GABARITO SEMANA 1

Monitor: Christian Delgado Polar

Questão 1
Solução I

A. Base da Indução:
Para n=1
$2^1 > 2^{1-1}$
$2 > 1$

B. Paso Indutivo:
Supomos que é verdade para n=k-1:
$2^{k-1} > 2^{k-1-1} + 2^{k-2-1} + ... + 2^0$
$2^{k-1} > 2^{k-2} + 2^{k-3} + ... + 2^0$ (1)
A partir dessa suposição, tentamos provar que é válido para n=k. Para tal, vamos somar 2^{k-1} em ambos os lados da equação 1:
$2^{k-1} + 2^{k-1} > 2^{k-1} + 2^{k-2} + 2^{k-3} + ... + 2^0$
$2\ 2^{k-1} > 2^{k-1} + 2^{k-2} + 2^{k-3} + ... + 2^0$
$2^k > 2^{k-1} + 2^{k-2} + 2^{k-3} + ... + 2^0$
Portanto:
$2^n > 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + ... + 2^0$ para $n \geq 1$

Solução II

A. Base da Indução:
Para n=1
$2^1 > 2^{1-1}$
$2 > 1$

B. Paso Indutivo:
Supomos que é verdade para n=k:
$2^k > 2^{k-1} + 2^{k-2} + ... + 2^0$ (2)
A partir dessa suposição, tentamos provar que é válido para n=k+1. Para tal, vamos somar 2^k em ambos os lados da equação 2:
$2^k + 2^k > 2^k + 2^{k-1} + 2^{k-2} + 2^{k-3} + ... + 2^0$
$2\ 2^k > 2^k + 2^{k-1} + 2^{k-2} + 2^{k-3} + ... + 2^0$
$2^{k+1} > 2^k + 2^{k-1} + 2^{k-2} + 2^{k-3} + ... + 2^0$
Portanto:
$2^n > 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + ... + 2^0$ para $n \geq 1$

Questão 2
Solução I

A. Base da Indução
Para n=1

$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = (2.n^3 + 3.n^2 + n) / 6$
$1^2 = (2.1^3 + 3.1^2 + 1) / 6$
$1 = (2 + 3 + 1) / 6$
$1 = 6 / 6$
$1 = 1$

B. Passo Indutivo:
Supomos que é verdade para n=k, k ≥ 1:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 = (2.k^3 + 3.k^2 + k) / 6 \qquad (3)$$

A partir dessa suposição, tentamos provar que é válido para n=k+1. Para tal, vamos somar $(k + 1)^2$ em ambos os lados da equação (3):

$$\begin{aligned}1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + \mathbf{(k + 1)^2} &= (2.k^3 + 3.k^2 + k) / 6 + \mathbf{(k + 1)^2} \\ &= (2.k^3 + 3.k^2 + k + 6. (k + 1)^2)/ 6 \\ &= (2.k^3 + 3.k^2 + k + 6. K^2 + 12.k + 6)/ 6 \\ &= ((2.k^3 + 6.k^2 + 6.k + 2) + (3. K^2 + 6.k + 3) + (k + 1))/ 6 \\ &= (2(k + 1)^3 + 3(k + 1)^2 + (k+1)) / 6\end{aligned}$$

Portanto:
$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = (2.n^3 + 3.n^2 + n) / 6$

Solução II

A. Base da Indução
Para n=1
$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = (2.n^3 + 3.n^2 + n) / 6$
$1^2 = (2.1^3 + 3.1^2 + 1) / 6$
$1 = (2 + 3 + 1) / 6$
$1 = 6 / 6$
$1 = 1$

B. Passo Indutivo:
Seja $S(n)=1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$. Supomos que é verdade para n=k-1, para k≥2:

$$S(k-1) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (k-1)^2 = (2.(k-1)^3 + 3.(k-1)^2 + (k-1)) / 6 \qquad (4)$$

A partir dessa suposição, tentamos provar que é válido para n=k. Para tal, vamos somar k^2 em ambos os lados da equação 4:

$$\begin{aligned}S(k-1) + \mathbf{k^2} &= ((2.(k-1)^3 + 3.(k-1)^2 + (k-1)) / 6) + \mathbf{k^2} \\ S(k) &= ((2.k^3 - 3.k^2 + k) / 6) + k^2 \\ S(k) &= (2.k^3 + 6.k^2 – 3.k^2 + k) / 6 = (2.k^3 + 3.k^2 + k) / 6\end{aligned}$$

Portanto:
$S(n) = (2.n^3 + 3.n^2 + n) / 6$ ou seja
$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = (2.n^3 + 3.n^2 + n) / 6$

Solução III

A. Base da Indução

Para n=1

$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = (2.n^3 + 3.n^2 + n) / 6$

$1^2 = (2.1^3 + 3.1^2 + 1) / 6$

$1 = (2 + 3 + 1) / 6$

$1 = 6 / 6$

$1 = 1$

B. Passo Indutivo:

Supomos que é verdade para n=k-1, para k≥2:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (k-1)^2 = (2.(k-1)^3 + 3.(k-1)^2 + (k-1)) / 6 \qquad (5)$$

A partir dessa suposição, tentamos provar que é válido para n=k. Para tal, vamos somar k^2 em ambos os lados da equação 5:

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (k-1)^2 + \mathbf{k^2} &= \mathbf{k^2} + ((2.(k-1)^3 + 3.(k-1)^2 + (k-1)) / 6) \\ &= k^2 + ((2.k^3 - 3.k^2 + k) / 6) \\ &= (2.k^3 + 3.k^2 + k) / 6 \end{aligned}$$

Portanto:

$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = (2.n^3 + 3.n^2 + n) / 6$