$*), onde*

$$W \doteq \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ;\, x - 2y = 0\right\}. \tag{14.200}$$

Resolução:

Observemos que W é um subespaço vetorial de $\left(\mathbb{R}^3, +, \cdot\right)$.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Notemos também que

$$\begin{aligned} & && (x, y, z) \in W \\ &\text{se, e somente se,} && x = 2y \\ &\text{ou, equivalentemente,} && (x, y, z) = (2y, y, z) \\ & && \qquad\qquad = y \cdot (2, 1, 0) + z \cdot (0, 0, 1), \\ &\text{ou seja,} && W = [(2, 1, 0), (0, 0, 1)]. \end{aligned}$$

Notemos que o conjunto

$$\mathcal{B} \doteq \{(2, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

é L.I. em $\left(\mathbb{R}^3, +, \cdot\right)$.

Logo o conjunto $\mathcal{B}$ será uma base de $(W, +, \cdot)$.

Definamos

$$u_1 \doteq (0, 0, 1), \tag{14.201}$$

pois este vetor é unitário (isto é, tem norma igual a 1).

Pelo processo de Gram-Schmidt (obtido na demonstração do Teorema (14.191)), o segundo vetor da base ortonormal procurada, que indicaremos por $\underline{u_2}$, será a projeção ortogonal, unitária, do vetor

$$v_2 \doteq (2, 1, 0) \tag{14.202}$$

na direção do vetor $\underline{u_1}$, isto é,

$$
\begin{aligned}
u_2 &\overset{(14.137)}{\doteq} \frac{v_2 - \langle v_2 , u_1 \rangle \cdot u_1}{\|v_2 - \langle v_2 , u_1 \rangle \cdot u_1\|} \\
&\overset{(14.201) \text{ e } (14.202)}{=} \frac{(2,1,0) - \langle (2,1,0),(0,0,1)\rangle \cdot (0,0,1)}{\|(2,1,0) - \langle (2,1,0),(0,0,1)\rangle \cdot (0,0,1)\|} \\
&= \frac{(2,1,0)}{\|(2,1,0)\|} \\
&\overset{\text{Exercício}}{=} \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right) .
\end{aligned}
$$

Assim obtemos uma base ortonormal

$$\mathcal{C} = \{u_1 , u_2\}$$

de $(W, +, \cdot)$.

□

Podemos aplicar o mesmo processo para o:

Exemplo 14.203 *Encontre uma base ortonormal do espaço vetorial real* $(W, +, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de adiçaõ de quádruplas e multiplicação de número real por quádrupla, respectivamente) munido do produto interno* (14.19) *(com* $n = 4$*), onde*

$$W \doteq \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 ; x + y + z + t = 0\right\} . \tag{14.204}$$

Resolução:

Observemos que o conjunto W é um subespaço vetorial de $\left(\mathbb{R}^4, +, \cdot\right)$.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Notemos também que

$$
\begin{aligned}
& & (x, y, z, t) &\in W \\
&\text{se, e somente se,} & x &= -y - z - t \\
&\text{ou, equivalentemente,} & (x, y, z, t) &= (-y - z - t, y, z, t) \\
& & &= y \cdot (-1,1,0,0) + z \cdot (-1,0,1,0) + t \cdot (-1,0,0,1), \\
&\text{ou seja,} & W &= [\underbrace{(-1,1,0,0)}_{\doteq v_1}, \underbrace{(-1,0,1,0)}_{\doteq v_2}, \underbrace{(1,0,0,-1)}_{\doteq v_3}].
\end{aligned} \tag{14.205}
$$

Como o conjunto de vetores

$$\mathcal{B} \doteq \{(-1,1,0,0), (-1,0,1,0), (-1,0,0,1)\}$$

é L.I. em $\left(\mathbb{R}^4, +, \cdot\right)$, segue-se que este conjunto será uma base de $(W, +, \cdot)$.

Definamos

$$
\begin{aligned}
u_1 &\doteq \frac{v_1}{\|v_1\|} \\
&\overset{(14.205)}{=} \frac{(-1,1,0,0)}{\|(-1,1,0,0)\|} \\
&\overset{(14.19) \text{, com } n=4}{=} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right) .
\end{aligned} \tag{14.206}
$$

Pelo processo de Gram-Schmidt (obtido na demonstração do Teorema (14.191)) teremos:

$$\begin{aligned}
u_2 &\overset{(14.137)}{\doteq} \frac{v_2 - \langle v_2 , u_1 \rangle \cdot u_1}{\|v_2 - \langle v_2 , u_1 \rangle \cdot u_1\|} \\
&\overset{(14.205) \text{ e } (14.206)}{=} \frac{(-1,0,1,0) - \left\langle (-1,0,1,0), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right) \right\rangle \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)}{\left\|(-1,0,1,0) - \left\langle (-1,0,1,0), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right) \right\rangle \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)\right\|} \\
&\overset{(14.19), \text{ com } n=4}{=} \frac{\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right)}{\left\|\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right)\right\|} \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2,0) .
\end{aligned} \tag{14.207}$$

De modo análogo,

$$\begin{aligned}
u_3 &\overset{(14.137)}{\doteq} \frac{v_3 - \langle v_3 , u_1 \rangle \cdot u_1 - \langle v_3 , u_2 \rangle \cdot u_2}{\|v_3 - \langle v_3 , u_1 \rangle \cdot u_1 - \langle v_3 , u_2 \rangle \cdot u_2\|} \\
&\overset{(14.205)}{=} \frac{(-1,0,0,1) - \langle (-1,0,0,1), u_1 \rangle \cdot u_1 - \langle (-1,0,0,1), u_2 \rangle \cdot u_2}{\|(-1,0,0,1) - \langle (-1,0,0,1), u_1 \rangle \cdot u_1 - \langle (-1,0,0,1), u_2 \rangle \cdot u_2\|} .
\end{aligned} \tag{14.208}$$

Como

$$\langle (-1,0,0,1), u_1 \rangle \overset{(14.206)}{=} \left\langle (-1,0,0,1), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right) \right\rangle \overset{(14.19), \text{ com } n=4}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{14.209}$$

$$\langle (-1,0,0,1), u_2 \rangle \overset{(14.207)}{=} \left\langle (-1,0,0,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2,0) \right\rangle \overset{(14.19), \text{ com } n=4}{=} \frac{1}{\sqrt{6}}, \tag{14.210}$$

segue que

$$\begin{aligned}
&(-1,0,0,1) - \langle (-1,0,0,1), u_1 \rangle \cdot u_1 - \langle (-1,0,0,1), u_2 \rangle \cdot u_2 \\
&\overset{(14.209) \text{ e } (14.210)}{=} (-1,0,0,1) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right) - \frac{1}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2,0) \\
&= (-1,0,0,1) + \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0\right) + \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, 0\right) \\
&= \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right) .
\end{aligned} \tag{14.211}$$

Substituindo (14.211) em (14.208), obteremos

$$u_3 \doteq \frac{\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)}{\left\|\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)\right\|} \overset{\text{Exercício}}{=} \left(-\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \tag{14.212}$$

assim obtemos umaa base ortonormal

$$\mathcal{C} \doteq \{u_1, u_2, u_3\}$$

de $(W, +, \cdot)$, onde os vetores u_1, u_2, u_3 são dados por (14.206), (14.207), (14.212), respectivamente.

□

Podemos aplicar as mesmas idéias ao:

Exemplo 14.213 *Encontre uma base ortonormal do espaço vetorial real $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$, munido do produto interno*

$$\langle p, q\rangle \doteq \int_0^1 p(x)\, q(x)\, dx, \quad \textit{para cada} \quad p, q \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R}). \tag{14.214}$$

Resolução:

Uilizaremos o processo de Gram-Schmidt (obtido na demonstração do Teorema (14.191)) para construir uma base ortonormal de $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$, a partir da base canônica de $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$, isto é, formada pelos polinômios $p_o, p_1, p_2 \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ onde,

$$p_o(x) \doteq 1, \quad p_1(x) \doteq x, \quad p_2(x) \doteq x^2, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{14.215}$$

Temos que

$$\begin{aligned} \|p_o\|^2 &\overset{(14.214)}{=} \int_0^1 p_o{}^2(x)\, dx \\ &\overset{(14.215)}{=} \int_0^1 1^2\, dx \\ &= 1, \end{aligned}$$

assim definimos o 1.o vetor da base ortonormal procurada, como sendo o vetor:

$$q_o(x) \doteq p_o(x) = 1, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{14.216}$$

Seguindo o processo de Gram-Schmidt (obtido na demonstração do Teorema (14.191)), definiremos o 2.a vetor da base ortonormal procurada, como sendo o vetor:

$$q_1 \doteq \frac{p_1 - \langle p_1, q_o\rangle \cdot q_o}{\|p_1 - \langle p_1, q_o\rangle \cdot q_o\|}. \tag{14.217}$$

Como

$$\begin{aligned}
\langle\, p_1\,,p_o\rangle &\overset{(14.214)}{=} \int_0^1 p_1(x)\, q_o(x)\, dx \\
&\overset{(14.215)\text{ e }(14.216)}{=} \int_0^1 x\, dx \\
&\overset{\text{Exercício}}{=} \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

e assim, teremos:

$$\begin{aligned}
\|p_1 - \langle\, p_1\,,q_o\rangle \cdot q_o\|^2 &\overset{(14.214)}{=} \int_0^1 \left[p_1(x) - \frac{1}{2}\, q_o(x)\right]^2 dx \\
&\overset{(14.215)\text{ e }(14.216)}{=} \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx \\
&\overset{\text{Exercício}}{=} \frac{1}{12}\,. \qquad (14.218)
\end{aligned}$$

Logo, substituindo (14.218) em (14.217), obteremos:

$$\begin{aligned}
q_1(x) &\doteq \frac{x - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{12}}} \\
&= \underbrace{\sqrt{12}}_{=2\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right) \\
&= \sqrt{3}\,(2\,x - 1)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \qquad (14.219)
\end{aligned}$$

Por fim, definamos

$$q_2 \doteq \frac{p_2 - \langle\, p_2\,,q_o\rangle \cdot q_o - \langle\, p_2\,,q_1\rangle \cdot q_1}{\|p_2 - \langle\, p_2\,,q_o\rangle \cdot q_o - \langle\, p_2\,,q_1\rangle \cdot q_1\|}\,. \qquad (14.220)$$

Notemos que:

$$\begin{aligned}
\langle p_2 , q_o \rangle &\overset{(14.214)}{=} \int_0^1 p_2(x)\, q_o(x)\, dx \\
&\overset{(14.215) \text{ e } (14.216)}{=} \int_0^1 x^2\, dx \\
&\overset{\text{Exercício}}{=} \frac{1}{3}, \\
\langle p_2 , q_1 \rangle &\overset{(14.214)}{=} \int_0^1 p_2(x)\, q_1(x)\, dx \\
&\overset{(14.215) \text{ e } (14.219)}{=} \sqrt{3} \int_0^1 x^2\,(2\,x - 1)\, dx \\
&\overset{\text{Exercício}}{=} \frac{\sqrt{3}}{6}, \\
\|p_2 - \langle p_2 , q_o \rangle \cdot q_o - \langle p_2 , q_1 \rangle \cdot q_1\|^2 &\overset{(14.214)}{=} \int_0^1 [p_2(x) - \langle p_2 , q_o \rangle \cdot q_o(x) - \langle p_2 , q_1 \rangle \cdot q_1(x)]^2\, dx \\
&\overset{(14.215),(14.216) \text{ e } (14.219)}{=} \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)^2 dx \\
&\overset{\text{Exercício}}{=} \frac{1}{180}.
\end{aligned} \tag{14.221}$$

Logo, de (14.220) e (14.221), segue que:

$$\begin{aligned}
q_2(x) &\doteq \underbrace{\sqrt{180}}_{=6\sqrt{5}} \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) \\
&= \sqrt{5}\, \left(6\,x^2 - 6\,x + 1\right), \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned} \tag{14.222}$$

Desta forma, uma base ortonormal de $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ é dada pelo conjunto

$$\mathcal{B} \doteq \{q_o , q_1 , q_2\},$$

onde os polinômios q_o , q_1 , q_2 são dados por (14.216), (14.219), (14.222), respectivamente.

Até aqui para a 2.a prova

19.11.2015 - 28.a

14.8 Complemento Ortogonal

Começaremos introduzindo a:

Definição 14.223 *Sejam $(V , + , \cdot)$ um espaço vetorial real (respectivamente, complexo), munido de um produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$ e U um subespaço vetorial de $(V , + , \cdot)$.*

Definimos o **complemento ortogonal de U**, *indicado por $U^\perp$, como sendo o conjunto*

$$U^\perp \doteq \{v \in V ; \langle v , u \rangle = 0 , \quad \textit{para cada } u \in U\}. \tag{14.224}$$

Com isto temos a:

Proposição 14.225 *Na situação acima, temos que o conjunto* $U^{\perp}$ *é um subespaço vetorial de* $(V, +, \cdot)$.

Prova:
Notemos que

$$\begin{aligned} & O \in U^{\perp}, \\ \text{pois} \qquad & \langle O, u \rangle = 0, \quad \text{para cada} \quad u \in U. \end{aligned}$$

Se $v, w \in U^{\perp}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ (respectivamente, $\mathbb{C}$) então, para cada $u \in U$, temos

$$\begin{aligned} \langle v + \alpha \cdot w, u \rangle & \stackrel{\text{propriedades de p.i.}}{=} \underbrace{\langle v, u \rangle}_{\stackrel{v \in U^{\perp}}{=} 0} + \alpha \underbrace{\langle w, u \rangle}_{\stackrel{w \in U^{\perp}}{=} 0} \\ & = 0. \end{aligned}$$

Portanto, $(v + \alpha \cdot w) \in U^{\perp}$, mostrando que o conjunto $U^{\perp}$ é um subespaço vetorial de $(V, +, \cdot)$, completando a demonstração do resultado.

∎

Temos a:

Observação 14.226 *Se o espaço vetorial real (respectivamente, complexo)* $(V, +, \cdot)$*, munido de um produto interno* $\langle \cdot, \cdot \rangle$*, tem dimensão finita e* U *é um subespaço vetorial de* $(V, +, \cdot)$*, então* $v \in U^{\perp}$ *se, e somente se, o vetor* $\underline{v}$ *é ortogonal a todos os vetores de uma base qualquer de* $(U, +_V, \cdot_V)$.

De fato, se o conjunto

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$$

é uma base de $(U, +_V, \cdot_V)$ *, então se* $u \in U$*, existem escalares*

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad \textit{(respectivamente, } \mathbb{C}\textit{)},$$

tais que

$$u = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n. \tag{14.227}$$

Portanto $v \in U^{\perp}$ *se, e somente se,*

$$\begin{aligned} & \langle v, u \rangle = 0, \quad \textit{para cada } u \in U, \\ \textit{ou seja,} \quad & \langle v, \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n \rangle = 0, \\ \textit{isto é,} \quad & \alpha_1 \langle v, u_1 \rangle + \cdots + \alpha_n \langle v, u_n \rangle = 0, \\ \textit{que é equivalente a,} \quad & \langle v, u_1 \rangle = \cdots = \langle v, u_n \rangle = 0, \end{aligned}$$

pois $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ *(respectivamente* $\mathbb{C}$*) são quaisquer, ou seja, o vetor* $\underline{v}$ *é ortogonal a todos os vetores da base* $\mathcal{B}$ *de* $(U, +, \cdot)$*, como afirmamos.*

Apliquemos estas idéias ao:

Exemplo 14.228 *Consideremos o espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de adição de ternas e multiplicação de número real por terna, respectivamente), munido do produto interno* (14.19) *(com* $n = 3$*) e*

$$U \doteq \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; \, x - y - z = 0\right\} . \tag{14.229}$$

Encontre o subespaço vetorial $U^\perp$*, uma base e a dimensão do mesmo.*

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação que o conjunto $\underline{U}$ é um subespaço vetorial de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Temos

$$\begin{aligned}
& && (x, y, z) \in U \\
&\text{se, e somente se,} && x = y + z \\
&\text{ou, equivalentemente,} && (x, y, z) = (y + z, y, z) \\
& && \qquad\quad = y \cdot (1, 1, 0) + z \cdot (1, 0, 1) , \\
&\text{ou seja,} && U = [(1, 1, 0), (1, 0, 1)] .
\end{aligned}$$

Notemos que vetores

$$(1, 1, 0) \quad \text{e} \quad (1, 0, 1)$$

são L.I. em $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Logo o conjunto de vetores

$$\mathcal{B} \doteq \{(1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$$

é uma base de $(U, +, \cdot)$.

Assim, da Observação (14.226) acima, segue que

$$\begin{aligned}
& && (x, y, z) \in U^\perp \\
&\text{se, e somente se,} && \langle (x, y, z), (1, 1, 0)\rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle (x, y, z), (1, 0, 1)\rangle = 0 , \\
&\text{ou seja,} && \begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} , \\
&\text{ou ainda,} && \begin{cases} y = -x \\ z = -x \end{cases} , \\
&\text{isto é,} && (x, y, z) = (x, -x, -x) = x \cdot (1, -1, -1) , \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R} .
\end{aligned}$$

Assim,

$$U^\perp = [(1, -1, -1)] ,$$

ou seja, o conjunto de vetores

$$\mathcal{C} \doteq \{(1, -1, -1)\}$$

é uma base de $(U^{\perp}, +, \cdot)$.

Em particular, segue que

$$\dim(U^{\perp}) = 1\,.$$

□

Temos o:

Teorema 14.230 *Sejam $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial real (respectivamente, complexo), munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, de dimensão finita e U um subespaço vetorial de $(V, +, \cdot)$.*

Então

$$V = U \oplus U^{\perp}\,. \tag{14.231}$$

Prova:

Dado $v \in V$, consideremos o vetor $\underline{w}$, que é a projeção ortogonal do vetor $\underline{v}$ sobre o subespaço vetorial U, (veja a Definição (14.154)) isto é,

$$w \doteq \langle v, u_1 \rangle \cdot u_1 + \cdots + \langle v, u_n \rangle \cdot u_n\,, \tag{14.232}$$

onde

$$\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$$

é uma base ortonormal de $(U, +_V, \cdot_V)$.

Observemos que

$$v = w + (v - w).$$

Logo, pela Proposição (14.133), como $w \in U$, teremos que

$$(v - w) \perp U\,,$$

ou seja, para cada $u \in U$, segue que

$$\langle v - w, u \rangle = 0\,.$$

Logo,

$$v = \underbrace{w}_{\in U} + \underbrace{(v - w)}_{U^{\perp}} \in U + U^{\perp}\,,$$

mostrando que

$$V = U + U^{\perp}\,.$$

Agora, se

$$u \in U \cap U^{\perp}\,, \quad \text{segue que} \quad \langle u, u \rangle = 0$$

e, portanto, $u = O$, ou seja,

$$V = U \oplus U^{\perp}\,,$$

completando a demonstração do resultado.

∎

14.9 Isometria

Definição 14.233 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *e* $(V, +, \cdot)$ *espaços vetoriais reais (ou complexos), munidos de produtos internos.*

Diremos que $T \in \mathcal{L}(U, V)$ *é uma* **isometria de U em V** *se*

$$\langle T(u_1), T(u_2) \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle, \quad \text{para cada} \quad u_1, u_2 \in U, \tag{14.234}$$

(ou seja, se a transformação linear T *"preserva produto interno").*

Observação 14.235 *Notemos que os produtos internos acima, embora representados pelo mesmo símbolo, são produtos internos de* $(V, +, \cdot)$ *e de* $(U, +, \cdot)$*, respectivamente, isto é, de modo rigoroso, deríamos escrever*

$$\langle T(u_1), T(u_2) \rangle_V = \langle u_1, u_2 \rangle_U, \quad \text{para cada} \quad u_1, u_2 \in U.$$

Para simplificar a notação omitiremos os índices $\underline{U}$ *e* $\underline{V}$*, nos respectivos produtos internos envolvidos na identidade acima.*

Com isto temos o:

Exemplo 14.236 (rotação em $\mathbb{R}^2$) *Sejam* $\theta \in \mathbb{R}$ *fixado,* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *espaço vetorial real, munido do produto interno* (14.19) *(com* $n = 2$*) e* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dada por*

$$T(x, y) \doteq (x\cos(\theta) - y\,\mathrm{sen}(\theta), x\,\mathrm{sen}(\theta) + y\cos(\theta)), \quad \text{para cada} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \tag{14.237}$$

Mostre a aplicação $\underline{T}$ *é uma isometria de* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *em* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$*.*

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação que $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.

Se

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2,$$

temos que:

$$\begin{aligned}
\langle T(x_1, y_1), T(x_2, y_2) \rangle &\overset{(14.237)}{=} \langle (x_1\cos(\theta) - y_1\,\mathrm{sen}(\theta), x_1\,\mathrm{sen}(\theta) + y_1\cos(\theta)), \\
&\qquad (x_2\cos(\theta) - y_2\,\mathrm{sen}(\theta), x_2\,\mathrm{sen}(\theta) + y_2\cos(\theta)) \rangle \\
&\overset{(14.19)}{=} x_1 x_2 \left[\cos^2(\theta) + \mathrm{sen}^2(\theta)\right] \\
&\qquad - y_1 x_2 \left[-\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta) + \cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)\right] \\
&\qquad - x_1 y_2 \left[\cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta) - \cos(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)\right] \\
&\qquad + y_1 y_2 \left[\cos^2(\theta) + \mathrm{sen}^2(\theta)\right] \\
&= x_1 x_2 + y_1 y_2 \\
&= \langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle,
\end{aligned}$$

mostrando que o operador linear $\underline{T}$ é uma isometria de $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ em $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

□

Temos o:

Teorema 14.238 *Sejam* $(U\,,+\,,\cdot)$, $(V\,,+\,,\cdot)$ *espaços vetoriais reais (ou complexos), munidos de produtos internos e* $T \in \mathcal{L}(U, V)$.

São equivalentes:

1. T *é uma isometria de* $(U\,,+\,,\cdot)$ *em* $(V\,,+\,,\cdot)$*;*

2. *para cada* $u \in U$*, temos que*
$$\|T(u)\| = \|u\|\,. \tag{14.239}$$

3. *para cada* $u\,,v \in U$*, temos que*
$$\|T(u) - T(v)\| = \|u - v\|\,. \tag{14.240}$$

4. *Se o conjuto*
$$\{u_1\,,u_2\,,\cdots\,,u_n\}$$
é um conjunto ortonormal em $(U\,,+\,,\cdot)$*, então o conjunto*
$$\{T(u_1)\,,T(u_2)\,,\cdots\,,T(u_n)\}$$
será um conjunto ortonormal em $(V\,,+\,,\cdot)$.

Prova:

Mostremos que 1. implica em 2. :

Como $T \in \mathcal{L}(U, V)$ é uma isometria, segue que
$$\langle\, T(u)\,,T(v) \rangle = \langle\, u\,,v \rangle \quad \text{para cada} \quad u\,,v \in U. \tag{14.241}$$

Em particular, fazendo $u = v$ na identidade (14.241) acima, obteremos:
$$\begin{aligned}\|T(u)\|^2 &= \langle\, T(u)\,,T(u) \rangle\\ &\overset{(14.241)}{=} \langle\, u\,,u \rangle\\ &= \|u\|^2\,, \quad \text{para cada} \quad u \in U\,,\end{aligned}$$

ou seja,
$$\|T(u)\| = \|u\|\,,$$
para cada $u \in U$, mostrando que 2. ocorrerá.

Mostremos que 2. implica em 3. :

Notemos que, para cada $u\,,v \in U$, temos:
$$\begin{aligned}\|T(u) - T(v)\| &\overset{T \text{ é transformação linear}}{=} \|T(u - v)\|\\ &\overset{(14.239)}{=} \|u - v\|\,,\end{aligned}$$

mostrando que 3 ocorrerá.

Mostremos que 3. implica em 1. :

Notemos que, para cada $u, v \in U$, temos que:

$$\|T(u)+T(v)\| \overset{v=-(-v) \text{ e } T \text{ é transf. linear}}{=} \|T(u)-T(-v)\| \overset{(14.240)}{=} \|u-(-v)\| = \|u+v\|. \tag{14.242}$$

Pela Proposição (14.71), para cada $u, v \in U$, segue que:

$$\begin{aligned} \langle T(u), T(v) \rangle &\overset{(14.73)}{=} \frac{1}{4}\left[\|T(u)+T(v)\|^2 - \|T(u)-T(v)\|^2\right] \\ &\overset{(14.242)}{=} \frac{1}{4}\left[\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right] \\ &\overset{(14.73)}{=} \langle u, v \rangle, \end{aligned}$$

mostrando que 1 ocorrerá.

Mostremos que 1. implica em 4. :

Se o conjunto

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$$

é um subconjunto ortonormal de $(U, +, \cdot)$, então, como a aplicação $\underline{T}$ é uma isometria, para cada $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, segue que:

$$\begin{aligned} \langle T(u_i), T(u_j) \rangle &\overset{(14.234)}{=} \langle u_i, u_j \rangle \\ &\overset{\mathcal{B} \text{ é ortonormal}}{=} \begin{cases} 1, & \text{para } i = j \\ 0, & \text{para } i \neq j \end{cases}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\{T(u_1), T(u_2), \cdots, T(u_n)\}$$

é um conjunto ortonormal em $(V, +, \cdot)$, mostrando que 4. ocorrerá.

Mostremos que 4. implica em 1. :

Seja

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$$

uma base ortonormal de $(U, +, \cdot)$.

Por hipótese, temos que o conjunto

$$\mathcal{C} \doteq \{T(u_1), T(u_2) \cdots, T(u_n)\}$$

é um conjunto ortonormal em $(V, +, \cdot)$.

Com isto, temos que, se $u, v \in U$, como $\mathcal{B}$ é base de $(U, +, \cdot)$, segue que existem escalares

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n \in \mathbb{R} \text{ (respectivamente, } \mathbb{C}),$$

tais que

$$u = \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n \quad \text{e} \quad v = \beta_1 \cdot u_1 + \cdots + \beta_n \cdot u_n. \tag{14.243}$$

Assim, obteremos:

$$\begin{aligned}
\langle T(u), T(v) \rangle &\overset{(14.243)}{=} \left\langle T\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot u_i\right), T\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j \cdot u_j\right) \right\rangle \\
&\overset{\text{T é transformação linear}}{=} \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot T(u_i), \sum_{j=1}^{n} \beta_j \cdot T(u_j) \right\rangle \\
&\overset{\text{Propriedades de p.i.}}{=} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \underbrace{\beta_j}_{=\overline{\beta_i}, \text{ no caso } \mathbb{C}} \underbrace{\langle T(u_i), T(u_j) \rangle}_{=\delta_{ij}} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \beta_i \quad \left(= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \overline{\beta_i}, \text{ no caso } \mathbb{C} \right). \qquad (14.244)
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\langle u, v \rangle &\overset{(14.243)}{=} \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot u_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j \cdot u_j \right\rangle \\
&\overset{\text{Propriedades de p.i.}}{=} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \underbrace{\beta_j}_{=\overline{\beta_i}, \text{ no caso } \mathbb{C}} \underbrace{\langle u_i, u_j \rangle}_{=\delta_{ij}} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \beta_i \quad \left(= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \overline{\beta_i}, \text{ no caso } \mathbb{C} \right). \qquad (14.245)
\end{aligned}$$

Comparando as expressões (14.244) e (14.245), concluímos que a aplicação $\underline{T}$ é uma isometria de $(U, +, \cdot)$ em $(V, +, \cdot)$, completando a demonstração do resultado.

∎

Como consequência temos o:

Corolário 14.246 *Sejam $(U, +, \cdot)$, $(V, +, \cdot)$ espaços vetoriais reais (ou complexos), munidos de produtos internos e $T \in \mathcal{L}(U, V)$ uma isometria de $(U, +, \cdot)$ em $(V, +, \cdot)$.*

Então a transformação linear $\underline{T}$ é injetora.

Prova:

Basta ver que se $u \in U$, satisfaz

$$T(u) = O,$$

como a transformação linear $\underline{T}$ é isometria de $(U, +, \cdot)$ em $(V, +, \cdot)$, segue que

$$\begin{aligned}
\|u\| &\overset{\text{item 2. do Teorema (14.238)}}{=} \|T(u)\| \\
&= \|O\| = 0.
\end{aligned}$$

Portanto $\|u\| = 0$, o que implicará que (propriedade de norma)

$$u = O,$$

mostrando que a transformação linear $\underline{T}$ é injetora, completando a demonstração do resultado.

∎

Também como consequência temos o:

Corolário 14.247 *Sejam* $(U, +, \cdot)$, $(V, +, \cdot)$ *espaços vetoriais reais (ou compelxos), munidos de produtos internos,*

$$\dim(U) = \dim(V)$$

e $T \in \mathcal{L}(U, V)$ *uma isometria de* $(U, +, \cdot)$ *em* $(V, +, \cdot)$.

Então a transformação linear $\underline{T}$ *é um isomorfismo de* $(U, +, \cdot)$ *em* $(V, +, \cdot)$.

Prova:

Como os espaços vetoriais reais (ou complexos) $(U, +, \cdot)$ e $(, +, \cdot)V$ têm a mesma dimensão, pelo Corolário (14.246) acima, segue que a transformação linear $\underline{T}$ é injetora.

Como

$$\dim(U) = \dim(V),$$

do Corolário (10.162), temos que a transformação linear $\underline{T}$ é uma bijeção, isto é, um isomorfismo de $(U, +, \cdot)$ em $(V, +, \cdot)$, completando a demonstração do resultado.

∎

Apliquemos estas idéias ao:

Exemplo 14.248 *Sejam* $\left(\mathbb{R}^2, +, \cdot\right)$ *espaço vetorial real, munido do produto interno (14.19) (com* $n = 2$*) e* $T \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2\right)$ *tal que, a matriz do operador linear* $\underline{T}$ *em relação a uma base ortonormal de* $\left(\mathbb{R}^2, +, \cdot\right)$ *é dada por*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}. \tag{14.249}$$

Pergunta-se: o operador linear $\underline{T}$ *é uma isometria em* $\left(\mathbb{R}^2, +, \cdot, \langle \cdot, \cdot \rangle\right)$ *?*

Resolução:

Vejamos, se

$$\mathcal{B} \doteq \{u, v\}$$

é uma base ortonormal de $\left(\mathbb{R}^2, +, \cdot\right)$ e

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

é a matriz de uma isometria $S \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2\right)$ com relação à base $\mathcal{B}$, então deveremos ter:

$$S(u) = a \cdot u + c \cdot v, \tag{14.250}$$
$$S(v) = b \cdot u + d \cdot v. \tag{14.251}$$

Notemos que, como o conjunto $\mathcal{B} = \{u, v\}$ é uma base ortonormal de $\left(\mathbb{R}^2, +, \cdot\right)$, segue que

$$\begin{aligned} \langle S(u), S(v) \rangle &= \langle a \cdot u + c \cdot v, b \cdot u + d \cdot v \rangle \\ &= a\,c\,\underbrace{\langle u, u \rangle}_{=1} + a\,d\,\underbrace{\langle u, v \rangle}_{=0} + c\,b\,\underbrace{\langle v, u \rangle}_{=0} + c\,d\,\underbrace{\langle v, v \rangle}_{=1} \\ &= a\,b + c\,d. \end{aligned} \tag{14.252}$$

em particular, teremos

$$\|S(u)\| = \sqrt{a^2 + c^2} \qquad \text{e} \qquad \|S(u)\| = \sqrt{b^2 + d^2}\,. \tag{14.253}$$

Pelo item 2. do Teorema (14.238), deveremos ter:

$$\underbrace{\|S(u)\|}_{\overset{(14.253)}{=}\sqrt{a^2+c^2}} = \|u\| = 1 \qquad \text{e} \qquad \|S(v)\|_{\overset{(14.253)}{=}}\sqrt{b^2 + d^2}\|v\| = 1.$$

Além do mais,

$$\underbrace{\langle S(u)\,, S(v)\rangle}_{\overset{(14.252)}{=} a\,b + b\,d} = \langle u\,, v\rangle = 0\,.$$

Logo, das considerações acima, os coeficientes $a\,, b\,, c\,, d \in \mathbb{R}$ deverão satisfazer o seguinte sistema (não linear)

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ a\,b + c\,d = 0 \end{cases}.$$

Deste modo, o operador linear T **não** pode se uma isometria pois, por exemplo,

$$a^2 + c^2 \overset{(14.249)}{=} 1^2 + (-2)^2 = 5 \neq 1\,.$$

□

Observação 14.254 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *espaço vetorial* **real**, *finitamente gerado, munido de um produto interno, o conjunto*

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1\,, u_2\,, \cdots, u_n\}$$

uma base ortonormal de $(U\,, +\,, \cdot)$ *e* $T \in \mathcal{L}(U)$ *uma isometria em* $(U\,, +\,, \cdot)$.

1. *Encontremos a matriz do operador linear* $\underline{T}$ *em relação à base* $\mathcal{B}$.

   Consideremos

$$M \doteq [T]_B = (a_{ij})\,.$$

   Para cada $j \in \{1, \cdots, n\}$, *temos que:*

$$T(u_j) = a_{1j} \cdot u_1 + \cdots + a_{nj} \cdot u_n\,. \tag{14.255}$$

   Assim, para cada $i, j \in \{1, \cdots, n\}$, *teremos:*

$$\begin{aligned} \langle T(u_i)\,, T(u_j)\rangle &= \langle a_{1i} \cdot u_1 + \cdots + a_{ni} \cdot u_n\,, a_{1j} \cdot u_1 + \cdots + a_{nj} \cdot u_n\rangle \\ &\overset{\text{Propriedades de p.i. real}}{=} \left\langle \sum_{k=1}^{n} a_{ki} \cdot u_k\,, \sum_{m=1}^{n} a_{mj} \cdot u_m \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} a_{ki}\, a_{mj} \underbrace{\langle u_k\,, u_m\rangle}_{=\delta_{km}} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\, a_{kj} \\ &= a_{1i}\, a_{1j} + \cdots + a_{ni}\, a_{nj}\,. \end{aligned} \tag{14.256}$$

Por outro lado temos que:

$$
\begin{aligned}
\langle T(u_i) , T(u_j) \rangle &= \langle u_i , u_j \rangle \\
&\overset{\text{base ortonormal}}{=} \delta_{ij} \\
&= \begin{cases} 1 , & \text{para } i = j \\ 0 , & \text{para } i \neq j \end{cases} ,
\end{aligned} \tag{14.257}
$$

Portanto, de (14.256) *e* (14.257)*, segue que para cada* $j \in \{1 , 2 , \cdots , n\}$*, deveremos ter:*

$$
a_{1i}\, a_{1j} + a_{2i}\, a_{2j} + \cdots + a_{ni}\, a_{nj} = \delta_{ij} . \tag{14.258}
$$

Portanto, as colunas da matriz $\underline{M}$*, quando vistas como vetores de* $(\mathbb{R}^n , + , \cdot)$*, são vetores ortonormais em* $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$*, munido do produto interno (14.19).*

2. *Vale observar também que, na situação acima, teremos que*

$$
\begin{aligned}
M^t\, M &\overset{\text{Exercício}}{=} (a_{1i}\, a_{1j} + \cdots + a_{ni}\, a_{nj})_{i,j \in \{1,2,\cdots,n\}} \\
&= I_n .
\end{aligned} \tag{14.259}
$$

Com isto introduziremos a:

Definição 14.260 *Uma matriz quadrada de ordem* $\underline{n}$*, com a propriedade acima, isto é, tal que*

$$
M^t\, M = I_n \tag{14.261}
$$

será chamada de **matriz ortogonal***.*

Observação 14.262

1. *Em particular, o Exercício* (A.42) *do Apêndice* (A)*, nos diz que se uma matriz* $M \in M_n(\mathbb{R})$ *é uma matriz ortogonal, então ela será uma matriz inversível e além disso, sua matriz inversa será sua matriz transposta, isto é,*

$$
M^{-1} = M^t.
$$

2. *Observemos que a equação*

$$
M\, M^t = I_n ,
$$

nos diz que as linhas da matriz M*, quando vistas como vetores de* $(\mathbb{R}^n , + , \cdot)$*, são vetores ortonormais no espaço vetorial* $(\mathbb{R}^n , + , \cdot)$*, munido do produto interno (14.19).*

3. *Se a matriz* $M \in M_n(\mathbb{R})$ *é uma matriz ortogonal, então*

$$
\begin{aligned}
[\det(M)]^2 &= \det(M)\,\det(M) \\
&\overset{\det(M) \overset{Apêndice\ (A)}{=} \det(M^t)}{=} \det(M^t)\,\det(M) \\
&\overset{Apêndice\ (A)}{=} \det\left(M^t\,M\right) \\
&\overset{M^t\,M = I_n}{=} \det(I_n) = 1\,,
\end{aligned}
$$

isto é,
$$\det(M) = \pm 1\,. \tag{14.263}$$

Conclusão: *o determinante de uma matriz ortogonal será igual a* ± 1.

4. *A recíproca deste fato* **não** *é verdadeira, isto é, existem matriz quadradas* $A \in M_n(\mathbb{R})$, *de modo que*
$$\det(A) = \pm 1\,,$$
de modo que a matriz quadrada $\underline{A}$ **não** *seja uma matriz ortogonal.*

Deixaremos como exercício para o leitor encontrar uma tal matriz quadrada.

14.10 Máximos Mínimos Locais de Funções, a Valores Reais, de Várias Variáveis Reais

Nesta seção, faremos uso do Corolário (14.189), para classificar os pontos críticos de uma função $f : \mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que é de classe C^2 em um subconjunto aberto $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$.

Para isto, lembremos que a **matriz hessiana da função $\underline{f}$ no ponto $P \in \mathcal{A}$**, indicada por $\mathrm{Hess}_f(P)$, será dada por:

$$
\mathrm{Hess}_f(P) \doteq \begin{pmatrix}
\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(P) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_n}(P) \\[2ex]
\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial x_1}(P) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial x_n}(P) \\
\vdots & \ddots & \vdots \\
\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial x_1}(P) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(P)
\end{pmatrix}. \tag{14.264}
$$

O determinante da matriz acima, será denotado por $H_f(P)$, e denominado **hessiano da função $\underline{f}$ no ponto $P \in \mathcal{A}$**, isto é,

$$
H_f(P) \doteq \begin{vmatrix}
\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(P) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_n}(P) \\[2ex]
\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial x_1}(P) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial x_n}(P) \\
\vdots & \ddots & \vdots \\
\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n\,\partial x_1}(P) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(P)
\end{vmatrix}. \tag{14.265}
$$

Notemos que, para cada $P \in \mathcal{A}$, como $f \in C^2(\mathcal{A};\mathbb{R})$, do Teorema de Schwarz (visto na disciplina de Cálculo 2), segue, para cada $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, temos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(P) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_j}(P)\,.$$

Com isto temos que a matriz hessiana de $\underline{f}$ no ponto $P \in \mathcal{A}$, isto é, a matriz quadrada $Hess_f(P)$, é uma matriz simétrica e portanto podemos aplicar o Corolário (14.189) a mesma e assim obter $\underline{n}$ autovalores reais associados à matriz hessiana de $\underline{f}$ no ponto P e uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ formada por autovetores associados à matriz matriz hessiana de $\underline{f}$ no ponto P, relativamente aos $\underline{n}$ autovalores associados à matriz matriz hessiana de $\underline{f}$ no ponto P.

Teorema 14.266 *(***Classificação de pontos críticos por meio de autovalores***)*
Sejam $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e $f \in C^2(\mathcal{A};\mathbb{R})$.
Suponhamos que o ponto $P_o \in \mathcal{A}$ é um ponto crítico da função $\underline{f}$, isto é,

$$\nabla f(P_o) = O \in \mathbb{R}^n\,.$$

Sejam

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$$

os autovalores (que serão números reais) associados à matriz hessiana da função $\underline{f}$ no ponto P_o.
Então:

1. *se*
$$\lambda_j > 0\,, \quad \text{para cada} \quad j \in \{1, 2, \cdots, n\}\,, \tag{14.267}$$
então o ponto crítico P_o da função $\underline{f}$ será um ponto de mínimo local da função $\underline{f}$.

2. *se*
$$\lambda_j < 0\,, \quad \text{para cada} \quad j \in \{1, 2, \cdots, n\}\,, \tag{14.268}$$
então o ponto crítico P_o da função $\underline{f}$ será um ponto de máximo local da função $\underline{f}$.

3. *se existirem dois autovalores λ_{j_1} e λ_{j_2}, para $j_1, j_2 \in \{1, 2, \cdots, n\}$, com sinais opostos, por exemplo,*
$$\lambda_{j_1} > 0 \quad e \quad \lambda_{j_2} < 0\,,$$
então o ponto crítico P_o da função $\underline{f}$ será um ponto de sela da função $\underline{f}$.

4. *nos demais casos, isto é,*

   (a) se $\lambda_j \geq 0$, para todo $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ e existe, pelo menos, um autovalor
$$\lambda_i = 0\,,$$
   ou

(b) se $\lambda_j \leq 0$, *para todo* $j \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}$ *e existe, pelo menos um, um autovalor*

$$\lambda_i = 0\,,$$

não podemos afirmar nada sobre a natureza do ponto crítico P_o *da função* $\underline{f}$.

Demonstração:

Daremos a seguir uma idéia da demonstração.

Ao invés de usarmos a base canônica de $\mathbb{R}^n$, usaremos o Corolário (14.189), que garante que existe uma base ortonormal $\{\vec{v}_1\,,\vec{v}_2\,,\cdots\,,\vec{v}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$, formada por autovetores associados a matriz hessiana da função $\underline{f}$ no ponto P_o.

Além disso, todos os seus autovalores são reais.

Em particular, teremos

$$\mathrm{Hess}(P_o)\vec{v}_j = \lambda_j \cdot \vec{v}_j, \quad \text{para cada} \quad j \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}.$$

Consideremos a função $g : [0\,,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(t) \doteq f\,(P_o + t \cdot \vec{u})\ , \quad \text{para cada} \quad t \in [0\,,1]\,,$$

onde o vetor $\vec{u}$ é um vetor não nulo e, com norma suficientemente pequena, para que o ponto

$$P_o + t \cdot \vec{u} \in A\,, \quad \text{para cada} \quad t \in [0\,,1]\,.$$

Notemos que isto é sempre possível pois o conjunto $\mathcal{A}$ é um subconjunto aberto em $\mathbb{R}^n$ e $P_o \in \mathcal{A}$.

Usando a Regra da Cadeia, podemos mostrar que,

$$g\,'(0) = \nabla f(P_o) \bullet \vec{u} = 0 \quad \text{e} \quad g\,''(0) = [\mathrm{Hess}_f(P_o)\vec{u}] \bullet \vec{u}\,.$$

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Observemos que, da Fórmula de Taylor de ordem 2 para a função $\underline{f}$ no ponto P_o (visto na disciplina de Cálculo 2), quando a norma do vetor $\vec{u}$ é pequena o bastante, o valor de $f(P)$, para $P = P_o + \vec{u}$, ficará suficiente próximo de

$$f(P_o) + \frac{1}{2}\,[\mathrm{Hess}_f(P_o)\vec{u}] \bullet \vec{u}\,.$$

Com isto, escrevendo o vetor $\vec{u}$ na forma (lembremos que $\{\vec{v}_1\,,\vec{v}_2\,,\ldots\,,\vec{v}_n\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$)

$$\vec{u} = h_1 \cdot \vec{v}_1 + h_2 \cdot \vec{v}_2 + \cdots + h_n \cdot \vec{v}_n\,,$$

teremos que:

$$\begin{aligned}
2[f(P) - f(P_o)] &\sim [\mathrm{Hess}_f(P_o)(\vec{u})] \bullet \vec{u} \\
&= [\mathrm{Hess}_f(P_o)(h_1 \cdot \vec{v}_1 + \cdots + h_n \cdot \vec{v}_n)] \bullet (h_1 \cdot \vec{v}_1 + \cdots + h_n \cdot \vec{v}_n) \\
&= [h_1\, \mathrm{Hess}_f(P_o)(\vec{v}_1) + \cdots + h_n\, \mathrm{Hess}_f(P_o)(\vec{v}_n)] \bullet (h_1 \cdot \vec{v}_1 + \cdots + h_n \cdot \vec{v}_n) \\
&\overset{\mathrm{Hess}_f(P_o)\vec{v}_j = \lambda_j \cdot \vec{v}_j}{=} [(h_1\lambda_1) \cdot \vec{v}_1 + \cdots + (h_n\lambda_n) \cdot \vec{v}_n] \bullet (h_1 \cdot \vec{v}_1 + \cdots + h_n \cdot \vec{v}_n) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} (\lambda_i\, h_i\, h_j)\, (\vec{v}_i \bullet \vec{v}_j) \\
&\overset{\vec{v}_i \bullet \vec{v}_j = \delta_{ij}}{=} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, h_i^2 \\
&= \lambda_1\, h_1^2 + \cdots + \lambda_n\, h_n^2,
\end{aligned} \tag{14.269}$$

pelo fato dos autovetores associados a matriz hessiana da função $\underline{f}$ no ponto crítico P_o formarem uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.

Com isto podemos completar a demonstração deste resultado, tratando cada um dos casos separadamente.

Mostremos que 1. ocorre.

Para isto, suponhamos

$$\lambda_j > 0\,, \quad \text{para cada} \quad j \in \{1\,, 2\,, \cdots n\}\,. \tag{14.270}$$

Então (14.270) implicará que

$$\lambda_1\, h_1^2 + \cdots + \lambda_n\, h_n^2 > 0\,, \quad \text{pois} \quad \vec{u} = h_1 \cdot \vec{v}_1 + \cdots + h_n \cdot \vec{v}_n \neq \vec{O}\,.$$

Logo, de (14.269), teremos

$$2[f(P) - f(P_o)] \sim \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, h_i^2 > 0\,,$$

ou seja,

$$f(P) > f(P_o)\,, \quad \text{para cada} \quad P \sim P_o\,,$$

que nos diz que a função $\underline{f}$ tem um ponto de mínimo local no ponto crítico P_o.

Mostremos que 2. ocorre.

Para isto, suponhamos

$$\lambda_j < 0\,, \quad \text{para cada} \quad j \in \{1\,, 2\,, \cdots\,, n\}\,. \tag{14.271}$$

Então (14.271) implicará que

$$\lambda_1\, h_1^2 + \cdots + \lambda_n\, h_n^2 < 0\,, \quad \text{pois} \quad \vec{u} = h_1 \cdot \vec{v_1} + \cdots + h_n \cdot \vec{v_n} \neq \vec{O}\,.$$

Logo, de (14.269), teremos

$$2[f(P) - f(P_o)] \sim \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, h_i^2 < 0\,,$$

ou seja,

$$f(P) < f(P_o)\,, \quad \text{para cada} \quad P \sim P_o\,,$$

que nos diz que a função $\underline{f}$ tem um ponto de máximo local no ponto crítico P_o.

Com isto mostramos que os itens 1. e 2. são verdadeiros.
Mostremos que 3. ocorre.

Suponhamos agora que existam

$$\lambda_i < 0 \quad \text{e} \quad \lambda_j > 0\,, \quad \text{para algum} \quad i\,,j \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}\,. \tag{14.272}$$

Consideremos

$$P_1 \doteq P_o + h_i \cdot \vec{v_i} \in A\,, \quad \text{onde} \quad h_i \neq 0\,, \tag{14.273}$$

$$P_2 \doteq P_o + h_j \cdot \vec{v_j} \in A\,, \quad \text{onde} \quad h_j \neq 0\,. \tag{14.274}$$

Deste modo temos, por (14.269):

$$\begin{aligned} 2[f(P_1) - f(P_o)] &\sim [\mathrm{Hess}_f(P_o)(h_i \cdot \vec{v_i})] \bullet (h_i \cdot \vec{v_i}) \\ &= h_i^2\,[\mathrm{Hess}_f(P_o)(\vec{v_i})] \bullet \vec{v_i} \\ &\overset{\mathrm{Hess}_f(P_o)(\vec{v_i})=\lambda_i\cdot\vec{v}_i}{=} h_i^2\,[\lambda_i \cdot \vec{v}_i \bullet \vec{v}_i] \\ &\overset{\vec{v}_i\bullet\vec{v}_i=1}{=} \lambda_i\,h_i^2 \overset{(14.272)\text{ e }(14.273)}{<} 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} 2[f(P_2) - f(P_o)] &\sim [\mathrm{Hess}_f(P_o)(h_j \cdot \vec{v_j})] \bullet (h_j \cdot \vec{v_j}) \\ &= h_j^2\,[\mathrm{Hess}_f(P_o)(\vec{v_j})] \bullet \vec{v_j} \\ &\overset{\mathrm{Hess}_f(P_o)(\vec{v_j})=\lambda_j\cdot\vec{v}_j}{=} h_j^2\,[\lambda_j \cdot \vec{v}_j \bullet \vec{v}_j] \\ &\overset{\vec{v}_j\bullet\vec{v}_j=1}{=} \lambda_j h_j^2 \overset{(14.272)\text{ e }(14.274)}{>} 0\,. \end{aligned}$$

Estas duas desigualdades mostram que,

$$f(P_1) < f(P_o) \quad \text{e} \quad f(P_2) > f(P_o)\,, \quad \text{para} \quad P_1, P_2 \sim P_o\,,$$

completando a demonstração de 3., isto é, que a função $\underline{f}$ tem um ponto de sela no ponto crítico P_o.

O caso 4. segue de exemplos semelhantes ao do Teorema do caso bidimensional.

Por exemplo, se considerarmos as funções $f, g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x_1\,,x_2\,,\cdots\,,x_n) \doteq x_1^{\,4}+x_2^{\,4}\,, \quad g(x_1\,,x_2\,,\cdots\,,x_n) \doteq -x_1^{\,4}-x_2^{\,4} \quad \text{e} \quad h(x_1\,,x_2\,,\cdots\,,x_n) \doteq x_1^{\,4}-x_2^{\,4}\,,$$

onde $(x_1\,,x_2\,,\cdots\,,x_n) \in \mathbb{R}^n$, então teremos que que a origem

$$P_o \doteq (0\,,0\,,\cdots\,,0)$$

será um ponto de mínimo local (que também será ponto mínimo global) para a função $\underline{f}$, será um ponto máximo local (que também será ponto de máximo global) para a função $\underline{g}$ e também será um ponto sela para a função $\underline{h}$.

A verificação destes fatos será deixado como exercício para o leitor.

Note que nos três casos, os autovalores associados as respectivas matrizes hessianas das funções $\underline{f}$, $\underline{g}$ e $\underline{h}$, no ponto crítico P_o, serão todos nulos.

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação destes fatos.

∎

Apliquemos o resultado acima ao exemplo:

Exemplo 14.275 *Classifique os pontos críticos da função* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x, y, z) \doteq x^3 - 3x + y^2 + z^2 - 2z, \quad \textit{para cada} \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \tag{14.276}$$

Resolução:

Observemos que a $f \in C^\infty\left(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}\right)$ e para $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 3x^2 - 3, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 2y, \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 2z - 2, \tag{14.277}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) = 6x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) = 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) = 2, \tag{14.278}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(x, y, z) \overset{\text{Teor. } \underline{\text{Schwarz}}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(x, y, z) = 0, \tag{14.279}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial x}(x, y, z) \overset{\text{Teor. } \underline{\text{Schwarz}}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial z}(x, y, z) = 0, \tag{14.280}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial z}(x, y, z) \overset{\text{Teor. } \underline{\text{Schwarz}}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial y}(x, y, z) = 0. \tag{14.281}$$

Encontremos os pontos críticos da função $\underline{f}$ a saber:

$$\begin{aligned} (0, 0, 0) &= \nabla f(x, y, z) \\ &\overset{(14.277)}{=} (3x^2 - 3, 2y, 2z - 2) \end{aligned}$$

$$\text{ou seja,} \quad \begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ 2y = 0 \\ 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{isto é,} \quad \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

ou, equivalentemente,

$$P_1 \doteq (1, 0, 1) \quad \text{ou} \quad P_2 \doteq (-1, 0, 1), \tag{14.282}$$

são os únicos pontos críticos da função f.

A matriz hessiana associada a função $\underline{f}$ em $P=(x\,,y\,,z)$ será dada por:

$$\mathrm{Hess}_f(x\,,y\,,z) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x\,,y\,,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x\,,y\,,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}(x\,,y\,,z) \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x\,,y\,,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x\,,y\,,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}(x\,,y\,,z) \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x}(x\,,y\,,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y}(x\,,y\,,z) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x\,,y\,,z) \end{pmatrix}$$

$$\overset{(14.278),(14.279),(14.280)\text{ e}(14.281)}{=} \begin{pmatrix} 6\,x & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \qquad (14.283)$$

Desta forma teremos, para o ponto $P_1=(1\,,0\,,1)$, que

$$\mathrm{Hess}_f(P_1) = \mathrm{Hess}_f(1\,,0\,,1) \overset{(14.283)}{=} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Como a matriz acima é uma matriz diagonal, seus autovalores são os elementos da diagonal principal, isto é, os autovalores associados a matriz $\mathrm{Hess}_f(P_1)$ serão

$$\lambda_1 = 6 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 2\,. \qquad (14.284)$$

Logo todos os autovalores associados a matriz hessiana de $\underline{f}$, no seu ponto crítico P_1, são positivos (isto é, maiores que zero).

Portanto, do item 1. do Teorema (14.266), segue que o ponto crítico $P_1=(1\,,0\,,1)$ é um ponto de mínimo local da função $\underline{f}$.

Para o ponto $P_2=(-1\,,0\,,1)$ teremos:

$$\mathrm{Hess}_f(P_2) = \mathrm{Hess}_f(-1\,,0\,,1) \overset{(14.283)}{=} \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Como a matriz acima é uma matriz diagonal, seus autovalores são os elementos da diagonal principal, isto é, os autovalores associados a matriz $\mathrm{Hess}_f(P_1)$ serão

$$\lambda_1 = -6 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 2\,. \qquad (14.285)$$

Logo os autovalores da matriz hessiana de $\underline{f}$ em P_2,

$$\lambda_1 = -6 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 2$$

têm sinais contrários.

Portanto, do 3. do Teorema (14.266), segue que o ponto crítico $P_2=(-1\,,0\,,1)$ é ponto de sela da função $\underline{f}$.

□

A seguir temos um exemplo para uma função a valores reais, de quatro variáveis reais, a saber:

Exemplo 14.286 *Classifique os pontos críticos da função* $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x,y,z,w) \doteq 2xy + 2yz + y^2 + z^2 - 2w^2, \quad \textit{para cada} \quad (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4. \tag{14.287}$$

Resolução:

Observemos que a função $\underline{f}$ é de classe C^∞ em $\mathbb{R}^3$ e, para $P = (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4$, teremos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P) = 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(P) = 2x + 2z - 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(P) = 2y + 2z, \quad \frac{\partial f}{\partial w}(P) = -4w, \tag{14.288}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P) = -2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(P) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial w^2}(P) = -4, \tag{14.289}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(P) \overset{\text{Teor. Schwarz}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(P) = 2, \tag{14.290}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial x}(P) \overset{\text{Teor. Schwarz}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial z}(P) = 0, \tag{14.291}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(P) \overset{\text{Teor. Schwarz}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial y}(P) = 2, \tag{14.292}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial w}(P) \overset{\text{Teor. Schwarz}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial w\, \partial x}(P) = 0, \tag{14.293}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial w}(P) \overset{\text{Teor. Schwarz}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial w\, \partial y}(P) = 0, \tag{14.294}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial w}(P) \overset{\text{Teor. Schwarz}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial w\, \partial z}(P) = 0. \tag{14.295}$$

Encontremos os pontos críticos associados à função $\underline{f}$, a saber:

$$\begin{aligned}(0,0,0,0) &= \nabla f(x,y,z,w)\\ &\overset{(14.288)}{=} (2y, 2x + 2y + 2z, 2y + 2z, -4w)\end{aligned}$$

que é equivalente ao sistema linear: $$\begin{cases} 2y = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ 2y + 2z = 0 \\ -4w = 0 \end{cases},$$

isto é, $$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ w = 0 \end{cases},$$

ou seja,

$$P_o \doteq (0,0,0,0) \tag{14.296}$$

será o o único ponto crítico da função $\underline{f}$ em $\mathbb{R}^4$.

Temos que

$$\mathrm{Hess}_f(P) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial w}(P) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial w}(P) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial w}(P) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial w\,\partial x}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial w\,\partial y}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial w\,\partial z}(P) & \frac{\partial^2 f}{\partial w^2}(P) \end{pmatrix}$$

$$\overset{(14.289),(14.290),(14.291),(14.292),(14.293),(14.294)\text{ e }(14.295)}{=} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \tag{14.297}$$

para cada $P = (x\,, y\,, z\,, w) \in \mathbb{R}^4$ (isto é, é uma matriz constante).

Em particular, no ponto crítico $P_o = (0, 0, 0, 0)$, teremos:

$$\mathrm{Hess}_f(P_o) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

O polinômio característico associado à matriz $\mathrm{Hess}(P_o)$ será dado por:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= |\mathrm{Hess}_f(P_o) - \lambda I_4| \\ &= \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^4 - 20\,\lambda^2 - 8\,\lambda + 32 \\ &\overset{\text{Exercício}}{=} (4+\lambda)\left(\lambda^3 - 4\,\lambda^2 - 4\,\lambda + 8\right). \end{aligned} \tag{14.298}$$

Notemos que

$$\lambda_1 = -4 < 0$$

é uma raiz do polinômio caraterístico p_A.

Logo um autovalor associado a matriz hessiana da função $\underline{f}$, no seu ponto crítico P_o, será

$$\lambda_1 = -4.$$

Como p_A é uma função contínua em $\mathbb{R}$ (pois é uma função polinomial) e

$$p_A(0) \overset{(14.298)}{=} 32 > 0 \quad \text{e} \quad p_A(2) \overset{(14.298)}{=} -48 < 0\,,$$

segue, do Teorema do Valor Intermediário (ou do Anulamento), que existe $\lambda_2 \in (0\,,2)$ tal que

$$p_A(\lambda_2) = 0\,,$$

ou seja, existe um autovalor λ_2 associado a matriz hessiana da função $\underline{f}$ no seu ponto crítico P_o que é positivo, ou seja,

$$\lambda_2 > 0.$$

Portanto, do 3. do Teorema (14.266) (temos que $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 > 0$), segue que o ponto crítico $P_o = (0\,,0\,,0\,,0)$ é um ponto de sela da função $\underline{f}$.

O resultado a seguir, que também é um resultado de Álgebra Linear, nos fornece uma condição **necessária e suficiente** para decidir se uma **matriz simétrica** apresenta todos os autovalores positivos ou todos autovalores negativos.

Para enunciá-lo precisaremos da:

Definição 14.299 *Seja* $A = (a_{ij})$ *uma matriz quadrada de ordem* $\underline{n}$ *e* $k \in \{1\,,2\,,\cdots,n\}$.

Definimos **o menor principal de ordem $\underline{k}$ associado a matriz A**, *como sendo o determinante da sub-matriz* $A_k = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq k\\ 1\leq j\leq k}}$, *que será denotado por* $m_k(A)$, *ou seja, se a matriz* A *é dada por*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kk} & \cdots & a_{kn} \\ a_{(k+1)1} & a_{(k+1)2} & a_{(k+1)3} & \cdots & a_{(k+1)k} & \cdots & a_{(k+1)n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

então

$$m_k(A) \doteq \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}.$$

Exemplo 14.300 *Suponhamos que a matriz* A *é dada por*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Encontre todos os menores principais da matriz A.

Resolução:

Temos que

$$\begin{aligned}
m_4[A] &= \det(A) \\
&= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \\
&\overset{\text{Exercício}}{=} 32\,, \qquad (14.301)\\
m_3[A] &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} \\
&\overset{\text{Exercício}}{=} 8\,, \qquad (14.302)\\
m_2[A] &= \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\
&= 6\,, \qquad (14.303)\\
m_1[A] &= \begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix} = 1\,. \qquad (14.304)
\end{aligned}$$

□

Com isto temos o seguinte resultado:

Teorema 14.305 *Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz quadrada simétrica de ordem $\underline{n}$.*

1. *Todos os autovalores associados à matriz A são maiores que zero se, e somente se,*
$$m_k(A) > 0\,, \quad \textit{para cada} \quad k \in \{1\,, 2\,, \cdots n\}\,. \tag{14.306}$$

2. *Todos os autovalores associados à matriz A são menores que zero se, e somente se,*
$$m_k(A) < 0\,, \quad \textit{para} \quad k \in \{1\,, 2\,, \cdots\,, n\} \quad \textit{que é ímpar,}$$
e
$$m_k(A) > 0,\,, \quad \textit{para} \quad k \in \{1\,, 2\,, \cdots\,, n\} \quad \textit{que é ímpar,}$$
ou seja,
$$m_{2k-1}(A) < 0\,, \quad \textit{para} \quad k \in \{1\,, 2\,, \cdots\,, n\} \tag{14.307}$$
$$\textit{e}$$
$$m_{2k}(A) > 0\,, \quad \textit{para} \quad k \in \{1, \cdots\,, n\}\,. \tag{14.308}$$

Demonstração:

A demonstração deste resultado será omitida.

∎

Observação 14.309 *O item 2. segue do item 1, trocando-se a matriz A pela matriz $-A$ e notando-se que*

$$m_k(-A) = (-1)^k \, m_k(A) \, .$$

A demonstração da identidade acima será deixada como exercício para o leitor.

Com isto podemos tratar do seguinte exemplo :

Exemplo 14.310 *Suponhamos que a matriz hessiana de uma função $f : A \subseteq \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, de classe C^2 em A, no ponto crítico $P_o \in A$, onde A é um subconjunto aberto em $\mathbb{R}^4$, seja dada por:*

$$\mathrm{Hess}_f(P_o) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} . \tag{14.311}$$

Classifique o ponto crítico P_o da função $\underline{f}$.

Resolução:

Observemos que:

$$m_4[\mathrm{Hess}_f(P_o)] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \overset{\text{Exercício}}{=} 4 > 0 \, ,$$

$$m_3[\mathrm{Hess}_f(P_o)] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} \overset{\text{Exercício}}{=} 1 > 0 \, ,$$

$$m_2[\mathrm{Hess}_f(P_o)] = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0 \, ,$$

$$m_1[\mathrm{Hess}_f(P_o)] = \begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix} = 1 > 0 \, .$$

Como

$$m_k[\mathrm{Hess}_f(P_o)] > 0 \, , \quad \text{para cada} \quad k \in \{1, 2, 3, 4\} \, ,$$

segue, do 1. Teorema (14.305), que todos os autovalores da matriz $\mathrm{Hess}_f(P_o)$ são maiores que zero.

Logo, do item 1. do Teorema (14.266), segue que a função $\underline{f}$ terá um mínimo local no ponto crítico P_o.

□

14.11 Exercícios

24.11.2015 - 29.a - 2.a Prova

Capítulo 15

Forma Canônica de Jordan

26.11.2015 - 30.a

15.1 Introdução e Exemplos

Como vimos no capítulo 13, nem todo operador linear, definido em um espaço vetorial real (ou complexo) de dimensão finita, é diagonalizável.

No entanto, se $(U\,,+\,,\cdot)$ é um espaço vetorial real finitamente gerado e $T \in \mathcal{L}(U)$, existirá uma base com relação a qual, a matriz do operador linear $\underline{T}$, em relação a essa base, ficará "mais parecida" a uma matriz diagonal.

A seguir daremos uma pequena descrição de como é a forma desta tal matriz "mais parecida" com uma matriz diagonal, mas antes precisamos de algumas notações.

Observação 15.1 *Consideremos* $(U\,,+\,,\cdot)$ *um espaço vetorial real, de dimensão finita, igual a* $\underline{n}$*, e* $T \in \mathcal{L}(U)$*.*

1. *Seja* $p_T(\lambda)$ *o polinômio característico associado ao operador linear* $\underline{T}$*.*

   Observemos que, pelo Teorema Fundamental da Álgebra, o polinômio p_T *fatora-se como*

$$p_T(\lambda) = \underbrace{(\lambda_1 - \lambda)^{m_1} \cdots (\lambda_n - \lambda)^{m_n}}_{\text{fatores correspondentes as raízes reais}} \cdot \underbrace{\left[(\lambda - \alpha_1)^2 + {\beta_1}^2\right]^{p_1} \cdots \left[(\lambda - \alpha_k)^2 + {\beta_k}^2\right]^{p_k}}_{\text{fatores correspondentes as raízes complexas e não reais}}, \quad (15.2)$$

   onde

$$\lambda_i \neq \lambda_j\,, \quad \textit{para cada} \quad i \neq j\,, \quad \textit{com} \quad i\,,j \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}$$

   e

$$(\alpha_r\,,\beta_r) \neq (\alpha_s\,,\beta_s) \quad \textit{para} \quad r \neq s\,, \quad \textit{com} \quad r\,,s \in \{1\,,2\,,\cdots\,,k\}.$$

2. *Notemos que, para cada* $r \in \{1\,,2\,,\cdots\,,k\}$*, a parcela do tipo*

$$(\lambda - \alpha_r)^2 + {\beta_r}^2$$

   surge do fato que, como o polinômio p_T *tem coeficientes reais, se*

$$\alpha_r + i \cdot \beta_r$$

for uma raiz complexa, não real, desse polinômio, então o conjunto

$$\alpha_r - i \cdot \beta_r$$

também será um raiz do polinômio p_T.

Assim teremos:

$$(\alpha_r + i \cdot \beta_r) \cdot (\alpha_r - i \cdot \beta_r) = {\alpha_r}^2 + {\beta_r}^2 .$$

3. *De modo geral, o Teorema Fundamental da Álgebra, garante que podemos escrever o polinômio* p_T *como produto de um número finito de fatores que serão potências naturais, de polinômios irredutíveis do 1.o e do 2.o graus sobre* $\mathbb{R}$.

4. *Notemos que, para cada* $r \in \{1, 2, \cdots, k\}$, *temos que o escalar*

$$\alpha_r + i \cdot \beta_r$$

será uma raiz complexa (não real) do polinômio característico p_T.

Além disso temos

$$\begin{aligned} m_1 + \cdots + m_n + 2\,p_1 + \cdots + 2\,p_k &= n \\ &= \dim(U) . \end{aligned} \tag{15.3}$$

5. *Se*

$$\lambda \in \mathbb{R}$$

(que, mais adiante, será uma raiz real do polinômio p_T*) e*

$$r \in \mathbb{N},$$

denotaremos por $\underline{J(\lambda; r)}$, *a matriz quadrada de ordem* $\underline{r}$, *cujos elementos da diagonal principal são iguais a* $\underline{\lambda}$ *e todos os elementos, logo acima dessa diagonal, são iguais a* 1, *ou seja,*

$$\begin{aligned} J(\lambda; k) &\doteq \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}_{r \times r} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{r \times r} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{r \times r} \\ &= \lambda \cdot I_r + N , \end{aligned} \tag{15.4}$$

onde I_r *é a matriz identidade de ordem* $\underline{r}$ *e*

$$N \doteq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{r \times r} . \tag{15.5}$$

6. *Notemos que* N^r *é a matriz nula, isto é,*

$$N^r = O ,$$

ou seja, a matriz quadrada $\underline{N}$ *é uma matriz nilpotente (de ordem* r*).*

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

7. *Se*

$$\alpha + i \cdot \beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$

(que, mais adiante, será uma raiz complexa, não real, do polinômio p_T*) e*

$$r \in \mathbb{N}$$

é um número **par**, *denotaremos por* $\underline{R(\alpha , \beta ; r)}$ *a matriz quadrada de ordem* $\underline{r}$ *definida por:*

$$R(\alpha , \beta ; r) \doteq \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\beta & \alpha \end{pmatrix}_{r \times r} . \tag{15.6}$$

8. *Sejam*

$$B_1 , B_2 , \cdots , B_k$$

matrizes quadradas, não necessariamente, de ordens iguais.

Denotaremos por

$$\mathrm{diag}\,(B_1 , B_2 , \cdots , B_k)$$

a matriz quadrada de ordem igual à soma das ordens de cada uma das matrizes quadradas $B_1, \cdots , B_k$*, dada por: por*

$$\mathrm{diag}\,(B_1 , B_2 , \cdots , B_k) \doteq \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_k \end{pmatrix} . \tag{15.7}$$

9. *Para ilustar se, por exemplo,*

$$B_1 \doteq \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad e \quad B_2 \doteq \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

então

$$\operatorname{diag}(B_1, B_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -4 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Com isto, temos o seguinte resultado, cuja demonstração será omitida (para maiores detalhes ver [L]):

Teorema 15.8 (Forma Canônica de Jordan) *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real, de dimensão finita e* $T \in \mathcal{L}(U)$*, cujo polinômio característico é dado por* (15.2)*, onde*

$$\lambda_i \neq \lambda_j, \quad \textit{para cada} \quad i \neq j, \quad \textit{com} \quad i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$$

e

$$(\alpha_r, \beta_r) \neq (\alpha_s, \beta_s) \quad \textit{para} \quad r \neq s, \quad \textit{com} \quad r, s \in \{1, 2, \cdots, k\}.$$

e

$$\beta_r > 0, \quad \textit{para cada} \quad r \in \{1, 2, \cdots, k\}. \tag{15.9}$$

Então existe uma base de $(U, +, \cdot)$*, em relação a qual a matriz do operador linear* $\underline{T}$ *é da forma*

$$J = \operatorname{diag}(J_1, J_2, \cdots, J_p, R_1, R_2, \cdots, R_q), \tag{15.10}$$

onde as matrizes quadradas

$$J_1, J_2, \cdots, J_p$$

são da forma

$$J(\lambda; r), \quad \textit{para algum} \quad r \in \mathbb{N} \quad e \quad \lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$$

e as matrizes quadradas

$$R_1, R_2, \cdots, R_q$$

são da forma

$$R(\alpha, \beta; s), \quad \textit{para algum} \quad s \in \mathbb{N} \quad e \quad (\alpha, \beta) \in \{(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \cdots, (\alpha_k, \beta_k)\}.$$

Observação 15.11

1. *Pode-se mostrar que a matriz* $\underline{J}$*, obtida em* (15.10)*, é única, a menos de permutações dos seus* blocos *que compõem a sua diagonal.*

2. *Se* λ *é um autovalor real do operador linear* $\underline{T}$*, então a soma das ordens dos blocos do tipo*
$$J(\lambda\,;\,s)$$
será igual à multiplicidade algébrica do autovalor λ.

3. *Se* $\alpha+i\cdot\beta$ *é uma raiz complexa, não real, do polinômio* p_T *(ou seja, um autovalor complexo, não real), então a soma das ordens dos blocos do tipo*
$$R(\alpha\,,\beta\,;\,s)$$
é igual ao dobro da multiplicidade algébrica da raiz $\alpha+i\cdot\beta$.

4. *Se* λ *é um autovalor real do operador linear* $\underline{T}$*, com multiplicidade geométrica igual a* $\underline{r}$*, então existem, exatamente,* $\underline{r}$ *blocos do tipo*
$$J(\lambda\,;\,s)$$
associados ao autovalor λ.

5. *Suponha que*
$$p_T(\lambda)=(\lambda_1-\lambda)^{m_1}\cdots(\lambda_n-\lambda)^{m_n}$$
onde
$$\lambda_i\neq\lambda_j\,,\quad \textit{se}\quad i\neq j\,,\quad \textit{com}\quad i\,,j\in\{1\,,2\,,\cdots\,,n\}\,.$$
Se, para cada $j\in\{1\,,2\,,\cdots\,,n\}$, $\underline{m_j}$ *(a multiplicidade algébrica) é igual a multiplicidade geométrica de* $\underline{\lambda_j}$*, então o Teorema de Jordan nos diz que o operador linear* $\underline{T}$ *é diagonalizável.*

   De fato, pois neste caso os blocos do tipo
$$R(\alpha\,,\beta\,;\,s)$$
não ocorrerão.

6. *Em resumo, o Teorema de Jordan nos diz que a matriz de um operador linear* $\underline{T}$*, com relação a uma base arbitrária, é semelhante a uma matriz da forma* (15.10)*, que será denominada,* **matriz de blocos**.

Apliquemos as idéias acima aos seguinte exemplos:

Exemplo 15.12 *Seja* $(U\,,+\,,\cdot)$ *um espaço vetorial real, finitamente gerado e* $T\in\mathcal{L}(U)$.

Encontre as possíveis matrizes na forma canônica de Jordan do operador linear $\underline{T}$*, cujo polinômio característico é dado por*
$$p_T(\lambda)=(2-\lambda)^3\,(1-\lambda)\,,\quad \textit{para cada}\quad \lambda\in\mathbb{C}\,. \tag{15.13}$$

Resolução:

Notemos que, de (15.13), o operador linear $\underline{T}$ possui dois autovalores, a saber,

$$\lambda_1 \doteq 2 \quad \text{e} \quad \lambda_2 \doteq 1\,,$$

pois são as únicas raizes do polinômio p_T.

Como as multiplicidades algébricas e geométrica do autovalor

$$\lambda_2 = 1$$

são iguais a 1 (pois o mesmo é uma raíz simples do polinômio p_T), temos que o único bloco correspondente a este autovalor será

$$J(\lambda_2\,;\,1) = (\lambda_2) = (1)\,. \tag{15.14}$$

Com relação ao autovalor

$$\lambda_1 = 2\,,$$

a sua multiplicidade algébrica é três (é uma raíz tripla do polinômio p_T).

Se sua multiplicidade geométrica for igual a 3, então existirão três blocos associados a este autovalor e todos eles são iguais a (2).

Neste caso, a matriz da forma canônica de Jordan, para este operador será forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \tag{15.15}$$

isto é, o operador linear $\underline{T}$ será diagonalizável.

Se a multiplicidade geométrica do autovalor

$$\lambda_1 = 2$$

for igual a 2, então existem dois blocos correspondentes a este autovalor que serão da forma

$$J(2\,;\,1) = (2) \qquad J(2\,;\,2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Assim, a matriz da forma canônica de Jordan para este operador linear será da forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{15.16}$$

Se a multiplicidade geométrica do autovalor

$$\lambda_1 = 2$$

for igual a 1, então existirá um bloco correspondente a este autovalor, que será da forma:

$$J(2\,;\,3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Assim, a matriz da forma canônica de Jordan para este operador linear seria da forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{15.17}$$

De (15.15), (15.16) e (15.17), segue que as possíveis matrizes na forma canônica de Jordam associadas ao operador linear $\underline{T}$ serão:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

□

Deixaremos a resolução do seguinte exercício para o leitor:

Exemplo 15.18 *Para o Exemplo (15.12) acima, encontre qual das possíveis formas da matriz de Jordan associada ao operador linear* T *é a que, realmente, ocorrerá.*

Sugestão: encontre $V(\lambda_1)$.

□

Temos também o:

Exemplo 15.19 *Seja* $(U\,,+\,,\cdot)$ *um espaço vetorial real, finitamente gerado e* $T \in \mathcal{L}(U)$.

Encontre as possíveis matrizes na forma canônica de Jordan de um operador linear $\underline{T}$*, cujo polinômio característico é dado por*

$$p_T(\lambda) = (1-\lambda)^2 \left(4+\lambda^2\right), \quad \textit{para cada} \quad \lambda \in \mathbb{C}\,. \tag{15.20}$$

Resolução:

Utilizando a notação do Teorema (15.8), temos que

$$\lambda_1 = 1\,, \quad \alpha = 0 \quad \text{e} \quad \beta = 2\,.$$

Como

$$\alpha + i \cdot \beta = 0 + i \cdot 2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$

tem multiplicidade igual a 1 (como raiz do polinômio p_T), associado ao mesmo só existe um bloco do tipo

$$\begin{aligned} R(0\,,\,2\,;\,2) &= R(\alpha\,,\beta\,;\,r) \\ &\overset{(15.6)}{=} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Se a multiplicidade geométrica do autovalor

$$\lambda_1 = 1$$

for igual a 2, então existem apenas dois blocos associados a este autovalor e são iguais a (1).

Neste caso, a matriz da forma canônica de Jordan para este operador linear $\underline{T}$ será da forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{15.21}$$

Se a multiplicidade geométrica do autovalor

$$\lambda_1 = 1$$

for 1, então existe apenas um bloco, de ordem dois, associado a este autovalor que será do tipo

$$\begin{aligned} J(1\,;\,2) &= J(\lambda_1\,;\,2) \\ &\overset{(15.4)}{=} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Neste caso, a matriz da forma canônica de Jordan para este operador linear T será da forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{15.22}$$

De (15.21) e (15.22), segue que as possíveis matrizes na forma canônica de Jordam associadas ao operador linear $\underline{T}$ serão:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Deixaremos a resolução do seguinte exercício para o leitor:

Exemplo 15.23 *Para o Exemplo (15.19) acima, encontrar qual das possíveis formas da matriz de Jordan associada ao operador linear $\underline{T}$ é a que, realmente, ocorrerá.*

Tratemos agora do:

Exemplo 15.24 *Sejam $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ espaço vetorial real (onde $+$ e $\cdot$ são as operações usuais de $\mathbb{R}^4$) e a palicação $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dada por*

$$T(x\,, y\,, z\,, t) = (2\,x+y+z+t\,, 2\,y-z-t\,, 3\,z-t\,, 4\,t)\,, \quad \textit{para cada} \quad (x\,, y\,, z\,, t) \in \mathbb{R}^4\,. \tag{15.25}$$

Mostre que $T \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^4\right)$ e encontre uma base de $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ com relação a qual a matriz do operador linear $\underline{T}$ está na forma canônica de Jordan.

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor verificar que $T \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^4\right)$.

Se

$$\mathcal{B} \doteq \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$$

é a base canônica de $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$, segue que:

$$\begin{aligned}
T(1,0,0,0) &\overset{(15.26)}{=} (2,0,0,0)\\
&= 2 \cdot (1,0,0,0) + 0 \cdot (0,1,0,0) + 0 \cdot (0,0,1,0) + 0 \cdot (0,0,0,1)\\
T(0,1,0,0) &\overset{(15.26)}{=} (1,2,0,0)\\
&= 1 \cdot (1,0,0,0) + 2 \cdot (0,1,0,0) + 0 \cdot (0,0,1,0) + 0 \cdot (0,0,0,1)\\
T(0,0,1,0) &\overset{(15.26)}{=} (1,-1,3,0)\\
&= 1 \cdot (1,0,0,0) + (-1) \cdot (0,1,0,0) + 3 \cdot (0,0,1,0) + 0 \cdot (0,0,0,1)\\
T(0,0,0,1) &\overset{(15.26)}{=} (1,-1,-1,4)\\
&= 1 \cdot (1,0,0,0) + (-1) \cdot (0,1,0,0) + (-1) \cdot (0,0,1,0) + 4 \cdot (0,0,0,1)\,.
\end{aligned}$$

Logo a matriz do operador linear $\underline{T}$ com relação à $\mathcal{B}$ de $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$, será dada por:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\,. \tag{15.26}$$

O polinômio característico associado ao operador linear $\underline{T}$, será dado por:

$$\begin{aligned}
p_T(\lambda) &= \det\left[[T]_{\mathcal{B}} - \lambda I_4\right]\\
&\overset{\text{Exercício}}{=} (3-\lambda)\,(4-\lambda)\,(2-\lambda)^2\,, \quad \text{para cada} \quad \lambda \in \mathbb{C}\,.
\end{aligned}$$

Com isto podemos mostrar que

$$V(3) = [(0\,,1\,,-1\,,0)] \quad \text{e} \quad V(4) = [(0\,,0\,,1\,,-1)]\,.$$

A verificação destes fatos serão deixados como exercício para o leitor.

Desta forma vemos que

$$\dim[V(3)] = \dim[V(4)] = 1\,.$$

Vejamos qual a dimensão de $V(2)$.

Temos que $(x\,,y\,,z\,,t) \in V(2)$ se, e somente se,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{ou seja (Exercício),} \qquad (x\,,y\,,z\,,t) = (x\,,0\,,0\,,0) = x \cdot (1\,,0\,,0\,,0)\,,$$

para cada $x \neq 0$.

Assim,

$$\begin{aligned} & V(2) = [(1\,,0\,,0\,,0)] \\ \text{logo,} \qquad & \dim[V(2)] = 1 \end{aligned}$$

e o operador linear $\underline{T}$ não será diagonalizável, pois a multiplicidade algébrica desse autovalor (que é igual a 2) é diferente da multiplicidade geométrica do mesmo (que é igual a 1).

Sendo assim, a matriz do operador linear $\underline{T}$, na forma canônica de Jordan, será da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Notemos que se considerarmos

$$u_1 \doteq (1\,,0\,,0\,,0), \quad u_3 \doteq (0\,,1\,,-1\,,0) \quad \text{e} \quad u_4 \doteq (0\,,0\,,1\,,-1)$$

(que são autovetores do operador linear $\underline{T}$), então para que o conjunto

$$\mathcal{C} \doteq \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$$

seja a base de $\left(\mathbb{R}^4\,,+\,,\cdot\right)$ procurada, o vetor u_2 deverá satisfazer:

$$\begin{aligned} & T(u_2) = u_1 + 2 \cdot u_2, \\ \text{ou seja,} \qquad & (T - 2 \cdot I)(u_2) = u_1 \\ \text{ou ainda ,} \qquad & \{[T]_{\mathcal{B}} - 2 \cdot I_4\}\,[u_2]_{\mathcal{B}} = [u_1]_{\mathcal{B}}\,. \end{aligned} \tag{15.27}$$

Desta forma, considerando-se

$$u \doteq (a\,,b\,,c\,,d)\,,$$

segue que

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

e portanto, de (15.27), segue que:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{=[T]_{\mathcal{B}}-2\cdot I_4} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cuja solução geral é da forma

$$(a\,,1\,,0\,,0)\,, \quad \text{para cada} \quad a \in \mathbb{R}\,.$$

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Podemos, por exemplo, considerar

$$u_2 \doteq (0\,,1\,,0\,,0)$$

e isto nos fornecerá a base de $\left(\mathbb{R}^4\,,+\,,\cdot\right)$, com relação a qual a matriz do operador linear $\underline{T}$ está na forma canônica de Jordan.

15.2 Exercícios

$\boxed{\textbf{1.12.2015 - 31.a - Prova Substitutiva}}$

Apêndice A

Matrizes

A.1 Introdução

Neste capítulo trataremos de um elemento que é de grande importância, em particular, no estudo da Álgebra Linear, a saber: Matrizes.

Lembraremos a definição, as operações, propriedades das mesmas e algumas aplicações que são, particularmente, importantes para o nosso contexto.

Introduziremos o escalonamento de matrizes e apresentaremos algumas aplicações desse processo para resolução des sistemas lineares (homogêneos e não homoêneos) e para inversão de matrizes.

No Apêndice (B) apresentamos o método de Crammer para resolução de sistemas lineares.

A.2 Definições Básicas

Definição A.1 *Uma* **matriz** *é uma tabela retangular de números reais ou complexos.*

Tais números são denominados **entradas** *da matriz.*

Uma matriz será sempre indicada por uma letra maiúscula: $A, B, C, \cdots$.

Uma matriz horizontal será denominada **matriz linha**.

Uma matriz vertical será dita **matriz coluna**.

A **ordem (ou tamanho) de uma matriz** *é o seu número de linhas pelo seu número de colunas.*

Observação A.2

1. *Em geral uma matriz, de tamanho* $n \times m$, *com entradas*

$$a_{ij}, \quad \textit{para cada} \quad i \in \{1, 2, \cdots, n\} \quad \textit{e} \quad j \in \{1, 2, \cdots, m\}$$

tem a seguinte forma:

$$A \doteq \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{n \times m}$$

onde $n, m \in \mathbb{N}$ *são fixos.*

2. *No caso acima diremos que a matriz* A *tem* $\underline{n}$ **linhas** *e* $\underline{m}$ **colunas**.

3. *Quando* $n = m$ *a matriz* A *será dita* **quadrada de ordem** $\underline{n}$.

4. *No caso acima, as entradas*

$$a_{ii}\,, \quad \textit{para cada} \quad i \in \{1, \cdots, n\}$$

formarão, o que denominaremos de, **diagonal principal** *da matriz .*

Exemplo A.3 *A matriz*

$$A \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -3 \end{pmatrix}$$

é uma matriz (complexa) coluna, de tamanho 3×1.

Exemplo A.4 *A matriz*

$$B \doteq \begin{pmatrix} 10 & 50 & \pi & e \end{pmatrix}$$

é uma matriz (real) linha, de tamanho 1×4.

Exemplo A.5 *A matriz (real)*

$$C \doteq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

é uma matriz de tamanho 3×3, *logo quadrada de ordem* 3.

Notação A.6 *Denotaremos por*

$$M_{nm}(\mathbb{R}) \doteq \{\textit{matrizes de tamanho } n \times m\,, \textit{ que tem todas as entradas números reais}\}$$

e de modo semelhante definimos

$$M_{nm}(\mathbb{C}) \doteq \{\textit{matrizes de tamanho } n \times m \ , \textit{ que tem todas entradas números complexos}\}.$$

Quando

$$n = m\,,$$

dentotaremos $M_{nn}(\mathbb{R})$ *(ou* $M_{nn}(\mathbb{C})$*) simplesmente por* $M_n(\mathbb{R})$ *(ou* $M_n(\mathbb{C})$*), isto é,*

$$M_n(\mathbb{R}) \doteq \{\textit{matrizes de quadradas de ordem } \underline{n}\,, \textit{ que tem todas as entradas números reais}\}$$

e de modo análogo definimos $M_n(\mathbb{C})$.

Para simplificar a notação acima, denotaremos o conjunto acima por M_{nm}, *quando não for importante o tipo de entradas da matriz (se reais ou complexas).*

Nos exemplos acima teremos que

$$A \in M_{31}(\mathbb{C}), \quad B \in M_{14}(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad C \in M_3(\mathbb{R}).$$

Definição A.7 *Para* $n, m, p, q \in \mathbb{N}$, *sejam* $A \in M_{nm}$ *e* $B \in M_{pq}$.

Diremos que as matrizes A *e* B *são* <u>iguais</u>, *escrevendo* $A = B$, *se e somente se*

$$n = p, \quad m = q \quad e \quad a_{ij} = b_{ij}, \quad \textit{para cada} \quad i \in \{1, 2, \cdots, , n\}, \quad j \in \{1, 2, \cdots, , m\},$$

onde

$$A \doteq (a_{ij}) \quad e \quad B \doteq (b_{ij}),$$

ou seja, duas matrizes são iguais serão iguais se, e somente se, têm o mesmo tamanho e as correspondentes entradas são iguais.

A.3 Operações com Matrizes

Definição A.8 *Para* $n, m, p, q \in \mathbb{N}$ *sejam* $A \in M_{nm}$, $B \in M_{pq}$.

Definiremos a <u>**adição das matrizes A e B**</u>, *indicada por* $A + B$, *se, e somente se,*

$$n = p, \quad m = q$$

e neste este caso, a matriz

$$C \doteq A + B \in M_{nm}$$

terá como entradas

$$c_{ij} \doteq a_{ij} + b_{ij}, \quad \textit{para cada} \quad i \in \{1, 2, \cdots, n\} \quad e \quad j \in \{1, 2, \cdots, m\}, \tag{A.9}$$

onde

$$A \doteq (a_{ij}) \quad e \quad B \doteq (b_{ij}).$$

Observação A.10 *Notemos que, da Definição (A.8) acima, se*

$$A \doteq (a_{ij}), \quad B \doteq (b_{ij}) \quad e \quad C \doteq A + B,$$

então

$$(c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}).$$

Com isto temos:

Exemplo A.11 *Se*

$$A \doteq \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad e \quad B \doteq \begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

então

$$A + B \overset{(A.9)}{=} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1+i \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Com isso temos as seguintes propriedades:

Proposição A.12

1. *O conjunto* M_{nm} *é fechado como a operação de adição definida acima, isto é, a soma de duas matrizes* $n \times m$ *é uma matriz* $n \times m$*;*

2. *A adição em* M_{nm} *é comutativa, isto é,*
$$A + B = B + A\,, \quad \textit{para cada} \quad A, B \in M_{nm}\,;$$

3. *A adição em* M_{nm} *é associativa, isto é,*
$$(A + B) + C = A + B + C\,, \quad \textit{para cada} \quad A, B, C \in M_{nm}\,;$$

4. *A adição em* M_{nm} *tem elemento neutro, isto é, existe uma (única) matriz* $n \times m$*, denominada* **matriz nula**, *indicada por* O *tal que*
$$A + O = A\,, \quad \textit{para cada} \quad A \in M_{nm}\,;$$
A matriz O *é a matriz de ordem* $n \times m$ *cujas entradas são todas zero, isto é,*
$$O \doteq (0_{ij})\,, \quad \textit{onde} \quad 0_{ij} \doteq 0\,, \quad \textit{para cada} \quad i \in \{1\,, 2\,, \cdots, n\} \quad \textit{e} \quad j \in \{1\,, 2\,, \cdots, m\}.$$

5. *A adição em* M_{nm} *adminte elemento oposto, isto é, se* $A \in M_{nm}$*, existe uma (única) matriz* $n \times m$*, denominada* **oposta** *da matriz* A*, denotada por* $-A$ *tal que*
$$A + (-A) = 0\,.$$
A matriz $-A$ *é a matriz de ordem* $n \times m$*, cujas entradas são os opostos das correspondentes entradas da matriz* A*, isto é, se*
$$A = (a_{ij})\,, \quad \textit{então} \quad -A \doteq (-a_{ij})\,.$$

Demonstração:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação das propriedades acima.

∎

Definição A.13 *Se* $A \doteq (a_{ij}) \in M_{nm}$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$ *(respectivamente,* $\mathbb{C}$*) , então a matriz* $B \doteq (b_{ij}) \in M_{nm}$ *cujas entradas são:*
$$b_{ij} \doteq \alpha a_{ij}\,, \quad \textit{para cada} \quad i \in \{1\,, 2\,, \cdots, n\} \quad \textit{e} \quad j \in \{1\,, 2\,, \cdots, m\}, \tag{A.14}$$
será denominada **produto do número real (respectivamente, complexo)** α **pela matriz** A *e indicada por* $\alpha \cdot A$.

Observação A.15 *Segue da Definição (A.13) acima, que se $\alpha \in \mathbb{R}$ (ou $\alpha \in \mathbb{C}$) e $(a_{ij}) \in M_{nm}$ então*

$$\alpha \cdot (a_{ij}) = (\alpha a_{ij}) \,.$$

Exemplo A.16 *Se*

$$A \doteq \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

e $\alpha = -2$, então

$$\alpha \cdot A \overset{(A.14)}{=} \begin{pmatrix} -4 & -6 & -2 \\ -6 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Com isto temos as seguintes propriedades:

Proposição A.17 *Para α, $\beta \in \mathbb{R}$ (respectivamente, $\mathbb{C}$) e $A\,,B \in M_{nm}$ temos:*

1. *O conjunto M_{nm} é fechado como a operação de muliplicação de número (real ou complexo) por matrizes definida acima, isto é, a multiplicação de um número (real ou complexo) por uma matriz $n \times m$ é uma matriz $n \times m$;*

2. *Vale a distributiva do produto de número real (respectivamente, complexo) pela soma de matrizes, isto é:*

$$\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B \,;$$

3. *Vale a distributiva da soma de números reais (ou complexos) pelo produto de matriz, isto é:*

$$(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot B \,;$$

4. *Vale a associativa do produto de números reais (ou complexos) pelo produto de matrizes, isto é:*

$$(\alpha\,\beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A) \,;$$

5. *Vale*

$$1 \cdot A = A \,;$$

6. *Vale*

$$0 \cdot A = O \,.$$

Demonstração:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação das propriedades acima.

∎

Definição A.18 *Sejam* $A \doteq (a_{ik}) \in M_{nm}$, $B \doteq (b_{kj}) \in M_{mp}$.

Definimos o **produto da matriz A pela matriz B**, *como sendo a matriz*

$$C \doteq (c_{ik}) \in M_{np} \,,$$

indicada por AB, *cujas entradas são dadas por*

$$c_{ij} \doteq \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} \,, \quad \textit{para cada} \quad i \in \{1, 2, \cdots, n\} \quad e \quad j \in \{1, 2, \cdots, p\}. \tag{A.19}$$

Observação A.20

1. *Para podermos realizar o produto de duas matrizes, isto é,*

$$AB \,,$$

é necessário que o número de colunas da matriz A, *seja igual ao número de linhas da matriz* B.

2. *O produto* **não** *é comutativo, isto é, em geral*

$$AB \neq BA \,,$$

como mostra o seguinte exemplo:

Se

$$A \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad B \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

então

$$AB \overset{(A.19)}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad BA\text{stackrel}(A.19)= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

ou seja, neste caso,

$$AB \neq BA \,.$$

3. *Este modo de definir produto de matrizes é útil em diversas situações.*

Entre outras, para transformarmos sistemas lineares de equações algébricas do 1.o grau em equações matriciais, como mostra o exemplo:

$$\begin{cases} z_1 = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 \\ z_2 = a_{21} y_1 + a_{22} y_2 \\ z_3 = a_{31} y_1 + a_{32} y_2 \end{cases} \qquad \textit{é equivalente a:} \quad z = A \cdot y \,,$$

onde

$$z \doteq \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}, A \doteq (a_{ij}) \quad e \quad y \doteq \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} .$$

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação da igualdade acima.

Temos as seguintes propriedades para o produto de matrizes:

Proposição A.21

1. *O produto de matrizes é associativo, isto é:*

$$A(BC) = (AB)C\,, \quad \textit{para cada} \quad A \in M_{nm}\,,\ B \in M_{mp} \quad \textit{e}\ C \in M_{pq}\,;$$

2. *Vale a distributiva do protudo de matrizes pela soma de matrizes, isto é:*

$$A(B + C) = AB + AC\,, \quad \textit{para cada} \quad A \in M_{nm} \quad \textit{e} \quad B\,,C \in M_{mp}\,;$$

3. *Vale a distributiva da soma de matrizes pelo produto de matrizes, isto é:*

$$(A + B)C = AC + BC\,, \quad \textit{para cada} \quad A\,,B \in M_{nm} \quad \textit{e} \quad C \in M_{mp}\,;$$

4. *Vale a associativa do produto de números reais (ou complexos) por matrizes, isto é:*

$$\alpha(AB) = (\alpha A)(B) = A(\alpha B), \quad \textit{para cada} \quad \alpha \in \mathbb{R}(\ \textit{ou}\ \mathbb{C})\,,\ A \in M_{nm} \quad \textit{e} \quad B \in M_{mp}\,.$$

Demonstração:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação das propriedades acima.

∎

Com isto temos o seguinte exercício, cuja resolução deixaremos a cargo do leitor:

Exemplo A.22 *Mostre que a matriz*

$$A \doteq \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

é solução da equação

$$z^3 - 5z^2 + 8z - 4 = 0\,,$$

onde

$$A^n \doteq \underbrace{A \cdots A \cdots A}_{n-\textit{vezes}}\,.$$

Definição A.23 *A matriz* $I_n \in M_n$ *cujas entradas são:*

$$a_{ij} \doteq \delta_{ij} = \begin{cases} 0\,, & \textit{para} \quad i \neq j \\ 1\,, & \textit{para} \quad i = j \end{cases}\,,$$

onde $i\,,j \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}$*, será denominada* **matriz identidade** *de ordem* $\underline{n}$.

Com isto temos a:

Proposição A.24 *Se* $A \in M_{nm}$ *então*

$$I_n\,A = A\,I_m = A\,.$$

Demonstração:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação das propriedades acima.

∎

Observação A.25 *Para números reais (ou complexos) temos a seguinte propriedade: se* $\alpha \neq 0$*, então existe* α^{-1}*, tal que*

$$\alpha\,\alpha^{-1} = 1\,.$$

Para matrizes isto pode, em geral, **não** *ocorrer como mostra o seguinte exemplo:*
Se

$$A \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

então **não** *existe uma matriz* $B \in M_2(\mathbb{R})$*, tal que*

$$AB = I_2\,. \tag{A.26}$$

De fato, se existisse a matriz

$$B \doteq \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

tal que que vale (A.26)*, então deveríamos ter*

$$AB \overset{(A.19)}{=} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2\,,$$

para qualquer $b_{11}, b_{12} \in \mathbb{R}$*, (ou* $\mathbb{C}$*) mostrando que isto é impossível.*

Em vista disso temos a seguinte definição:

Definição A.27 *Seja* $A \in M_n$*.*

Se existir uma matriz $X \in M_n$ *tal que*

$$A\,X = X\,A = I_n\,, \tag{A.28}$$

diremos que A *é uma matriz* **inversível***.*

A matriz X *será dita uma* **matriz inversa** *da matriz* A*.*

Com isto temos o:

Exemplo A.29 *A matriz*

$$X \doteq \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

é uma matriz inversade da matriz

$$A \doteq \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

pois

$$A\,X = X\,A \overset{Exercício}{=} I_1\,.$$

Temos agora a:

Proposição A.30 *(Unicidade da inversa de uma matriz quadrada) Se X e $\tilde{X} \in M_n$ são matrizes inversas da matriz $A \in M_n$ então*

$$\tilde{X} = X\,.$$

Demonstração:

Observemos que se X e $\tilde{X}$ são inversas da matriz A, então teremos, em particular, que

$$X\,A = I_n \quad (1) \qquad \text{e} \qquad I_n = A\,\tilde{X} \quad (2)\,.$$

Assim

$$X = X\,I_n \overset{(2)}{=} X(A\,\tilde{X}) = (X\,A)\tilde{X} \overset{(1)}{=} I_n\,\tilde{X} = \tilde{X}\,,$$

ou seja,

$$X = \tilde{X}\,,$$

como queríamos demonstrar do resultado.

∎

Observação A.31 *Logo se uma matriz quadrada admite uma matriz inversa, esta será única, com isto podemos introduzir a:*

Definição A.32 *Uma matriz $A \in M_n$ que adminte uma matriz inversa será dita* **não singular**.

Neste caso a matriz inversa da matriz A será denotada por A^{-1}.

Uma matriz $A \in M_n$ que **não** *admite matriz inversa será denominada* **singular**.

Com isto temos a:

Proposição A.33 *Sejam $A, B \in M_n$ matrizes não singulares.*

Então a matriz $AB \in M_n$ é uma matriz não singular e

$$(A\,B)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}\,. \tag{A.34}$$

Demonstração:

Como A é uma matriz não singular segue que:

$$A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = I_n\,. \tag{A.35}$$

Mas B também é uma matriz não singular assim

$$B\,B^{-1} = B^{-1}\,B = I_n\,. \tag{A.36}$$

Portanto,

$$\left(B^{-1}A^{-1}\right)(AB) = B^{-1}\left(A^{-1}A\right)B \overset{(A.35)}{=} \left(B^{-1}I_n\right)B = B^{-1}B \overset{(A.48)}{=} I_n$$

$$(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) = A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} \overset{(A.48)}{=} (AI_n)A^{-1} = AA^{-1} \overset{(A.35)}{=} I_n.$$

Portanto a matriz AB é não singular e

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}\,,$$

como queríamos demonstrar.

∎

Como consequência temos o:

Corolário A.37 *Sejam $A_1, \ldots, A_k \in M_n$ matrizes não singulares.*

Então a matriz

$$A_1A_2\cdots A_k \in M_n$$

é uma matriz não singular e

$$(A_1\cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1}\cdots A_1^{-1}\,. \tag{A.38}$$

Demonstração:

Basta usar a Proposição (A.42) acima e indução matemática.

Deixaremos os detalhes como exercício para o leitor.

∎

Observação A.39

1. *Mostramos na Proposição (A.42) acima, temos que o subconjunto das matrizes não singulares em M_n é fechado em relação ao produto de matrizes, ou seja, se A e $B \in M_{nn}$ são não singulares, então AB também será não singular.*

2. *Vimos num exemplo anterior que se*

$$A \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq O \quad e \quad B \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq O\,,$$

mas

$$AB = O\,.$$

Observemos que tanto a amtriz A quanto a matriz B são matrizes singulares.

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Se uma das duas fosse não singular isso **<u>não</u>** *poderia ocorrer, como mostra o resultado a seguir.*

Proposição A.40 *Se $A \in M_n$ é uma matriz não singular e a matriz $B \in M_{np}$ é tal que*

$$AB = O \in M_{np}\,,$$

então deveremos ter

$$B = O\,.$$

Demonstração:

Como a matriz A é uma matriz não singular então

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n\,. \tag{A.41}$$

Mas,

$$B = I_n B \overset{(A.41)}{=} \left(A^{-1}A\right) B = A^{-1}(AB) = A^{-1}O = O\,, \quad \text{ou seja,} \quad B = 0\,,$$

como queríamos demonstrar.

∎

Deixaremos para o leitor a resolução do:

Exemplo A.42 *Sejam $A\,, B \in M_n(\mathbb{R})$ tais que*

$$A\,B = I_n\,.$$

Mostre que

$$B\,A = I_n \quad \textit{e, portanto,} \quad B = A^{-1}\,.$$

Observação A.43 *Uma aplicação para as propriedades desenvolvidas acima seria considerar a equação matricial:*

$$A \cdot x = b\,, \tag{A.44}$$

onde

$$A \in M_n\,, \quad b \in M_{n1} \quad \textit{são dadas, e} \quad x \in M_{n1}$$

é uma matriz a ser encontrada (se existir).

Se A é uma matriz não singular então

$$x \doteq A^{-1} \cdot b$$

será a única solução da equação matricial (A.44).

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação deste fato.

Observemos que a equação matricial acima corresponde a um sistema linear de $\underline{n}$ equações algébricas lineares a $\underline{n}$ incógnitas.

Logo as correspontes entradas da matriz coluna $\underline{x}$ serão as (únicas) soluções do sistema linear associado À equação matricial (A.44).

Para finalizar esta seção, introduziremos a:

Definição A.45 *Dada uma matriz quabrada* $A \doteq (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$, *definiremos o* **traço da matriz $\underline{A}$**, *denotado por* $\operatorname{tr}(A)$, *como sendo a soma de todos os elementos da diagonal principal da matriz* $\underline{A}$, *isto é,*

$$\operatorname{tr}(A) \doteq \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \,. \tag{A.46}$$

Com isto temos o:

Exemplo A.47 *Encontre o traço da matriz*

$$A \doteq \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Resolução:

Temos que

$$\operatorname{tr}(A) \overset{(A.46)}{=} \sum_{i=3}^{n} a_{ii} = 3 + 0 + 2 = 5 \,.$$

□

Temos as seguintes propriedades para o traço de matrizes:

Proposição A.48 *Sejam* $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$.
Então:

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(A + B) &= \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B) \,, \\ \operatorname{tr}(\alpha \cdot A) &= \alpha \operatorname{tr}(A) \,, \\ \operatorname{tr}\left(A^t\right) &= \operatorname{tr}(A) \end{aligned}$$

Demonstração:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação das propriedades acima.

∎

Temos também a:

Proposição A.49 *Sejam* $A \doteq (a_{ik}) \in M_{nm}$, $B \doteq (b_{ki}) \in M_{mn}$.

$$\operatorname{tr}(A\,B) = \operatorname{tr}(B\,A) \,. \tag{A.50}$$

Demonstração:

Notemos que se $AB = (c_{ij})$ e $BA = (d_{ls})$, então deveremos ter:

$$c_{ij} \doteq \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} \,, \quad \text{para cada} \quad i, j \in \{1\,, 2\,, \cdots, n\} \tag{A.51}$$

e

$$d_{ls} \doteq \sum_{r=1}^{n} b_{lr} a_{rs}\,, \quad \text{para cada} \quad l, s \in \{1\,, 2\,, \cdots\,, m\}\,. \tag{A.52}$$

Logo

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(A\,B) &\overset{(A.46)}{=} \sum_{i=1}^{n} c_{ii} \overset{(A.51)}{=} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{ki}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ik}\right) \\ &\overset{(A.52)}{=} \sum_{k=1}^{m} d_{kk} \overset{(A.46)}{=} \operatorname{tr}(B\,A)\,, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\operatorname{tr}(A\,B) = \operatorname{tr}(B\,A)\,,$$

completando a demonstração do resultado.

∎

Com isto temos o:

Corolário A.53 *Sejam* $A \doteq (a_{ij})\,, B \doteq (b_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.
Então:

$$\operatorname{tr}\left(B^t\,A\right) = \operatorname{tr}(A\,B^t)\,. \tag{A.54}$$

Demonstração:
Consequência imediata da Proposição acima.

∎

A.4 Algumas matrizes importantes

Definição A.55 *Uma matriz quadrada* $A \in M_n$ *será dita ser* **matriz diagonal** *se*

$$a_{ij} = 0\,, \quad \textit{para} \quad i \neq j \quad \textit{com} \quad i, j \in \{1, \cdots, n\}\,. \tag{A.56}$$

Uma matriz quadrada $A \in M_n$ *será dita* **triangular superior** *se*

$$a_{ij} = 0\,, \quad \textit{para} \quad i > j \quad \textit{com} \quad i, j \in \{1, \cdots, n\}\,. \tag{A.57}$$

Analogamente, diremos que a matriz quadrada $A \in M_n$ *é* **triangular inferior** *se*

$$a_{ij} = 0\,, \quad \textit{para} \quad i < j \quad \textit{com} \quad i, j \in \{1, \cdots, n\}\,. \tag{A.58}$$

Observação A.59

1. *Uma matriz diagonal* $A \in M_n$, *deverá ter o seguinte aspecto:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{A.60}$$

2. *Uma matriz triangular superior* $A \in M_n$, *deverá ter o seguinte aspecto:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{A.61}$$

3. *Uma matriz triangular inferior* $A \in M_n$, *deverá ter o seguinte aspecto:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{A.62}$$

Com isto temos as seguintes propriedades:

Proposição A.63

1. *Se as matrizes* $A, B \in M_n$ *são matrizes diagonais então as matrizes*

$$A + B, \quad AB \quad e \quad \alpha \cdot A$$

serão matrizes diagonais, onde $\alpha \in \mathbb{R}$ *(respectivamente,* $\mathbb{C}$*).*

2. *Se a matriz* $A = (a_{ij})$ *é uma matriz diagonal, cuja diagonal principal não contém* 0 *(isto é,* $a_{ii} \neq 0$*, para cada* $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$*), então a matriz* A *é uma matriz não singular (isto é, existe a matriz inversa da matriz* A*) e além disso*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix}.$$

3. *Se as matrizes* $A, B \in M_n$ *são matrizes tringulares superiores (inferiores, respectivamente) então as matrizes*

$$A + B, \quad AB \quad e \quad \alpha \cdot A$$

serão matrizes triangulares superior (inferior, respectivamente), onde $\alpha \in \mathbb{R}$ *(respectivamente,* $\mathbb{C}$*).*

4. *Se a matriz* $A \in M_n$ *é triangular superior (inferior, repectivamente), cuja diagonal principal tem entradas não nulas, então a matriz* A *é uma a matriz não singular, isto é, existe a matriz inversa da matriz* A *e além disso a matriz* A^{-1} *também será uma matriz triangular superior (inferior, repectivamente).*

Demonstração:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação das propriedades acima.

∎

A.5 Determinante

Definição A.64 *Seja* $A \in M_n$ *uma matriz quadrada.*

Se $n = 1$*, definimos o* **determinante da matriz A***, denotado por* $\det(A)$*, como sendo*

$$\det(A) \doteq a_{11}. \tag{A.65}$$

Se $n > 1$*, para cada* $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$*, definamos a matriz* A_{ij}*, a matriz quadrada de ordem* $n-1$*, obtida da matriz* A*, retirando-se a i-ésima linha e j-ésima coluna da matriz* A*, isto é,*

$$A_{ij} \doteq \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ a_{(i-1)1} & \cdots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \cdots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & \cdots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \cdots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{A.66}$$

Assumindo que o determinante de uma matriz de ordem $(n-1) \times (n-1)$ *já foi encontrado, definimos:*

$$\det(A) \doteq \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\,|A_{1j}| \tag{A.67}$$

onde

$$|A_{1j}| \doteq (-1)^{1+j} \det(A_{1j}), \quad \text{para cada} \quad j \in \{1, 2, \cdots, n\}. \tag{A.68}$$

O número

$$|A_{ij}|,$$

definido acima, será denominado **cofator do elemento** a_{ij} *da matriz* A*.*

A matriz

$$B = (|A_{ij}|),$$

será denominada **matriz cofatora da matriz A** *e denotada por* $\mathrm{cof}(A)$*.*

Com isto temos a:

Proposição A.69

1. *Se*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

então

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{22},$$

isto é,

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{22}. \tag{A.70}$$

2. *Se*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

então

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

isto é,

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{A.71}$$

3. *Se* O *é a matriz nula, quadrada de ordem* $\underline{n}$, *então*

$$\det(O) = 0. \tag{A.72}$$

4. *Se* I_n *é a matriz identidade de ordem* $\underline{n}$, *então*

$$\det(I_n) = 1. \tag{A.73}$$

5. *Se* $A = (a_{ij}) \in M_n$ *é um matriz diagonal, então*

$$\det(A) = a_{11} \cdots a_{nn},. \tag{A.74}$$

6. *Se* $A = (a_{ij}) \in M_n$ *é triangular superior (inferior, respectivamente), então*

$$\det(A) = a_{11} \cdots a_{nn}. \tag{A.75}$$

Demonstração:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação das propriedades acima.

∎

Observação A.76 *Poderíamos definir o determinante de uma matriz quadrada, por meio dos cofatores de qualquer coluna ou linha da matriz* A *que obteríamos o mesmo valor, isto é, para cada* $i_o \in \{1, \cdots, n\}$ *, temos que*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i_o j} |A_{i_o j}|,$$

onde

$$|A_{i_o j}| \doteq (-1)^{i_o + j} \det(A_{i_o j}), \text{quad}\textit{para cada} \quad j \in \{1, 2, \cdots, n\},$$

ou, para $j_o \in \{1, \cdots, n\}$ *fixado temos que*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij_o} |A_{ij_o}|,$$

onde

$$|A_{ij_o}| \doteq (-1)^{i+j_o} \det(A_{ij_o}), \quad \textit{para cada} \quad i \in \{1, 2, \cdots, n\}.$$

<u>**Conclusão:**</u> *para cada* $i_o, j_o \in \{1, \cdots, n\}$ *fixados, temos que*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i_o j} |A_{i_o j}| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij_o} |A_{ij_o}|.$$

A verificação deste fato é trabalhosa e será deixada como exercício para o leitor.

A seguir dexibiremos algumas propriedades importantes do determinante de uma matriz quadrada.

Para isto precisaremos da:

Definição A.77 *Dada uma matriz* $A \in M_n$ *podemos realizar as seguintes operações com suas colunas (ou linhas, respectivamente):*

i) trocar duas colunas (ou linhas, respectivamente);

ii) multiplicar uma coluna (ou linha, respectivamente) por um $\alpha \in \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*) não nulo;*

iii) adicionar uma coluna (ou linha, respectivamente) multiplicada por α *a outra coluna (linha, respectivamente).*

Tais operações serão denominadas <u>**operações elementares**</u> *sobre as colunas (ou linhas, respectivamente) da matriz* A.

Com isto temos a:

Proposição A.78 *Seja* $A \in M_n$.

Consideremos

$$B \doteq (a_{*1}, \cdots, a_{*(k-1)}, b_{*k}, a_{*(k+1)}, \cdots, a_{*n})$$

e

$$C \doteq (a_{*1}, \cdots, a_{*(k-1)}, c_{*k}, a_{*(k+1)}, \cdots, a_{*n})$$

onde, para cada $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, a_{*k} *denota a* j*-ésima coluna da matriz* A *(analogamente para as matrizes* B *e* C*) e seja* $k_o \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

Para $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ *(respectivamente,* $\mathbb{C}$*), se*

$$a_{*k_o} = \beta\, b_{*k_o} + \gamma\, c_{*k_o}, \tag{A.79}$$

então

$$\det(A) = \beta \det(B) + \gamma \det(C). \tag{A.80}$$

Demonstração:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação das propriedades acima.

∎

Observação A.81 *Vale um resultado análogo ao da Proposição (A.78) acima, para as correspondentes operações sobre as linhas da matriz, isto é, se*

$$B \doteq \begin{pmatrix} a_{1*} \\ \cdots \\ a_{(k-1)*} \\ b_{k*} \\ a_{(k+1)*} \\ \cdots \\ a_{n*}) \end{pmatrix}$$

e

$$C \doteq \begin{pmatrix} a_{1*} \\ \cdots \\ a_{(k-1)*} \\ c_{k*} \\ a_{(k+1)*} \\ \cdots \\ a_{n*}) \end{pmatrix}$$

onde, para cada $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, a_{k*} *denota a* j*-ésima linha da matriz* A *(analogamente para as matrizes* B *e* C*) e seja* $k_o \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

Para $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ *(respectivamente,* $\mathbb{C}$*), se*

$$a_{k_o*} = \beta\, b_{k_o*} + \gamma\, c_{k_o*}, \tag{A.82}$$

então

$$\det(A) = \beta \det(B) + \gamma \det(C). \tag{A.83}$$

Como conseqüência da Proposição (A.78) acima, temos o:

Corolário A.84

1. *Se* $A \in M_n$, *então*

$$\det\left[a_{*1}, \cdots, a_{*(k-1)}, \beta a_{*k}, a_{*(k+1)}, \cdots, a_{*n}\right] = \beta \det\left[a_{*1}, \cdots, a_{*n}\right]. \tag{A.85}$$

2. *Se* $A \in M_n$, *então*

$$\begin{aligned}\det[a_{*1}, \cdots, a_{*(k-1)}, &b_{*k} + c_{*k}, a_{*(k+1)}, \cdots, a_{*n}] \\ &= \det[a_{*1}, \cdots, a_{*(k-1)}, b_{*k}, a_{*(k+1)}, \cdots, a_{*n}] \\ &\quad + \det[a_{*k}, \cdots, a_{*(k-1)}, c_{*k}, a_{*(k+1)}, \cdots, a_{*n}].\end{aligned} \tag{A.86}$$

Demonstração:

De 1. :

Basta tomar

$$\gamma = 0$$

na Proposição (A.78) acima.

De 2. :

Basta tomar

$$\beta = \gamma = 1$$

na Proposição (A.78) acima.

∎

Observação A.87

1. *O item 1. do Corolário (A.84) acima, nos diz que o determinante de uma matriz que tem uma coluna (ou linha) multiplicada por uma constante, pode ser obtido multiplicando-se o determinante da matriz pela tal constante.*

2. *O item 2. do Corolário (A.84) acima, nos diz que o determinante de uma matriz que tem uma coluna (ou linha) obtida da soma de duas colunas, pode ser obtido somando-se os determinante das matrizes que teêm cada uma das colunas que foramadicionadas.*

3. *Vale um resultado análogo ao do Corolário (A.84) acima, para as correspondentes operações sobre as linhas da matriz* A.

   Deixaremos o enunciado e a demonstração do mesmo como exercício para o leitor.

Conseqüência do Corolário (A.84) acima, temos o:

Corolário A.88 *Seja $A \in M_n$ de modo que*

$$a_{*k_o} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \textit{para algum} \quad k_o \in \{1, \cdots, n\}. \tag{A.89}$$

Então

$$\det(A) = 0. \tag{A.90}$$

Demonstração:

Basta tomar

$$\beta = 0$$

no item 1. do Corolário (A.84) acima.

∎

Observação A.91

1. *O resultado acima nos diz que se uma coluna de uma matriz quadrada é nula, então o determinante da matriz será igual azero.*
2. *Vale um resultado análogo ao do Corolário (A.88) acima para uma linha da matriz A.*

   Deixaremos o enunciado e a demonstração do mesmo como exercício para o leitor.

Um outro resultado importante é dado pela:

Proposição A.92 *Seja $A \in M_n$. Então*

$$\det(a_{*1}, \cdots, a_{*k}, \cdots, a_{*j}, \cdots, a_{*n}) = -\det(a_{*1}, \cdots, a_{*j}, \cdots, a_{*k}, \cdots, a_{*n}). \tag{A.93}$$

Demonstração:

Será deixada como exercício para o leitor.

∎

Observação A.94

1. *O resultado acima nos diz que se trocarmos duas colunas de uma matriz quadrada seu determinate muda de sinal.*
2. *Vale um resultado análogo trocando-se "coluna" por "linha", isto é, se trocarmos duas linhas de uma matriz quadrada seu determinate muda de sinal.*

   Deixaremos o enunciado e a demonstração do mesmo como exercício para o leitor.

Como conseqüência da Proposição (A.92) acima, temos o:

Corolário A.95 *Seja* $A \in M_n$ *tal que*

$$a_{*k_o} = a_{*j_o}\,, \quad \textit{para algum} \quad k_o, j_o \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}\,, \tag{A.96}$$

isto é, se a matriz A *tem duas colunas iguais.*

Então

$$\det(A) = 0\,. \tag{A.97}$$

Demonstração:

Da Proposição (A.92) acima segue que se trocarmos a k_o-ésima coluna com a j_o-ésima coluna o determinante da matriz obtida será menos o determinante da matriz A.

Mas a matriz obtida da troca da k_o-ésima coluna com a j_o-ésima coluna é igual a própria matriz A.

Com isto teremos:

$$\det(A) = -\det(A)\,, \quad \text{ou seja,} \quad \det(A) = 0\,,$$

como queríamos demonstrar.

∎

Observação A.98 *Vale um resultado análogo trocando-se "coluna" por "linha", isto é, ou seja, se a matriz* A *tem duas linhas iguais então seu determinate é nulo.*

Deixaremos o enunciado e a demonstração do mesmo como exercício para o leitor.

Como consequência da Proposição (A.78), temos o:

Corolário A.99 *Sejam* $A \in M_n$, $\gamma \in \mathbb{R}$ *(respectivamente,* $\mathbb{C}$*) e* $j \neq k$, *para* $j, k \in \{1\,,2\,,\cdots\,,n\}$.

Então

$$\det(a_{*1}, \cdots, a_{*j}, \cdots, a_{*(k-1)}, a_{*k} + \gamma a_{*j}, a_{*(k+1)}, \cdots, a_{*n}) = \det(A)\,,$$

ou seja, se trocarmos uma coluna de uma matriz pela mesma somada com um múltiplo de uma outra coluna, o determinante da matriz obtida será igual ao da matriz inicial.

Demonstração:

Da Proposição (A.78), segue que

$$\begin{aligned}
&\det(a_{*1}, \cdots, a_{*j}, \cdots, a_{*(k-1)}, a_{*k} + \gamma a_{*j}, a_{*(k+1)}, \cdots, a_{*n}) \\
&\qquad = \det(a_{*1}, \cdots, a_{*j}, \cdots, a_{*(k-1)}, a_{*k}, a_{*(k+1)}, \cdots, a_{*n}) \\
&\qquad\qquad + \beta\, \underbrace{\det(a_{*1}, \cdots, a_{*j}, \cdots, a_{*(k-1)}, a_{*j}, a_{*(k+1)}, \cdots, a_{*n})}_{\overset{\text{Corolário (A.95)}}{=} 0} \\
&\qquad = \det(a_{*1}, \cdots, a_{*j}, \cdots, a_{*(k-1)}, a_{*k}, a_{*(k+1)}, \cdots, a_{*n})\,,
\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

∎

Observação A.100

1. *Valem um resultado análogo ao acima para a correspondente operaçao sobre as linhas da matriz* A.

   Deixaremos o enunciado e a demonstração do mesmo como exercício para o leitor.

2. *Resumindo: se* $A \in M_n$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$ *(respectivamente,* $\mathbb{C}$*) então:*

   (i) trocar duas colunas (ou linhas) da matriz A*, faz com que o determinante da matriz obtida, seja menos determinante da matriz* A*;*

   (ii) adicionar λ *vezes uma coluna (ou linha) da matriz* A *a uma outra coluna (ou linha), faz com que o determinante da matriz obtida seja igual ao determinante da matriz* A*;*

   (iii) multiplicar uma coluna (ou linha) da matriz A *por* λ*, faz com que o determinante da matriz obtida seja igual ao determinante da matriz* A *multiplicado por* λ.

Além disso temos o seguinte resultado importante

Proposição A.101 *Sejam* $A, B \in M_n$.
Então

$$\det(AB) = \det(A)\det(B). \tag{A.102}$$

Demonstração:
Deixaremos como exercício para o leitor a demonstração da identidade acima.

∎

Uma outra operação que podemos fazer com uma matriz é:

Definição A.103 *Se* $A \in M_{nm}$ *definimos a* **matriz transposta da matriz** $\underline{A = (a_{ij})}$*, denotada por* A^t*, como sendo a matriz* $A^t = (b_{ij}) \in M_{mn}$*, dada por*

$$b_{ij} \doteq a_{ji}, \quad \textit{par cada} \quad j \in \{1, 2, \cdots, n\} \quad e \quad i \in \{1, 2, \cdots, m\}. \tag{A.104}$$

Observação A.105

1. *A relação que existem entre uma matriz e sua matriz transposta é que as colunas da 1.a serão as linhas da 2.a e vice-versa.*

2. *É fácil verificar que se* $m = n$*, então*

$$A, A^t \in M_n.$$

Temos os seguintes exemplos:

Exemplo A.106

1) Se

$$A \doteq \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

então

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2) Se

$$A \doteq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix},$$

então

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix},$$

em particular, $A^t = A$.

Temos as seguintes propriedades para a transposição de uma matriz:

Proposição A.107 *Sejam* $A, B \in M_n$.
Então:

1. *temos que*
$$\left(A^t\right)^t = A; \tag{A.108}$$

2. *se* $m = n$,
$$\det(A^t) = \det(A); \tag{A.109}$$

3. *temos que*
$$(A + B)^t = A^t + B^t; \tag{A.110}$$

4. *segue que*
$$(AB)^t = B^t A^t; \tag{A.111}$$

5. *temos que*
$$(\alpha \cdot A)^t = \alpha \cdot A^t; \tag{A.112}$$

6. *se a matriz* A *é uma matriz diagonal então*
$$A^t = A. \tag{A.113}$$

Em particular, temos
$$I_n{}^t = I_n.$$

Demonstração:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação das propriedades acima.

∎

Com isto podemos introduzir a seguinte definição:

Definição A.114 *Seja* A *uma matriz quadrada de ordem* $\underline{n}$ *(isto é,* $A \in M_n$*).*

Diremos que a matriz A *é uma* **matriz simétrica** *se*

$$A^t = A\,. \tag{A.115}$$

Diremos que a matriz A *é uma* **matriz anti-simétrica** *se*

$$A^t = -A\,. \tag{A.116}$$

Temos os seguintes exemplos:

Exemplo A.117

1. *A matriz*

$$A \doteq \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

é uma matriz simétrica, pois $A^t = A$.

A verificação deste fato é simples e será deixada como exercício para o leitor.

2. *A matriz*

$$B \doteq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

é uma matriz anti-simétrica, pois $B^t = -B$.

A verificação deste fato é simples e será deixada como exercício para o leitor.

Temos as seguintes propriedades para matrizes simétricas ou anti-simétricas:

Proposição A.118 *Sejam* $A\,, B \in M_{nn}$.

1. *Se as matrizes* A *e* B *são matrizes simétricas, então a matriz* $A + B$ *também será uma matriz simétrica.*

2. *Se as matrizes* A *e* B *são matrizes anti-simétricas, então a matriz* $A + B$ *também será uma matriz anti-simétrica.*

3. *Se a matriz* A *é matriz simétrica e* $\alpha \in \mathbb{R}$ *(respectivamente,* $\mathbb{C}$*), então a matriz* $\alpha \cdot A$ *também será uma matriz simétrica;*

4. *Se a matriz* A *é um matriz anti-simétrica e* $\alpha \in \mathbb{R}$ *(respectivamente,* $\mathbb{C}$*), então a matriz* $\alpha \cdot A$ *também será uma matriz anti-simétrica;*

5. *Se as matrizes* A *e* B *são matrizes simétricas, então a matriz* AB *também será uma matriz simétrica se, e somente se,*

$$AB = BA\,, \tag{A.119}$$

ou seja, se elas comutam, segundo o produto de matrizes.

6. *Se as matrizes* A *e* B *são matrizes anti-simétricas, então a matriz* AB *será uma matriz simétrica se, e somente se, vale* (A.119)*, ou seja, se elas comutam, segundo o produto de matrizes.*

6. *Se a matriz* A *é uma matriz simétrica e a matriz* B *é uma matriz anti-simétrica então a matriz* AB *será uma matriz anti-simétrica se, e somente se,* $AB = BA$*.*

Demonstração:

Do item 1.:

Se as matrizes A e B são matrizes simétricas então

$$A^t = A \quad \text{e} \quad B^t = B\,. \tag{A.120}$$

Como

$$(A+B)^t \overset{\text{Prop. (A.107) item 3.}}{=} A^t + B^t \overset{(A.120)}{=} A + B,$$

segue que a matriz $A+B$ será uma matriz simétrica.

Os outros itens serão deixados como exercícios para o leitor.

∎

Como uma aplicação de determinantes e de transposição de matrizes temos o seguinte resultado:

Proposição A.121 *Seja* $A \in M_n$ *uma matriz.*

A matriz A *é uma matriz não singular se, e somente se,*

$$\det(A) \neq 0\,. \tag{A.122}$$

Neste caso

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}[\operatorname{cof}(A)]^t \tag{A.123}$$

onde $\operatorname{cof}(A)$ *é a matriz cofatora associada à matriz* A*.*

Demonstração:

Será deixada como exercício para o leitor.

∎

Com isto podemos resolver o:

Exemplo A.124 *Verifique se a matriz quadrada de ordem* 3*,*

$$A \doteq \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

é um matriz não-singular.

Caso afirmativo encontre sua matriz inversa.

Resolução:

Observemos que:

$$
\begin{aligned}
|A_{11}| &= (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^2(6-3) = 3\,,\\
|A_{12}| &= (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^3(-3+9) = -6\,,\\
|A_{13}| &= (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^4(-1+6) = 5\,.
\end{aligned}
$$

Logo

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= a_{11}|\,A_{11}| + a_{12}\,|A_{12}| + a_{13}\,|A_{13}|\\
&= 3\cdot 3 + 2\cdot(-6) + (-1)\cdot 5 = 9 - 12 - 5 = -8 \neq 0\,.
\end{aligned} \tag{A.125}
$$

Logo, pela Proposição (A.121) acima, segue que a matriz A é um matriz não singular, isto é, existe a matriz inversa A^{-1}.

Para encontrar a matriz A^{-1} calculemos:

$$
\begin{aligned}
|A_{21}| &= (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^3(6+1) = -7\,,\\
|A_{22}| &= (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^4(9-3) = 6\,,\\
|A_{23}| &= (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^5(3+6) = -9\,,\\
|A_{31}| &= (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^4(6+2) = 8\,,\\
|A_{32}| &= (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^5(9-1) = -8\,,\\
|A_{33}| &= (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^6(6+2) = 8\,.
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
\operatorname{cof}(A) = \begin{pmatrix} |A_{11}| & |A_{12}| & |A_{13}| \\ |A_{21}| & |A_{22}| & |A_{23}| \\ |A_{31}| & |A_{32}| & |A_{33}| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 5 \\ -7 & 6 & -9 \\ 8 & -8 & 8 \end{pmatrix}\,. \tag{A.126}
$$

Assim

$$A^{-1} \overset{(A.123)}{=} \frac{1}{\det(A)}[\operatorname{cof}(A)]^t$$

$$\overset{(A.125) \text{ e } (A.126)}{=} \frac{-1}{8}\begin{pmatrix} 3 & -7 & 8 \\ -6 & 6 & -8 \\ 5 & -9 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{8} & \frac{7}{8} & -1 \\ \frac{3}{4} & \frac{-3}{4} & 1 \\ \frac{5}{8} & \frac{9}{8} & -1 \end{pmatrix}.$$

□

Uma outra aplicação de determinantes é para resolução de sistemas lineares de equações algébricas do 1.o grau, como veremos no Apêndice (B).

Apêndice B

Escalonamento de Matrizes e Sistemas Lineares

B.1 Definições Básicas

Consideraremos a seguir questões relacionadas com o sistema linear de $\underline{m}$ equações a $\underline{n}$ incógnitas não-homogêneo, a saber,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{B.1}$$

que na forma matricial pode ser escrito na seguinte forma:

$$A \cdot x = B\,, \tag{B.2}$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m\times n}\,, \tag{B.3}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}. \tag{B.4}$$

Definição B.5 *A matriz*

$$(a_{*1} \cdots a_{*n}\ b_*)$$

será denominada **matriz aumentada** *associada ao sistema não homogêno* (B.1).

Uma **solução** *da equação matricial* (B.2) *(se existir) será uma matriz*

$$u \doteq \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in M_{n1}\,,$$

tal que

$$A \cdot u = B\,.$$

O conjunto de todas as soluções da equação matricial (B.1) *será denominado* **conjunto solução** *da equação matricial* (B.2).

Observação B.6 *Da identificação* (B.1) *com* (B.2), *segue que encontrar solução para o sistema linear* (B.1) *é equivalente a encontrar solução da equação matricial* (B.2).

Verifiquemos isto no:

Exemplo B.7 *Coloque o sistema linear*

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 0 \\ & +x_2 & +x_3 & = & -1 \\ x_1 & +x_2 & & = & 1 \end{cases} \tag{B.8}$$

na forma matricial.

Resolução:

Notemos que o sistema liner (B.8) é equivalente a equação matricial

$$A \cdot x = b,$$

onde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Observemos que a equação matricial acima tem como uma solução a matriz

$$u \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Logo uma solução do sistema linear (B.8), será:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 0 \quad \text{e} \quad x_3 = -1.$$

□

Observação B.9 *A matriz aumentada associada ao sistema do Exemplo* (B.7) *acima, será a matriz*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definição B.10 *Diremos que as equações matriciais*

$$A \cdot x = b \quad e \quad C \cdot x = d$$

são ditos <u>**equivalentes**</u> *se, e somente se:*

1. $A\,, C \in M_{mn}$;

2. $b\,, d \in M_{m1}$

3. *e as duas equações matriciais possuem o mesmo conjunto solução.*

Observação B.11 *Observemos que as equações matriciais*

$$A \cdot x = b \quad e \quad C \cdot x = d$$

são equivalentes se, e somente se, os sistemas lineares associados às correspondentes equações matriciais são equivalentes (isto é, os sistemas associados possuem o mesmo conjunto solução).

Daremos a seguir alguns procedimentos para encontrar solução de sistemas lineares não homogêneos (e homogêneos).

O que faremos é resolver um sistema linear fazendo operações básicas no mesmo (ou seja, multiplicando-se as equações do mesmo por constantes não nulas, somando-se equações do mesmo, etc.)

Observe que a cada equação do sistema linear corresponde uma linha da matriz aumentada associada ao sistema linear dado.

Logo operações com as equações do sistema linear corresponderão as, correspondentes operações sobre as linhas da matriz aumentado associada ao mesmo e reciprocamente.

Para ilustrar consideraremos o sistema linear de equações do 1.o grau:

$$\left\{\begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & +5x_3 & = & 11 \\ 2x_1 & +x_2 & +7x_3 & = & 15 \\ 2x_1 & & +4x_3 & = & 8 \end{array}\right. \longleftrightarrow A \cdot x = b, \text{ onde } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 7 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } b = \begin{pmatrix} 11 \\ 15 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

$$\left\{\begin{array}{lllll} x_1 & +x_2 & +5x_3 & = & 11 \\ 2x_1 & +x_2 & +7x_3 & = & 15 \\ 2x_1 & & +4x_3 & = & 8 \end{array}\right. \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 11 \\ 2 & 1 & 7 & 15 \\ 2 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \doteq S_o \text{ (matriz aumentada)}$$

$$\Updownarrow (2^a - 2 \times 1^a)$$

$$\left\{\begin{array}{lllll} x_1 & +x_2 & +5_x3 & = & 11 \\ & -x_2 & -3x_3 & = & -7 \\ 2x_1 & & +4x_3 & = & 8 \end{array}\right. \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 11 \\ 0 & -1 & -3 & -7 \\ 2 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \doteq S_1$$

$$\Updownarrow (3^a - 2 \times 1^a)$$

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +5x_3 & = & 11 \\ & -x_2 & -3x_3 & = & -7 \\ & -2x_2 & -6x_3 & = & -14 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 11 \\ 0 & -1 & -3 & -7 \\ 0 & -2 & -6 & -14 \end{pmatrix} \doteq S_2$$

$$\Updownarrow (1^a + 2^a)$$

$$\begin{cases} x_1 & & +2x_3 & = & 4 \\ & -x_2 & -3x_3 & = & -7 \\ & -2x_2 & -6x3 & = & -14 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & -7 \\ 0 & -2 & -6 & -14 \end{pmatrix} \doteq S_3$$

$$\Updownarrow (3^a - 2 \times 2^a)$$

$$\begin{cases} x_1 & & +2x_3 & = & 4 \\ & -x_2 & -3x_3 & = & -7 \\ & & 0 & = & 0 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \doteq S_4$$

$$\Updownarrow (2^a \times (-1))$$

$$\begin{cases} x_1 & & +2x_3 & = & 4 \\ & x_2 & +3x_3 & = & 7 \\ & & 0 & = & 0 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \doteq S_5.$$

O sistema linear obtido acima é o mais simples (que pode ser obtido por meio da operações usuais sobre o sistema linear dado inicialmente) que é equivalente ao sistema original.

Para resolver o sistema linear acima bastará tomarmos, por exemplo:

$$x_3 \doteq \alpha \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C})$$

assim, das duas primeiras equações do sistema linear acima e à esquerda, obteremos:

$$x_1 \doteq 4 - 2\alpha \quad \text{e} \quad x_2 \doteq 7 - 3\alpha.$$

Assim o conjunto solução do sistema linear dado incialmente será

$$\{(x_1, x_2, x_3) = (4 - 2\alpha\,, 7 - 3\alpha\,, \alpha), \text{ para cada } \alpha \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C})\}.$$

Observe que as operações que fizemos na matriz S_i para obter a matriz S_{i+1}, são operações elementares sobre as linhas (ver Definição (A.77)).

Para facilitar o entendimento do que virá mais adiante introduziremos a:

Definição B.12

1. *A operação de trocar duas linhas de uma matriz daremos o nome de operação do* **tipo I**.
2. *A operação de multiplicar uma linha por um número não nulo daremos o nome de operação do* **tipo II**.
3. *A operação de adicionar o múltiplo de uma linha a outra linha daremos o nome de operação do* **tipo III**.

Tais operações são, como já dissemos, operações elementares sobre as linhas da matriz (ver Definição (A.77)).

No Exemplo (B.7) acima, as operações elementares que realizamos são:

$$S_o \overset{(\text{tipo III})}{\longrightarrow} S_1 \overset{(\text{tipo III})}{\longrightarrow} S_2 \overset{(\text{tipo III})}{\longrightarrow} S_3 \overset{(\text{tipo III})}{\longrightarrow} S_4 \overset{(\text{tipo II})}{\longrightarrow} S_5.$$

Seja

$$I_m$$

a identidade de ordem $\underline{m}$.

Introduziremos também a:

Definição B.13

1. *Fazendo uma operação do tipo I na matriz* I_m, *obtemos uma matriz quadrada de ordem* m, *que chamaremos de* **matriz elementar do tipo I** *e será denotada por* E_I.
2. *Uma* **matriz elementar do tipo II** *é uma matriz quadrada de ordem* $\underline{m}$, *obtida da matriz* I_m *por uma operação do tipo II:*
3. *Uma* **matriz elementar do tipo III** *é uma matriz quadrada de ordem* $\underline{m}$, *obtida da matriz* I_m *por uma operação do tipo III.*

Observação B.14 *Dada uma matriz* $A \in M_{mn}$, *fazer uma operação do tipo I (ou do tipo II ou do tipo III, respectivamente) é equivalente a multiplicar a matriz* A *por uma matriz do tipo I (ou do tipo II ou do tipo III, respectivamente), isto é,*

$$A \overset{\textit{(operação elementar do tipo I)}}{\longmapsto} E_I\, A\,.$$

A demonstração destes fatos será deixada como exercício para o leitor.

Ilustraremos a propriedade acima com o seguinte exemplo:

Exemplo B.15 *Seja*

$$A \doteq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 11 \\ 2 & 1 & 7 & 15 \\ 2 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Trocando-se a 2.a linha da matriz A, *pela 2.a linha menos duas vezes a 1.a obteremos:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 11 \\ 2 & 1 & 7 & 15 \\ 2 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \overset{2^a - 2\times 1^a}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 11 \\ 0 & -1 & -3 & -7 \\ 2 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \doteq B \tag{B.16}$$

A operação acima na matriz identidade I_3, *nos fornece a seguinte matriz elementar do tipo III:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{2^a - 2\times 1^a}{\longrightarrow} \quad \mathbf{E}_{III} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notemos que:

$$E_{III}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 11 \\ 2 & 1 & 7 & 15 \\ 2 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 11 \\ 0 & 1 & -3 & -7 \\ 2 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \overset{(B.16)}{=} B,$$

ou seja, as operações produzem a mesma matriz, como foi dito na Observação (B.14) acima.

Um resultado importante é dado pela:

Proposição B.17 *Uma matriz elementar de qualquer tipo é uma matriz não singular (isto é, é uma matriz inversível) e sua matriz inversa é do mesmo tipo que ela.*

Demonstração:

Será deixado como exercício para o leitor.

∎

Para ilustrar temos o:

Exemplo B.18 *Mostre que a matriz elementar (veja o Exemplo (B.15)).*

$$E_{III} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

admite uma matriz inversa e está é uma matriz elementar do tipo III

Resolução:

Observemos que

$$\det(E_{III}) = 1,$$

portanto a matriz E_{III} é uma matriz não singular, isto é, existe a matriz inversa ${E_{III}}^{-1}$.

Além disso temos:

$$\begin{aligned} {E_{III}}^{-1} &= \frac{1}{\det(E_{III})} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\overset{2^a + 2 \times 1^a}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto a matriz inversa da matriz E_{III}, também é uma matriz elementar do tipo III.

□

Definição B.19 *Sejam* $A, B \in M_{mn}$.

Diremos que a matriz A *é* **l-equivalente** *(ou equivalente por linhas) à matriz* B*, se a matriz* A *pode ser obtida da matriz* B *por meio de uma sequência finita de operações elementares sobre as linhas da matriz* B.

Neste caso escreveremos

$$A \sim B.$$

Observação B.20

1. *Da Observação (B.14) segue que*

$$A \sim B \quad \textit{se, e somente se,} \quad A = E_s E_{s-1} \cdots E_1 B\,,$$

onde $E_1, \ldots, E_s$ *são matrizes do tipoI, II, ou III.*

2. *Sejam* $A, B, C \in M_{mn}$.

Deixaremos como exercício para o leitor verificar que:

i) Reflexiva:

$$A \sim B, \quad \textit{para cada} \quad A \in M_{mn}\,;$$

ii) Simétrica:

$$\textit{se} \quad A \sim B\,, \quad \textit{então} \quad B \sim A\,;$$

iii) Transitiva:

$$\textit{Se} \quad A \sim B \quad \textit{e} \quad B \sim C\,, \quad \textit{então} \quad A \sim C\,.$$

isto é, $\sim$ *é uma* **relação de equivalência** *em* M_{mn}.

Um resultado importante sobre l-equivalênica é dado pela:

Proposição B.21 *Sejam* $A, B \in M_{mn}$.
Se $A \sim B$*, então existe um matriz* $P \in M_{mn}$ *não singular, tal que*

$$B = PA \quad \textit{ou, equivalentemente} \quad A = P^{-1}B\,.$$

Demonstração:
Segue da Proposição (B.17) e da Observação acima item 1., que basta definir

$$P \doteq E_s \cdots E_1\,,$$

finalizando a demonstração do resultado.

∎

A relação entre matrizes l-equivalentes e a equações matriciais equivalentes é dado pela:

Proposição B.22 *Sejam* $A, C \in M_{mn}$ *e* $b, d \in M_{m1}$.
A matriz $[A\ b]$ *é l-equivalente a matriz* $[C\ d]$*, em* $M_{m,n+1}$*, se, e somente se, a equação matricial*

$$A \cdot x = B$$

é equivalente a equação matricial

$$C \cdot x = d\,.$$

Demonstração:

Observemos que, da Proposição (B.21) acima, existe $P \in M_{mn}$ não singular, tal que

$$[C\, d] = P \cdot [A\, b] \quad e \quad [A\, b] = P^{-1} \cdot [C\, d].$$

Da Definição de produto de matrizes, segue que

$$C = P \cdot A, \quad d = Pb\,, \quad A = P^{-1} \cdot C \quad e \quad b = P^{-1} \cdot d\,. \tag{B.23}$$

Logo, se $u \in M_{n1}$ é solução da equação matricial

$$A \cdot x = b \quad \text{então, segue que} \quad A \cdot u = b\,,$$

assim

$$C \cdot u \overset{(B.23)}{=} (PA) \cdot u = P(A \cdot u) \overset{(B.23)}{=} P \cdot b \overset{(B.23)}{=} d\,.$$

Pportanto a matriz $u \in M_{n1}$ será solução da equação matricial $C \cdot x = d$.

Além disso, vale a recíproca.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor, completando a demonstração.

∎

Observação B.24 *Vale observar que o resultado acima pode ser aplicado para as matrizes aumentadas associadas a sistemas lineares, ou seja, as matrizes aumentadas são l-equivalentes se, e somente se, os sistemas lineares são equivalentes.*

Como conseqüênica temos o:

Corolário B.25 *Se $A \sim B$ em M_{mn} e $x \in M_{n1}$ então as equações matriciais*

$$A \cdot x = O \quad e \quad C \cdot x = O$$

são equivalentes, onde O denota a matriz coluna de M_{m1}.

Demonstração:

Basta tomar

$$b = d = 0$$

na Proposição (B.22) acima.

Deixaremos os detalhes como exercício para o leitor.

∎

Observação B.26 *No Exemplo (B.15) obtivemos, após as operações de l-equivalência sobre a matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 11 \\ 2 & 1 & 7 & 15 \\ 2 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix},$$

a matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

cuja **forma** *nos facilitou a resolver o sistema linear inicial associado.*

Observemos que o sistema linear asscoiado a esta última matriz é o mais simples de ser resolvido e que é equivalente ao sistema linear dado inicialmente, cuja matriz aumentada é a matriz A.

A seguir daremos um nome as matrizes que tem essa **forma especial**.

Antes, porém temos a:

Definição B.27 *Dada uma matriz* $A = (a_{ij}) \in M_{nm}$, *definimos o* **coeficiente líder da i-ésima linha**, *não-nula, que indicamos por* a_{i*}, *da matriz* A *como sendo o primeiro elemento não nulo dessa linha, escolhido da esquerda para a direita, isto é, é*

$$a_{i,j_o} \neq 0 \quad \textit{onde} \quad j_o \in \{1, 2, \cdots, m\}$$

é o menor índice com essa propriedade.

Agora estamos em condições de caracterizar a forma da matriz aumentada associada ao sistema linear mais simples obtido no Exemplo (B.15) (isto é, a matriz B):

Definição B.28 *Uma matriz* $A \in M_{mn}$ *é dita estar na* **forma escalonada reduzida por linhas**, *denotada por FERL, se ela tem as seguintes propriedades:*

i) Todas as linhas nulas da matriz A *ocorrem nas linhas inferiores da mesma;*

ii) O coeficiente líder de uma linha não nula de A *é* 1;

iii) Em qualquer duas linhas não nulas da matriz A, *o coeficiente líder pertencente a linha de baixo ocorrerá à direita do coeficiente líder da linha de cima;*

iv) Uma coluna que contém um coeficiente líder deverá ter zeros nas outras entradas.

Temos os seguintes exemplos:

Exemplo B.29 *As matrizes:*

1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *estão na FERL.*

2. $\begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *e* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix}$ **não** *estão na FERL.*

Os elementos destacados não cumprem as propriedades requeridas, no caso, as propriedades (iv) e (iii), respectivamente.

Com isto temos a:

Proposição B.30 *Toda matriz* $A \in M_{mn}$ *é l-equivalente a uma (única) matriz, que indicaremos por* A_R*, que está na FERL, isto é, existe* $P \in M_{mn}$ *não singular tal que*

$$A_R = PA\,.$$

Demonstração:

Deixada como exercício para o leitor a demonstração deste resultado.

∎

Em vez de exibirmos a demonstração da Proposição acima, daremos o método que seria utilizado na demonstração aplicado a um exemplo.

O método é denominado **Eliminação de Gauss-Jordan**:

Exemplo B.31 *Encontre o conjunto solução do sistema linear*

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} & & -2x_3 & & +7x_5 & = & 12 \\ 2x_1 & +4x_2 & -10x_3 & +6x_4 & +12x_5 & = & 28 \\ 2x_1 & +4x_2 & -5x_3 & +6x_4 & -5x_5 & = & -1 \end{array}\right. \tag{B.32}$$

cuja matriz aumentada é dada por

$$(A\,b) \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}. \tag{B.33}$$

Resolução:

O que faremos é realizar operações elementares sobre as linhas da matriz aumentada acima para obter a sua FERL.

Primeiro passo:

Trocar as linhas nulas da matriz $(A\,b)$ com outras linhas, não nulas, de modo que as linhas nulas ocorram nas linhas inferiores da nova matriz.

No nosso caso não há linhas nulas, logo não faremos nenhuma mudança na matriz aumentada $(A\,b)$.

Localize a **coluna** mais á esquerda que não seja totalmente nula .

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix} \\ \uparrow \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \end{array}$$

Segundo passo:

Trocar a primeira linha com uma outra, caso necessário, para que o primeiro elemento da coluna localizada no primeiro passo seja não nulo.

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{(trocamos a 1.}^a \text{ linha com a 2.}^a \text{ linha)}$$

<u>Terceiro passo</u>:

Se o primeiro elemento da coluna do segundo passo for $\underline{a}$, multiplicar a primeira linha por $\frac{1}{a}$ (para que o coeficiente líder da primeira linha da matriz obtida seja 1).

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix} \quad \left(1.^a \text{ linha } \times \frac{1}{2}\right)$$

<u>Quarto passo</u>:

Somar a primeira linha, multiplicada por constante, se for necessário, com as linhas de baixo, para obter zeros em todas as entradas abaixo do coeficiente líder da primeira linha.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ \boxed{0} & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ \boxed{0} & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{pmatrix} \quad (3.^a \text{ linha } - 2 \times 1.^a \text{ linha})$$

<u>Quinto passo</u>:

Separar a $1.^a$ linha da matriz acima e voltar ao Primeiro passo.

Aplicar o processo repetidas vezes para até a última linha não nula.

No nosso exemplo:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{-5} & \boxed{3} & \boxed{6} & \boxed{14} \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-5} & \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{14} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{pmatrix} \quad \left(1.^a \text{ linha } \times \left(\frac{-1}{2}\right)\right)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-5} & \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{14} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad (2.^a \text{ linha } - 5 \times 1.^a \text{ linha})$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-5} & \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{14} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{\frac{-7}{2}} & \mathbf{-6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (2 \times 1.^a \text{ linha})$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-5} & \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{14} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{\frac{-7}{2}} & \mathbf{-6} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

<u>Sexto passo</u>:

Para finalizar, começando por uma linha não nula, somar cada linha multiplicada por constante com as outras linhas, para zerar as outras entradas acima do coeficiente líder.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \left(2.^a \text{ linha } + \frac{7}{2} \times 3.^a \text{ linha}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (1.^a \text{ linha } - 6 \times 3.^a \text{ linha })$$

$$(C\, d) \doteq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} (1.^a \text{ linha } + 5 \times 2.^a \text{ linha }).$$

Observemos que a matriz $(C\, d)$ está na FERL.

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

O sistema linear asssociado à matriz $(C\, d)$ será:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 7 \\ x_3 = 1 \\ x_5 = 2 \end{cases}$$

Portanto se, por exemplo, considerarmos para cada $t\,, s \in \mathbb{R}$,

$$x_1 \doteq t\,, \quad x_2 \doteq s\,, \quad x_3 = 1\,, \quad x_5 \doteq 2\,, \quad \text{deveremos ter} \quad x_4 = \frac{7-t-2s}{3}\,,$$

ou seja,

$$\left(t, s, 1, \frac{7-t-2s}{3}, 2\right)\,,$$

será solução do sistema linear dado incialmente, para cada $t\,, s \in \mathbb{R}$, ou seja: o conjunto solução associado ao sistema linear (B.32) será:

$$S \doteq \left\{(x_1\,, x_2\,, x_3\,, x_4\,, x_5) = \left(t\,, s\,, 1\,, \frac{7-t-2s}{3}, 2\right)\,;\, s\,, t \in \mathbb{R}\right\}.$$

Ou ainda, o conjunto solução da equação matricial (B.33), será

$$S = \left\{u \in M_{51}\,;\, u = \begin{pmatrix} t \\ s \\ 1 \\ \frac{7-t-2s}{3} \\ 2 \end{pmatrix}\,, \quad \text{para cada} \quad t, s \in \mathbb{R}\right\}.$$

□

Temos também a seguinte definição:

Definição B.34 *Dada uma matriz* $A \in M_{mn}$*, definimos o* **posto da matriz** A*, denotado por* $\operatorname{rank}(A)$*, como sendo o número de linhas não nulas de sua FERL associada.*

Proposição B.35 *Se* $A \in M_{mn}$*, então*

$$\operatorname{rank}(A) \leq \min\{m, n\}. \tag{B.36}$$

Demonstração:

Deixada como exercício para o leitor a demonstração deste resultado.

∎

Nas seções a seguir faremos algumas considerações sobre o sistema linear não homogênio

$$(NH) \quad A \cdot x = b, \quad \text{onde} \quad A \in M_{mn}, \; b \in M_{m1} \;\text{ e }\; x \in M_{n1}.$$

Na próxima seção começaremos estudando o sistema linear homogênio associado:

$$(H) \quad A \cdot x = 0 \quad (\text{isto é, } \; b = 0).$$

B.2 O Sistema Linear Homogênio

Observação B.37

1. *O sistema (H) tem sempre solução, a saber, a matriz identicamente nula,*

$$u = 0 \in M_{n1},$$

que será denominada **solução trivial***;*

2. *Pode-se mostrar que se* A_R *é a matriz na FERL, associada a matriz* A*, então a equação matricial*

$$A \cdot x = 0$$

será equivalente a equação matricial

$$A_R \cdot x = 0,$$

ou seja, resolver o sistema homogêneo é equivalente a resolver o sistema associado a matriz que está FERL.

3. *Observemos que se*

$$u, v \in M_{n1}$$

são soluções da equação matriical (H), então, para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*), a amatriz*

$$\alpha \cdot u + \beta \cdot v \in M_{n1}$$

também será.

De fato, pois

$$A \cdot (\alpha \cdot u + \beta \cdot v) = A \cdot (\alpha \cdot u) + A \cdot (\beta \cdot v) = \alpha \cdot (\underbrace{A \cdot u}_{=0}) + \beta \cdot (\underbrace{A \cdot v}_{=0}) = 0\,.$$

4. *Mais geralmente, se*

$$u_1, \cdots, u_p \in M_{n1}$$

são soluções de (H) então, para cada $\alpha_1\,, 2\,, \cdots\,,\,, \alpha_n \in \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$), *a matriz*

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_p \cdot u_p \in M_{n1}$$

também será solução, isto é, combinação linear de soluções da equação matricial (H), também será solução da equação matricial (H).

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Apliquemos essas idéias ao:

Exemplo B.38 *Encontre o conjunto solução associado a equação matricial homogênea*

$$A \cdot x = 0\,,$$

onde

$$A \doteq \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{35}. \tag{B.39}$$

Resolução:

Notemos que a matriz A está na FERL.

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Com isto temos o sistema linear homogêneo associado à matriz A será dado por:

$$\begin{cases} x_1 \quad -2x_2 \qquad\quad +3x_4 \qquad = 0 \\ \qquad\qquad +x_3 \quad -x_4 \qquad = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad +x_5 = 0 \end{cases}, \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} x_1 = 2x_2 - 3x_4 \\ x_3 = x_4 \\ x_5 = 0 \end{cases}.$$

Portanto, se, para cada $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, considerarmos

$$x_2 = \alpha_1 \quad \text{e} \quad x_4 = \alpha_2\,,$$

teremos que

$$\mathbf{u} \doteq \begin{pmatrix} 2\alpha_1 - 3\alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

será uma solução da equação matricial homogênea dada incialmete e reciprocamente.

Portanto, qualquer solução $u \in M_{n1}$ da equação matricial (H) será dada por:

$$u = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2$$

onde

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad u_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Observemos que os vetores u_1 e u_2 são L.I. em $M_{51}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ (onde $+$ e $\cdot$ são as operações usuais de $M_{51}(\mathbb{R})$).

Logo, esses vetores formam uma base para o espaço vetorial real $(W, +, \cdot)$, formado pelas soluções da da equação matricial (H).

Observação B.40 *Observemos que o posto da matriz A é 3, isto é,*

$$\text{rank}\,(A) = 3\,,$$

e a equação matricial (H) possui duas soluções que tem a propriedade acima, isto é, qualquer solução da equação matricial (H) pode ser obtida como combinação linear de u_1 e u_2.

Além disso, notemos

$$\dim(W) = 2 = \underbrace{5}_{\textit{número de variáveis}} - \underbrace{3}_{\textit{posto de } A}\,,$$

isto é , o número de soluções da a equação matricial (H) é igual ao número de variáveis do sistema linear menos o posto da matriz A.

Baseado nisto temos o:

Teorema B.41 *Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $A \in M_{mn}$ de posto igual a $\underline{k}$.*

Então o conjunto das soluções da equação matricial homogênea

$$A \cdot x = 0$$

consiste dos

$$u = \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_{n-k} \cdot u_{n-k} \in M_{n1}\,,$$

onde $\alpha_i \in \mathbb{R}$ (respectivamente, $\mathbb{C}$), $i \in \{1\,, 2\,, \cdots\,, n-k\}$, sendo os elementos

$$u_i \in M_{n1} \setminus \{0\}, \quad \textit{para cada} \quad i \in \{1, \cdots, n-k\}$$

podem ser obtidos resolvendo-se o sistema linear associado a matriz na FERL associada a matriz A (são as $n-k$ soluções L.I. em $(M_{n1}(\mathbb{R}), +, \cdot)$).

Em particular, se W é o subespaço vetorial do espaço $(M_{n1}, +, \cdot)$ (onde $+$ e $\cdot$ são as operações usuais de M_{n1}) que contém todas a solução da equação matricial (H), segue que

$$\dim(W) = n - \text{rank}\,(a)\,. \tag{B.42}$$

Demonstração:

Deixaremos como exercício para o leitor a demonstração deste resultado.

∎

Como consequência temos o:

Corolário B.43 *Seja* $A \in M_{mn}$.

Se o posto da matriz A *igual a* $\underline{n}$ *(isto é,* $k = n$*, no Teorema* (B.41) *acima), então a única solução da equação matricial (H) será a matriz nula, isto é,*

$$u = O \in M_{n1}\,.$$

Reciprocamente, se a única solução da equação matricial (H) é a matriz nula, então posto de A *será igual a* n*, ou seja,*

$$\operatorname{rank}(A) = n\,.$$

Em particular, a equação matricial (H) só admite a solução trivial se, e soemnte se, a matriz A *for inversível.*

Demonstração:

Notemos que, do Teorema (B.41) acima, temos que

$$\dim(W) = n - \underbrace{\operatorname{rank}(a)}_{=n} = 0\,.$$

Logo $W = \{O\}$, ou seja, a única solução da equação matricial (H) é a matriz nula, isto é, $u = O \in M_{n1}$.

Reciprocamente, se a única solução da equação matricial (H) é a matriz nula, então teremos que $W = \{O\}$, isto é, $\dim(W) = 0$.

Logo, do Teorema (B.41) acima, segue que

$$\underbrace{\dim(W)}_{=0} = n - p(a)\,, \quad \text{ou seja,} \quad \operatorname{rank}(a) = n\,,$$

como queríamos demonstrar.

∎

Com isto temos o:

Corolário B.44 *Seja* $A \in M_{mn}$.

Se

$$m < n\,,$$

então o sistema (H) tem, pelo menos, uma solução não trivial.

Demonstração:

Se

$$k \doteq \operatorname{rank}(A)\,,$$

da Proposição (B.35), segue que

$$k \leq \min\{m\,,n\} \stackrel{m<n}{=} m < n\,,$$

ou seja,

$$k < n\,.$$

Do Corolário (B.43) acima, segue que existe solução, não identicamente nula, da equação matricial (H), como queríamos demonstrar.

∎

Analisemos os seguinte exemplos a seguir:

Exemplo B.45 *Seja*

$$A \doteq \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_{32}\,.$$

Encontre o conjunto solução da equação matricial

$$A \cdot u = O\,.$$

Resolução:

Neste caso temos que

$$m \doteq 2 \quad e \quad n \doteq 3\,.$$

Temos que $A \sim A_R$, onde

$$A_R \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Portanto posto da matriz A é igual a 2.

Logo, pelo Teorema (B.41) acima, existe uma $(= n - \operatorname{rank}(A) = 3 - 2)$ solução, não nula, da equação matricial $A \cdot u = O$, que indicaremos por $u_1 \in M_{31}$ e qualquer outra solução u da equação matricial $A \cdot u = O$, será da forma

$$u = \alpha \cdot u_1\,,$$

para algum $\alpha \in \mathbb{R}$ (respectivamente, $\mathbb{C}$).

Para encontrar a solução $u_1 \in M_{31}$, basta resolver o sistema associado a matriz A_R, que deixaremos como exercício para o leitor.

Exemplo B.46 *Seja*

$$A \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & 7 & 6 \end{pmatrix} \in M_{34}\,.$$

Encontre o conjunto solução da equação matricial

$$A \cdot u = O\,.$$

Resolução:

Neste caso temos

$$m \doteq 3 < n \doteq 4 .$$

Logo, do Corolário (B.44) acima, podemos concluir que existe pelo menos uma solução não trivial da equação matricial $A \cdot u = O$.

Na verdade temos que $A \sim A_R$, onde

$$A_R \doteq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{-25}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Portanto, posto da matriz A é igual a 2.

Logo, pelo Teorema (B.41) acima, segue que existem duas $(= n - \text{rank}\,(A) = 4 - 2)$ soluções $u_1, u_2 \in M_{41}$, L.I. em $(M_{31}(\mathbb{R}), +, \cdot)$, da equação matricial $A \cdot u = O$, tal que toda solução $u \in M_{31}(\mathbb{R})$ da equação matricial $A \cdot u = O$, será dada por

$$u = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2,$$

para algum $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ (respectivamente, $\mathbb{C}$).

Para encontrar as soluções $u_1\,, u_2 \in M_{31}(\mathbb{R})$, basta resolver o sistema associado a matriz A_R, que deixaremos como exercício para o leitor.

B.3 O Sistema Linear Não Homogêneo

Trateremos nesta seção do sistema linear não homogêneo (NH)

$$Ax = b .$$

Começaremos introduzindo a:

Definição B.47 *A equação matricial*

$$A \cdot x = b$$

será dita **consistente** *se tem pelo menos uma solução.*

Se não tiver solução será dita **inconsistente** *.*

De modo semelhante, temos que um sistema linear será dito **consistente**, *se ele adminte pelo menos uma solução, caso contrário, será dito* **inconsistente**.

A seguir exibiremos dois sistemas lineares, um consistente e o outro incosistente.

Exemplo B.48 *O sitema linear*

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 0 \\ & x_2 & +x_3 & = & -1 \\ x_1 & +x_2 & & = & 1 \end{cases}$$

é consistente, pois

$$x_1 \doteq 1\,, \quad x_2 \doteq 0 \quad e \quad x_3 \doteq -1$$

é uma solução do sistema linear.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Exemplo B.49 *O sitema linear*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

é inconsistente.

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Observação B.50 *Lembremos que resolver a equação matricial (NH)*

$$A \cdot x = b$$

é equivalente a resolver a equação matricial

$$A_R \cdot x = b_R,$$

onde

$$A \sim A_R \quad e \quad b \sim b_R,$$

isto é, existe uma matriz $P \in M_{mn}$*, não singular, tal que*

$$A_R = PA \quad e \quad b_R = P\,b\,,$$

ou ainda,

$$(A\,b) \sim (A_R\,b_R)\,.$$

Logo podemos assumir, sem perda de generalidade, que a matriz A *está na FERL, isto é,*

$$A = A_R \quad e \quad b = b_R\,,$$

pois os as equações matriciais associadas são equivalentes (isto é, têm o mesmo conjunto solução).

Suponhamos que o a equação matricial (NH) seja consistente, com $u \in M_{m1}$ *sendo uma solução do mesmo.*

Seja $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*, o posto da matriz* A*.*

Como a matriz A *está na FERL e* $\operatorname{rank}(A) = k$*, segue que a matriz* A *tem as últimas* $(m-k)$ *linhas são nulas.*

Portanto $(m-k)$ *equações do sistema linear associado a equação matricial (NH) tem a segunte forma:*

$$0 \cdot x_1 + \cdots + 0 \cdot x_n = b_i \,, \textit{para cada} \quad i \in \{k+1, \cdots, m\}.$$

Logo

$$b_i = 0\,, \quad \textit{para cada} \quad i \in \{k+1, \cdots, m\},$$

ou seja:

Teorema B.51 *Se a matriz* $A \in M_{mn}$ *está na FERL e tem posto* $\underline{k}$, *então a equação matricial (NH) (ou o sistema linear associado a matriz aumentada* $(A\,b)$*) é consistente se, e somente se,*

$$b_{k+1} = \cdots = b_m = 0\,.$$

Em particular, se o posto da matriz A *for igual a* $\underline{m}$, *então a equação matricial (e portanto o sistema linear associado a matriz aumentada* $(A\,b)$*) será consistente.*

Demonstração:

A implicação $(\Rightarrow)$ é fruto da Observação (B.50) acima.

A demonstração da recíproca será deixada como exercício para o leitor.

∎

Se a matriz $A \in M_{mn}$ não está na FERL então temos o:

Teorema B.52 *Seja* $A \in M_{mn}$.

A equação matricial (NH) (portanto o sistema linear associado a matriz aumentada $(A\,b)$*) é consistente se, e somente se, o posto da matriz aumentada* $(A\,b)$ *for igual ao posto da matriz* A, *isto é.*

$$\operatorname{rank}(A\,b) = \operatorname{rank}(A)\,.$$

Demonstração:

Será deixada como exercício para o leitor.

∎

Façamos uma aplicação desse resultado ao seguinte exemplo:

Exemplo B.53 *O sistema linear*

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & = & 0 \\ -x_1 & & = & 1 \\ & x_2 & = & -1 \end{cases}$$

é consistente ou inconsistente?

Resolução:

Observemos que

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & = & 0 \\ -x_1 & & = & 1 \\ & x_2 & = & -1 \end{cases} \quad \textit{se, e somente se,} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = (A\,b)$$

Logo os sistema linear associado a matriz aumentada $(A\,b)$ *será consistente, pois ele admite como solução*

$$x_1 \doteq -1 \quad e \quad x_2 \doteq -1\,.$$

Deixaremos a verificação deste fato como exeercício para o leitor.

Portanto é consistente.

Notemos também que

$$(A\,b) \sim (A_R\,b_R)\,, \quad onde \quad (A_R\,b_R) \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\mathbf{A_R} \sim \mathbf{A}).$$

Deixaremos a verificação deste fato como exeercício para o leitor.

Assim temos que

$$\text{rank}\,(A) = 2 = \text{rank}\,(A\,b)$$

e como afirma o Teorema (B.52) acima, o sistema linear associado a matriz aumentada $(A\,b)$ *será consistente.*

Um outro resultado interessante é o:

Teorema B.54 *Seja* $A \in M_{mn}$.

Suponhamos que a equação matricial $A \cdot x = b$ *(ou o sistema linear associado a matriz aumentada* $(A\,b)$*) seja consistente e que* $u_o \in M_{n1}$ *seja uma solução particular do mesmo.*

Então toda solução da equação matricial

$$A \cdot x = b\,,$$

será dada por

$$w = u_o + v \in M_{n1}\,,$$

onde $v \in M_{n1}$ *é uma solução da equação matricial homogênia associada, isto é, da equação matricial*

$$A \cdot y = 0\,.$$

<u>**Conclusão:**</u> *uma solução geral do sistema linear associado a matriz aumentada* $(A\,b)$ *pode ser obtida de uma solução particular do mesmo somada com a solução geral do sistema linear homogêneo.*

Demonstração:

De fato, se $w \in M_{n1}$ uma solução da equação matricial

$$A \cdot x = b$$

e $u_o \in M_{n1}$ é solução particualr de

$$A \cdot x = b\,,$$

segue que

$$v \doteq w - u_o$$

será solução de

$$A \cdot y = 0\,,$$

pois

$$A \cdot v = A \cdot (w - u_o) = A \cdot w - A \cdot u_o = b - b = 0.$$

Logo a matriz

$$w = u_o + v\,,$$

será igual a solução particular de $A \cdot x = b$ somada como solução geral de

$$A \cdot y = 0\,.$$

Reciprocamente, se $v \in M_{n1}$ é solução da equação matricial

$$A \cdot y = O\,,$$

então a amtriz

$$w \doteq u_o + v$$

será solução da equação matricial

$$A \cdot x = b\,,$$

pois

$$A \cdot w = A \cdot (u_o + v) = A \cdot u_o + A \cdot v = b + O = b\,,$$

mostrando que a matriz $w \in M_{n1}$ será solução da equação matricial

$$A \cdot x = b\,,$$

completando a demonstração.

∎

Apliquemos isto ao:

Exemplo B.55 *Encontre o conjunto solução da equação matricial $Ax = b$, onde*

$$A \doteq \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ -1 & 2 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 6 & -2 \end{pmatrix} \quad e \quad b \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Resolução:

Podemos mostrar que

$$(A\,b) \sim (A_R\,b_R)\,,$$

onde

$$\mathbf{A_R} \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad b_R \doteq \begin{pmatrix} -13 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{B.56}$$

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Portanto, pelo Teorema (B.52), segue que a equação matricial é consistente, pois de (B.56), temos que

$$\text{rank}\,(A_R\, b_R) = 3 = \text{rank}\,(A_R)\,, \quad \textit{logo} \quad \text{rank}\,(A\, b) = \text{rank}\,(A)\,.$$

Também pode-se mostrarque

$$u \doteq \begin{pmatrix} -13 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

é uma solução da equação matricial $A_R \cdot x = b_R$*, portanto da equação matricial* $Ax = b$*.*

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Notemos que,

$$v \doteq \begin{pmatrix} -10\alpha \\ -3\alpha \\ 4\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \textit{para cada} \quad \alpha \in \mathbb{R} \ (\textit{ou}\ \mathbb{C})$$

é solução geral da equação matricial

$$A_R \cdot x = 0\,.$$

Logo, do Teorema (B.54) acima, segue que qualquer solução da equação matricial (NH) será da forma

$$w = u + \alpha \cdot v = \begin{pmatrix} -13 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -10 \\ -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \textit{para cad} \quad \alpha \in \mathbb{R} \ (\textit{ou}\ \mathbb{C})\,,$$

isto é,

$$S \doteq \left\{ \begin{pmatrix} -13 - 10\alpha \\ 3 - 3\alpha \\ 1 + 4\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} ; \alpha \in \mathbb{R} \ (\textit{ou}\ \mathbb{C}) \right\}$$

é o conjunto solução da equação matricial (NH).

Para completar nosso estudo sobre da equação matricial (NH) (ou dos sistema linear associado a matriz aumentada $(A\, b)$) temos os seguintes resultados:

Teorema B.57 *Sejam* $A \in M_{mn}$ $b \in M_{m1}$*.*

Suponhamos que a equação matricial (NH)

$$A \cdot x = b\,,$$

é consistente.

A equação matricial (NH),

$$A \cdot x = b\,,$$

tem solução <u>*única*</u> *se, e somente se, posto da matriz* A *é igual a* $\underline{n}$.

Demonstração:

Suponhamos que a equação matricial (NH)

$$A \cdot x = b$$

tem solução única.

Então a equação matricial (H),

$$A \cdot y = O$$

tem solução única, a saber, a solução trivial $u = O \in M_{n1}$.

Logo posto da matriz A deverá ser igual a $\underline{n}$.

Reciprocamente, se posto da matriz A é igual a $\underline{n}$, então a solução trivial $u = O \in M_{n1}$ deverá ser a única solução da equação matricial (H),

$$A \cdot y = O\,.$$

Portanto a equação matricial (NH),

$$A \cdot x = b\,,$$

terá uma única solução, finalizando a demonstração.

∎

Como consequência temos o:

Corolário B.58 *Nas condições do Teorema* (B.57) *acima, se*

$$m \leq n\,,$$

existe uma única solução da quação matricial (NH),

$$A \cdot x = b\,,$$

se, e somente se, posto da matriz A *for igual a* $\underline{n}$, *isto é,*

$$m = n\,.$$

Demonstração:

Suponhamos que exista única solução da equação matricial (NH),

$$A \cdot x = b\,.$$

Então, do Teorema (B.57) acima, segue que $\underline{n}$ será igual ao posto da matriz A.

Mas

$$n = \operatorname{rank}(A) \leq \min\{m, n\} \leq m \leq n\,.$$

Portanto

$$\operatorname{rank}(A) = n \quad \text{e} \quad m = n\,.$$

Reciprocamente, se $\operatorname{rank}(A) = n$, segue do Teorema (B.57) acima, que existe única solução da equação matricial (NH),

$$A \cdot x = b\,,$$

completando a demonstração do resultado.

∎

B.4 A Inversa de Matrizes Não Singulares

Para finalizar, exibiremos um método para encontrar a matriz inversa associada a uma matriz não singular, utilizando o matrizes elementares desenvolvidas na seção anterior.

Para ilustrar consideremos o seguinte exemplo:

Exemplo B.59 *Observemos que a matriz quadrada de ordem* 4

$$A \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{Exercício}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que está na FERL, portanto, o posto da matriz A *será igual a* 4.

Além disso,

$$\det(A) = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 0 - 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 - (1+1) = -4 \neq 0\,.$$

Portanto a matriz A *é não singular, ou seja,* $\operatorname{rank}(A) = 4$ *e* A *é uma matriz inversível.*

Logo, neste exemplo, ocorreu uma relação entre o posto da matriz e a sua inversibilidade.

Isto ocorre em geral, como veremos no resultado a seguir:

Teorema B.60 *Seja* $A \in M_n$ *são equivalentes:*

1. A *é uma matriz não singular;*

2. *posto da matriz* A *é igual a* $\underline{n}$*;*

3. $A \sim I_n$*, isto é,* $A_R = I_n$*, onde a matriz* A_R *é a FERL da matriz* A*.*

Demonstração:

Mostremos que:

1. $\Rightarrow$ **2.** :

Se a matriz A é uma matriz não singular e

$$A \cdot u = O \,,$$

então

$$u \doteq A^{-1} O = O \,,$$

isto é, a única solução da equação $A \cdot y = O$ será a solução trivial $u = O$.

Logo, do Corolário (B.43), segue que o posto da matriz A dever ser igual a $\underline{n}$.

2. $\Rightarrow$ **3.** :

Se o posto da matriz A é igual a $\underline{n}$, então não existe linhas nulas na matriz A_R (a FERL da matriz A) e cada linha de $A_R \in M_{nn}$ tem coeficiente líder 1 e zero nas outras posições da coluna, isto é,

$$A_R = I_n \,.$$

3. $\Rightarrow$ **1.** :

Se

$$A_R = I_n \,,$$

então, como $A \sim A_R$, existe $P \in M_{nn}$, matriz quadrada não singular, tal que

$$I_n = A_R = PA.$$

Portanto a matriz A é uma matriz não singular e $A^{-1} = P$, completando a demonstração do resultado.

∎

Como consequência temos o:

Corolário B.61 *Seja* $A \in M_{nn}$*.*

A matriz A *é uma matriz não singular se, e somente se, ela é produto de matrizes elementares.*

Demonstração:

Do teorema acima temos que $A = P^{-1}$.

Mas, da proposição (B.21), a matriz P é o produto de matrizes elementares, completando a demonstração.

∎

Observação B.62 *Este teorema nos dá um modo de encontrar a inversa de uma matriz quadrada que é uma matriz não singular.*

Ilustraremos o método com o seguinte exemplo:

Exemplo B.63 *Encontrar a inversa da matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolução:

Para encontrar a matriz inversa associada à matriz A *(se existi!) agiremos da seguinte forma: consideremos a matriz*

$$A : I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & : & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & : & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & : & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & : & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

O que faremos é fazer operações sobre as linhas da matriz A *para trasnformá-la (será possível!) na matriz identidade* I_4 *à direita.*

Todas as operações que fizermos na matriz A *faremos na matriz* I_4.

$$A : I_4 \overset{1.^a \text{ linha } + 4.^a \text{ linha}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & : & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & : & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & : & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & : & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{3.^a \text{ linha } - 2.^a \text{ linha}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & : & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & : & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & : & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\frac{-1}{2})\times 3.^a \ linha}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & : & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & : & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & : & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{2.^a \ linha - 3.^a \ linha}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & : & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & : & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & : & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\frac{1}{2}\times 3.^a \ linha}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & : & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & : & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\overset{1.^a \ linha - 4.^a \ linha}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & : & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & : & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (I_4 : B).$$

Afirmação: $B = A^{-1}$, *isto é,*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

De fato, como $A \sim I_n$, *então*

$$I_n = PA,$$

logo

$$P\,(A : I_n) = ((P\,A) : P) = (I_n\,P) \Rightarrow (A : I_n) \sim (I_n : P)$$

mas, do Corolário (B.61) acima,

$$P = A^{-1}\,,$$

portanto $(A\,I_n) \sim (I_n\,A^{-1})$.

Observação B.64 *Podemos utilizar o escalonamento de matrizes para obter bases para subespaços de espaços vetorias de* $\mathbb{R}^n$.

Esse processo é desenvolvido nos primeiros capítulos destas notas.

B.5 Regra de Crammer

Para finalizar temos o:

Teorema B.65 ***(Regra de Cramer)***

Seja $A \in M_n$, $b \in M_{n1}$.

Se

$$\det(A) \neq 0\,,$$

então a equação matricial

$$A \cdot x = b$$

tem uma única solução, dada por

$$u = (u_i)(= A^{-1} \cdot b)\,,$$

cujas componentes são dadas por

$$u_i \doteq \frac{\det(A_i)}{\det(A)}\,, \quad \textit{para cada} \quad i \in \{1, \cdots, n\}, \tag{B.66}$$

onde a matriz A_i, *é o determinante obtido da matriz* A, *trocando-se a i-ésima coluna* a_{*i}, *da matriz* A, *pela coluna da matriz* b.

Demonstração:

Deixaremos a verificação deste como exercício para o leitor.

∎

Apliquemos este resultado ao:

Exemplo B.67 *Resolva o sistema linear*

$$\begin{cases} x_1 & +3x_2 & -x_3 & = & 0 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 0 \\ x_1 & & -x_3 & = & -1 \end{cases}.$$

Resolução:

Observemos que o sistema linear dado pode ser escrito como a seguinte equação matricial

$$A \cdot x = b\,,$$

onde

$$A \doteq \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad b \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Observemos que

$$\det(A) = -1 + 6 + 1 = 8 \neq 0\,.$$

Logo, do Teorema (B.65) matriz A é não singular.

Além disso, da regra de Cramer (isto é, (B.66)), teremos:

$$A_1 = \begin{vmatrix} \boxed{0} & 3 & -1 \\ \boxed{0} & 1 & 1 \\ \boxed{\text{-1}} & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3 + 1 = 4\,; \quad A_2 = \begin{vmatrix} 1 & \boxed{0} & -1 \\ 1 & \boxed{0} & 1 \\ 1 & \boxed{\text{-1}} & -1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2\,;$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & \boxed{0} \\ 1 & 1 & \boxed{0} \\ 1 & 0 & \boxed{\text{-1}} \end{vmatrix} = -1 + 3 = 2\,.$$

Portanto

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{A_1}{A} \\[2ex] \dfrac{A_2}{A} \\[2ex] \dfrac{A_3}{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{4}{8} \\[2ex] \dfrac{2}{8} \\[2ex] \dfrac{2}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\[2ex] \dfrac{1}{4} \\[2ex] \dfrac{1}{4} \end{pmatrix}$$

será a solução da equação matricial $A \cdot x = b$, ou seja,

$$x_1 \doteq \frac{1}{2}, \quad x_2 \doteq \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad x_3 \doteq \frac{1}{4}$$

será a solução do sistema dado inicialmente.

As muitas das demonstrações deixadas como exercício ou omitidas, podem ser encontradas na bibliografia abaixo.

Referências Bibliográficas

[CDC] Callioli, C. A., Domingues, H. H., Costa, R. C. F., *Álgebra Linear e Aplicações,* 2ª edição, Atual Editora Ltda, 1978. 2

[L] Lima, E. L., *Álgebra Linear,* Coleção Matemática Universitária, IMPA, CNPq, Rio de Janeiro, 1995.

14.6, 14.6, 15.1

Índice Remissivo