Cap. 2 - Eq. Schr. Independente do tempo

Estados Estacionários

$$V = V(x)$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t) + V(x)\,\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

é fácil mostrar que $\Psi(x,t) = \phi(x)\cdot f(t)$ é soluç:

Substituindo,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} f(t)\frac{d^2\phi}{dx^2} + V(x)\,\phi(x)\,f(t) = i\hbar\,\phi\,\frac{df}{dt}$$

cte de separaçã de variáveis

$$\div \text{ por } \Psi: \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\phi}\frac{d^2\phi}{dt} + V(x) = i\hbar\frac{1}{f}\frac{df}{dt} \equiv E$$

$$\Rightarrow \quad \frac{df}{dt} = \frac{E}{i\hbar} f \Rightarrow \underline{f = e^{-iEt/\hbar}} \quad \text{e}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi}{dx^2} + V(x)\,\phi(x) = E\,\phi(x)$$ ← Eq. de autovalores

Eq. de schröd. indep. do tempo

tb escrito como $\underline{H\,\phi(x) = E\,\phi(x)}$,

com H o operador $H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x) = \frac{p^2}{2m} + V(x)$.

Então, uma forma de solução é

$$\Psi(x,t) = \phi(x)\,e^{-iEt/\hbar}.$$

Propriedades :

1) Estado estacionário

$$|\Psi(x,t)|^2 = |\phi(x)|^2 \text{ , indep. do tempo.}$$

$$\langle Q(x,p)\rangle = \int \phi^* e^{iEt/\hbar} \underbrace{Q(x,p)}_{\text{operador}} \phi e^{-iEt/\hbar} dx =$$

$$= \int \phi^* Q(x,p) \phi \, dx \text{ : indep. do tempo}$$

2) Estados de energia bem definida:

O operador $H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$ é o correspondente à energia clássica $p^2/2m + V(x)$. Seu valor esperado vale:

$$\langle H\rangle = \int \phi^* e^{iEt/\hbar} H \phi e^{-iEt/\hbar} dx =$$

verso

$$= \int \phi^* E \phi \, dx = E \int \phi^* \phi \, dx = E .$$

Então, interpretamos a cte E como sendo a energia do estado estacionário $\phi(x) e^{-iEt/\hbar}$!

Na verdade, os únicos estados que podemos falar em energia são os estacionários.

3) Solução geral

A Eq. $H\Psi = E\Psi$ produz uma família de soluções E_n, $\phi_n(x)$. Logo, podemos combiná-las e produzir a soluç geral:

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{N} c_n \, \phi_n(x) \, e^{-i E_n t/\hbar} .$$

c_n's arbitrárias; Eq. linear

Como achar os coef. c_n ?

Uso a condiç inicial : $\Psi(x,0)$

$$\Rightarrow \quad \Psi(x,0) = \sum_{n=1}^{N} c_n \, \phi_n(x)$$

opera multiplico por $\phi_m^*(x)$ e integro:

$$\int \phi_m^*(x) \, \Psi(x,0) \, dx = \sum_{n=1}^{N} c_n \underbrace{\int \phi_m^*(x) \, \phi_n(x) \, dx}_{\delta_{n,m}} = c_m$$

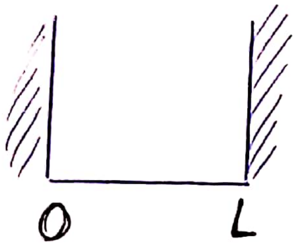
sempre, p/ $\forall$ ϕ_n soluç do Eq. de Schr.

$$\Rightarrow \quad c_m = \int \phi_m^*(x) \, \Psi(x,0) \, dx$$

só precisamos especificar o funç e ñ a derivada!

$\Psi(x,t)$ ñ tem energia definida

Partícula entre duas paredes impenetráveis



$$V(x<0) = \infty \quad ; \quad V(0<x<L) = 0$$
$$V(x>L) = \infty$$
$$\Downarrow$$
$$\phi(x<0) = 0 \quad \text{e} \quad \phi(x>L) = 0.$$

$0<x<L$: $$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi}{dx^2} = E\phi$$

Soluç:

a) e^{ikx} ou e^{-ikx} $\Rightarrow \phi = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$

Subst. vem $\underline{E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}}$

ou

b) $\operatorname{sen} kx$ ou $\cos kx$ $\Rightarrow \phi = A \operatorname{sen} kx + B\cos kx$

$\phi(x)$ é funç contínua (partícula ñ dá salto!)

Ent, $\phi(0) = 0 \Rightarrow B = 0$

$\phi(x=L) = 0 \Leftrightarrow 0 = A \operatorname{sen} kL \Rightarrow \underline{kL = n\pi}$

$n=0 \Rightarrow \phi = 0$; rejeito, já que a partícula tem que estar em algum lugar. Ent,

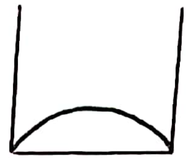
$$\underline{\phi(x) = A \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x} \quad \text{e} \quad \underline{E = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2mL^2}}.$$

Normalizaç:

$$1 = \int_0^L |\phi|^2 dx = |A|^2 \int_0^L \operatorname{sen}^2 \frac{n\pi}{L} x \, dx \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

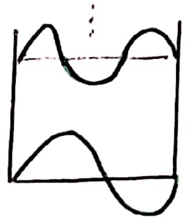
Propriedades:

1) a mais baixa energia ñ é zero: $E_1 = \frac{\hbar^2}{2mL^2}$



estado fundamental

2) estados excitados ganham nó



3) são mutuamente ortogonais:

$$\langle \phi_n | \phi_m \rangle = \int \phi_n^*(x)\,\phi_m(x)\,dx = \frac{2}{L}\int \operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}x \cdot \operatorname{sen}\frac{m\pi}{L}x\,dx = \delta_{n,m}$$

$2\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$

4) formam um conjunto completo:

pode-se mostrar que $\delta(x-x') = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n^*(x)\,\phi_n(x')$

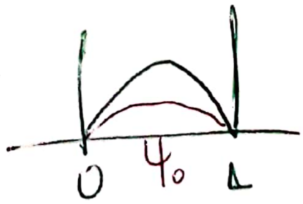
Então, $\forall f(x)$, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\phi_n(x)$.

5) superposição:

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\,\phi_n(x)\,e^{-iE_nt/\hbar}$$

com $c_n = \int \phi_n^*(x)\,\Psi(x,0)\,dx \overset{\text{neste caso}}{=} \sqrt{\frac{2}{L}}\sum_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\cdot\Psi(x,0)$

Exercício feito no livro:
obtenha os c_n, dado $\Psi(x,0) = A\cdot x(L-x)$



6) a derivada do ϕ em $x=0$ e L:

são descontínuas, mas é porque o potencial vai a ∞ nesses ptos.

P/ potencial finito, mesmo c/ degrau, a derivada é contínua.

7) Interpretando os C_n:

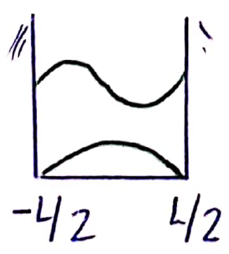
$$\langle H \rangle = \int \Psi^*(x,t)\, H\, \Psi(x,t)\, dx =$$

$$= \sum_{n,m} C_n^* C_m\, e^{i(E_n - E_m)t/\hbar}\, E_m \cdot \underbrace{\int \phi_n^* \phi_m\, dx}_{=\delta_{n,m}} =$$

$$= \sum_n |C_n|^2 \cdot E_n$$

Ent, $|C_n|^2$ é a probab. de numa medida do energia feita em $\Psi(x,t)$ obtermos o valor E_n; podemos tb dizer que é a probab. de numa medida encontrar o sistema no estado n.

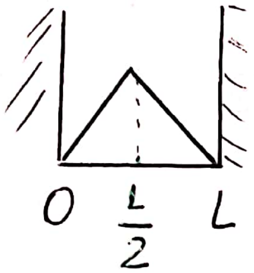
7- Qdo o potencial for par



$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}$$

$$\phi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}} \cos \frac{n\pi x}{L}, & n = 1, 3, \dots \\ \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}, & n = 2, 4, \dots \end{cases}$$

Exemplo de evolução temporal



$$\Psi(x,0) = \begin{cases} \alpha x, & 0 \leq x \leq L/2 \\ \alpha(L-x), & \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases}$$

- veja que $\Psi(x,0)$ é contínua
- normalizando:

$$1 = \int_0^L |\Psi(x,0)|^2 dx = \int_0^{L/2} \alpha^2 x^2 dx + \int_{L/2}^{L} \alpha^2 (L-x)^2 dx = \dots = \frac{\alpha^2 L^3}{12}$$

$$\Rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{12}{L^3}} .$$

- cálculo dos C_n:

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \phi_n(x) e^{-iE_n t/\hbar} , \quad \phi_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x$$

$$C_n = \int \phi_n^*(x) \Psi(x,0) dx =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{L}} \sqrt{\frac{12}{L^3}} \left(\int_0^{L/2} x \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \, dx + \int_{L/2}^{L} (L-x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \, dx \right)$$

uso que $\int x \operatorname{sen} ax \, dx = \frac{\operatorname{sen} ax}{a^2} - x \frac{\cos ax}{a}$

$$\Rightarrow \quad C_n = \frac{4\sqrt{6}}{\pi^2} \frac{1}{n^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ \frac{4\sqrt{6}}{\pi^2} \frac{1}{n^2} (-1)^{n/2}, & n \text{ ímpar} \end{cases}$$

Em relação ao centro da caixa, $x = L/2$, as autofunç são pares ou ímpares, logo, como $\Psi(x,0)$ é par, somente as ϕ_n pares resultam em $C_n \neq 0$; os estados c/ ϕ_n ímpar não se misturam.

Cuidado, ϕ_n par tem n ímpar!

Então,

$$\Psi(x,t) = \frac{8\sqrt{3}}{\pi^2} \sum_{\substack{n \\ \text{ímpar}}} \frac{(-1)^{n/2}}{n^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \cdot e^{-i \frac{n^2 \hbar^2 \pi^2}{2mL^2} t}$$

Vejo que:

a) $$\sum_n |C_n|^2 = \frac{96}{\pi^4} \underbrace{\sum_{n \text{ ímpar}} \frac{1}{n^4}}_{= \pi^4/96} = 1$$

consequência da normalização de $\Psi(x,t)$, ou de $\phi_n(x)$

b) C_1 é o maior dos C_n:

$$|C_1|^2 = \frac{96}{\pi^4} = 0,9855$$

$$\left|\frac{C_3}{C_1}\right|^2 = 1/3^4 = 1/81 \; ; \; \left|\frac{C_5}{C_1}\right|^2 = 1/5^4 \quad \dots$$

A razão disso é que $\Psi(x,0)$ tem um perfil próximo ao do autoestado $\phi_1(x)$. Assim, $\phi_1(x)$ contribuirá mais p/ $\Psi(x,t)$, ou, C_1 domina sobre os demais C_n.

Verso

c) média da energia

$$\langle H \rangle = \sum_{n \text{ ímpar}} |C_n|^2 \cdot E_n = \sum_{n \text{ ímpar}} \frac{96}{\pi^4} \frac{1}{n^4} \cdot E_1 \cdot n^2$$

$$= \frac{96}{\pi^4} E_1 \cdot \underbrace{\sum_{n \text{ ímpar}} \frac{1}{n^2}}_{= \frac{\pi^2}{8}} = \frac{12}{\pi^2} E_1 \sim 1,21 \, E_1$$

próximo de E_1, mas ñ tão próximo qto o do caso $\Psi(x,0) = $

$\langle H \rangle = 1.01$

$$\sum_{n \text{ imp}} 1/n^2 = \pi^2/8$$

$$\sum_{n \text{ par}} 1/n^2 = \pi^2/24$$

$$\sum_n 1/n^2 = \pi^2/6$$

Um pouco de álgebra antes do oscilador

- comutador: $[x, p] f = (xp - px) f = i\hbar f$

$$\Rightarrow [x, p] = i\hbar$$

$[x, p_y] = 0$ ou $[y, p_x] = 0$

$[L_x, L_y] = i\hbar L_z$;

- hermitiano conjugado:

$$\langle Q \rangle = \int \psi^* \theta \psi \, dx \equiv \langle \psi | \theta | \psi \rangle \text{ ou } \langle \psi | \theta \psi \rangle$$

$$\langle Q \rangle^* = \left(\int \psi^* \theta \psi \, dx \right)^* = \int (\theta \psi)^* \psi \, dx =$$

é um outro operador.

$$= \langle \theta \psi | \psi \rangle \equiv \langle \psi | \theta^+ | \psi \rangle$$

adjunto ou hermitiano conjugado de θ

Se $\langle Q \rangle = \langle Q \rangle^*$, isto é, real, então,

$$\underline{\theta^+ = \theta}$$

e dizemos que θ é hermitiano.

Exemplo: $\langle p \rangle^* = \left(\int \psi^* p \psi \right)^* = \left(\int \psi^* \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \psi \right)^* =$

$$= \left(\frac{\hbar}{i} \cancel{\psi^* \psi \Big|_{-\infty}^{\infty}}_{0} - \int \psi \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right)^* = \left(- \int \psi \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \psi^* \right)^* =$$

$$= \int \psi^* \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \psi \, dx = \langle p \rangle \Rightarrow p \text{ é hermitiano}$$

Como $\langle p\rangle^* = \int \psi^* p^+ \psi \, dx$, então, $p^+ = p$.

É trivial ver que $x^+ = x$.

- A todo observável corresponde um operador hermitiano.

Ex. $L_z^+ = L_z$, $\vec{L}^+ = \vec{L}$, $H = H^+$.

- Seja ϕ autofunç de θ com autovalor λ:

$$\theta \phi = \lambda \phi$$

então $\langle \theta \rangle_\phi = \int \phi^* \theta \phi \, dx = \lambda \int \phi^* \phi \, dx = \lambda$

Se $\underline{\theta^+ = \theta}$ $\Rightarrow$ $\langle \theta \rangle = \langle \theta \rangle^*$ $\Rightarrow$ $\underline{\lambda \text{ real}}$

- representação matricial

Seja A um operador e $\{\phi_n\}$ uma base.

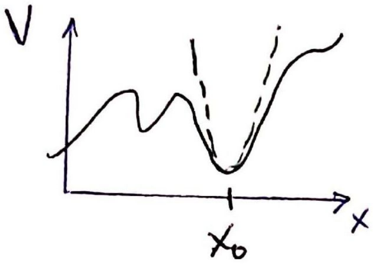
$$A_{nm} \equiv \int \phi_n^* A \phi_m \, dx \equiv \langle \phi_n | A | \phi_m \rangle$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \\ A_{21} & A_{22} & \cdots \end{pmatrix}$$

$$A_{nm}^* = \left(\int \phi_n^* A \phi_m dx\right)^* = \int (A\phi_m)^* \phi_n dx = \int \phi_m^* A^+ \phi_n \overset{\text{def}}{=} \langle \phi_m | A^+ | \phi_n \rangle$$
$$= (A^+)_{mn}$$

$$\Rightarrow A^+ = \begin{pmatrix} A_{11}^* & A_{21}^* & \\ A_{12}^* & A_{22}^* & \cdots \end{pmatrix}$$

2.3 Oscilador Harmônico



Sempre que ~ x_0 temos uma função quadrática de x:

medida do equilíbrio

$$V(x) = \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

Queremos resolver $\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\psi = E\psi$,

com $\psi(x \to \pm\infty) \to 0$.

2.3.1 Método algébrico

$$H\psi = E\psi, \quad H = \frac{1}{2m}\left(p^2 + (m\omega x)^2\right)$$

extraindo o termo c/ dimensão de energia, $\hbar\omega$:

$$H = \hbar\omega\left(\frac{p^2}{2m\hbar\omega} + \frac{m\omega^2x^2}{2\hbar\omega}\right) =$$

$$= \hbar\omega\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + \frac{ip}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\right)\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - i\frac{p}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\right)$$

se fosse clássico!

$$= \frac{\hbar\omega}{2}\left(aa^+ + a^+a\right), \text{ com}$$

como é quântico, simetrizo!

a_- no livro

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + \frac{ip}{\sqrt{2m\hbar\omega}}$$

$$a^+ = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - \frac{ip}{\sqrt{2m\hbar\omega}}$$

a_+ no livro

Mas como

$$[a, a^+] = aa^+ - a^+a = \overset{\text{uso que } [x, p] = i\hbar}{\cdots\cdots} = 1,$$

Então, $H = \hbar\omega(a^+a + 1/2) \equiv \hbar\omega(N + \frac{1}{2})$

onde $N = a^+a$. Mostrar que $[N, a] = -a$ e
$[N, a^+] = a^+$.

Sejam ϕ_ν e ν / $N\phi_\nu = \nu\phi_\nu$

$$\Rightarrow H\phi_\nu = \hbar\omega(\nu + 1/2)\phi_\nu \equiv E_\nu\phi_\nu ,$$

c/ $E_\nu = \hbar\omega(\nu + 1/2)$.

Até aqui ñ fizemos muito, já que ñ sabemos ν!

1) $N^+ = (a^+a)^+ = N \Rightarrow \nu$ é real

2) ν é ≥ 0:

$$\nu = \int \phi_\nu^* N\phi_\nu = \int \phi_\nu^* a^+a\phi_\nu = \int (a\phi_\nu)^* a\phi_\nu \, dx =$$

$$= \int \underbrace{f_\nu^* f_\nu}_{=|f_\nu|^2 \geq 0} dx \text{ , logo, } \geq 0$$

3) P/ $\nu = 0$:

$$0 = \int \phi_0^* a^+a\phi_0 = \int \underbrace{(a\phi_0)^*}_{f_0^*} \underbrace{(a\phi_0)}_{f_0} dx = \int \overbrace{|a\phi_0|^2}^{\geq 0} dx$$

$$\Rightarrow a\phi_0 = 0$$

4 - Se ϕ_ν é autofunção de N, então, $a\phi_\nu$ tb é:

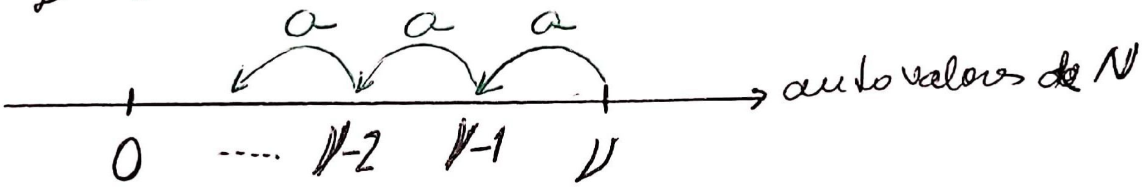
$$N(a\phi_\nu) = \underbrace{Na}_{[N,a]=-a}\phi_\nu = (aN-a)\phi_\nu = (a\nu-a)\phi_\nu$$

$$= (\nu-1)(a\phi_\nu) \Rightarrow$$ $a\phi_\nu$ tem autovalor $\nu-1$

Tb vale que $N(a^2\phi_\nu) = (\nu-2)(a^2\phi_\nu)$

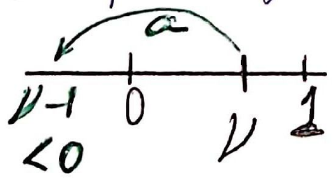
e assim sucessivamente $N(a^k\phi_\nu) = (\nu-k)(a^k\phi_\nu)$

A ação do operador a em ϕ_ν abaixa o valor de ν de uma unidade:

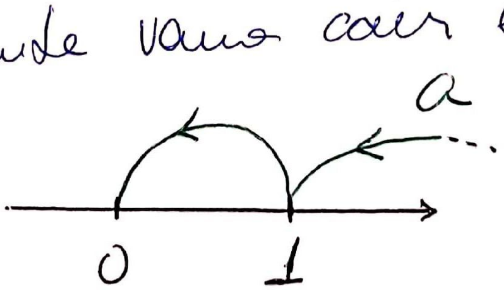


Suponha que ν possa estar no intervalo $0<\nu<1$.

A ação de a produziria um ν negativo, o que não pode:

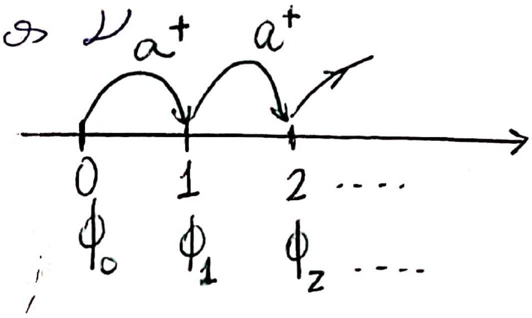


O único jeito de evitar é ter ν inteiro, assim atuando a sucessivamente vamos cair em 1 e em seguida em 0:



Como $a\phi_0 = 0$, a descida para!

Não há limite superior p/ os ν

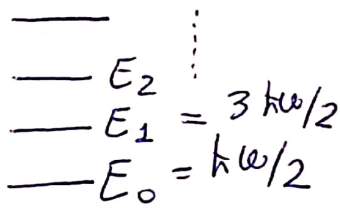


$$N(a^+\phi_\nu) = \dots(\nu+1)(a^+\phi_\nu)$$

$$N(a^+)^k\phi_\nu = \dots(\nu+k)(a^+)^k\phi_\nu \, ;$$

Então, $$H\phi_\nu = \hbar\omega(n+1/2)\phi_\nu \, , \quad n = 0,1,2,\dots$$

$$\Rightarrow \quad E_n = \hbar\omega(n+1/2)$$



Como determinar os ϕ_n?

- $$a\phi_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,x + i\,\frac{\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\right)\phi_0 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\phi_0}{dx} = -\frac{m\omega}{\hbar}x\,\phi_0$$

$$\int\frac{d\phi_0}{\phi_0} = -\frac{m\omega}{\hbar}\int x\,dx \quad \Rightarrow \quad \phi_0 = A\,e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty}|\phi_0|^2\,dx \quad \Rightarrow \quad A = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}$$

- $a^+\phi_\nu$ é autofunção de N com autovalor $\nu+1$

mas quem tem autovalor $\nu+1$ é $\phi_{\nu+1}$, logo,

$$a^+\phi_\nu = c_\nu\,\phi_{\nu+1}$$

Então, $$\phi_1 = \frac{1}{c_0}a^+\phi_0 = \frac{1}{c_0}\left(\sqrt{\frac{\omega m}{2\hbar}}\,x - \frac{i\,\frac{\hbar}{i}\partial/\partial x}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\right)\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$$

$$\phi_1 = \frac{1}{C_0}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\; x\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} .$$

normalizo ϕ_1 e encontro $C_0 = 1$.

Em geral, $\displaystyle \phi_n = \frac{(a^+)^n}{\sqrt{n!}}\,\phi_0$.

Ortogonalidade dos ϕ_n:

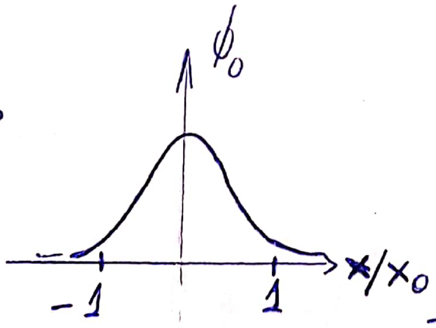
$$\int \phi_m^* N \phi_n \, dx = \begin{cases} \int \phi_m^* N \phi_n \, dx = n \int \phi_m^* \phi_n \, dx \\ \text{ou} \\ \int \phi_m^* N \phi_n \, dx = m \int \phi_m^* \phi_n \, dx \end{cases}$$

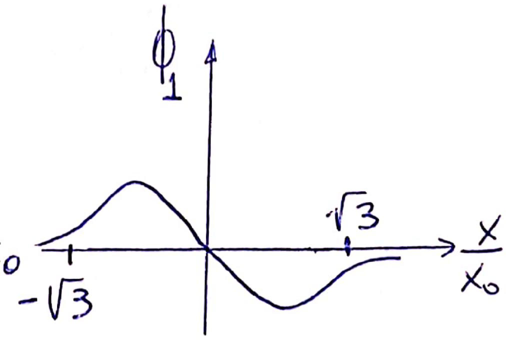
Então, se $n \neq m$, só podemos ter $\int \phi_m^* \phi_n \, dx = 0$!

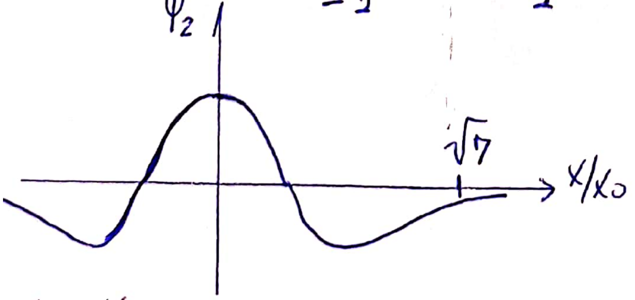
(Se $n = m$, $\int \phi_m^* N \phi_n \, dx = n \int \phi_n^* \phi_n \, dx = n$)

Enfim, $\int \phi_m^* \phi_n \, dx = \delta_{n,m}$

Gráficos







Pts de retorno:

$$\frac{1}{2} m \omega^2 X_n^2 = E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$$

$$X_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \;,\; X_1 = \sqrt{3}\, X_0 \;,\; X_2 = \sqrt{7}\, X_0$$

ϕ_n "oscila" p/ $|X| < X_n$ e decai exponencialmente p/ $|X| > X_n$.

Como vimos, $a^+\phi_n = C_n \phi_{n+1}$ ver verso: $\longrightarrow$

$C_n = ?$ $\quad 1 = \int \phi^*_{n+1} \phi_{n+1} = \dfrac{1}{|C_n|^2} \int \phi^*_n \underbrace{a a^+}_{=1+N} \phi_n \, dx = \dfrac{1+n}{|C_n|^2}$

$$\Rightarrow \underbrace{a^+\phi_n = \sqrt{n+1}\,\phi_{n+1}}_{\text{levantamento}} \qquad \text{(criação)}$$

Tb temos que $a\phi_n = d_n \phi_{n-1}$

$$\Rightarrow \quad 1 = \int \phi^*_{n-1}\phi_{n-1} = \frac{1}{|d_n|^2}\int \phi^*_n \underbrace{a^+ a}_{=N} \phi_n \, dx = \frac{1}{|d_n|^2} \cdot n$$

$$\Rightarrow \underbrace{a\phi_n = \sqrt{n}\,\phi_{n-1}}_{\text{abaixamento}} \qquad \text{(destruição)}$$

Valores Esperados nos autoestados n

$\langle x^2 \rangle_n = \int \phi^*_n x^2 \phi_n \, dx \quad ; \quad \langle p^2 \rangle = \int \phi^*_n p^2 \phi_n \, dx$

uso que $\quad x = \sqrt{\dfrac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^+) \quad$ e $\quad p = i\sqrt{\dfrac{\hbar m\omega}{2}}(a^+ - a)$

$$\Rightarrow \langle x^2 \rangle = \int \phi^*_n \frac{\hbar}{2m\omega}(a+a^+)^2 \phi_n \, dx =$$

zero

$$= \frac{\hbar}{2m\omega}\int \phi^*_n \left(a^2 + a^{+2} + a a^+ + a^+ a\right)\phi_n \, dx =$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega}\int \phi^*_n \left(a\sqrt{n+1}\,\phi_{n+1} + a^+\sqrt{n}\,\phi_{n-1}\right) dx =$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega}\int\left(\sqrt{n+1}\,\sqrt{n+1}\,\phi_n + \sqrt{n}\,\sqrt{n}\,\phi_n\right)\phi_n^* = \frac{\hbar}{2m\omega}(2n+1).$$

Então, $\langle V\rangle_n = \frac{1}{2}m\omega^2\langle x^2\rangle = \underline{\frac{\hbar\omega}{2}(n+1/2)}$

Fazer $\langle p^2\rangle_n$: $\langle p^2\rangle = m\hbar\omega(n+1/2)$

$$\Rightarrow \langle T\rangle_n = \left\langle\frac{p^2}{2m}\right\rangle = \frac{\hbar\omega}{2}(n+1/2) = \langle V\rangle_n$$

igualdade só p/ o oscilador

ou, $H = T+V \Rightarrow E_n = \langle T\rangle_n + \langle V\rangle_n$

$$\Rightarrow \langle T\rangle_n = -\langle V\rangle_n + E_n = -\frac{\hbar\omega}{2}(n+1/2) + \hbar\omega(n+1/2)$$

$$\Rightarrow \underline{\langle T\rangle_n = \frac{\hbar\omega}{2}(n+1/2)}$$

(caso particular de:
se $V = \lambda x^l \Rightarrow l\langle V\rangle = 2\langle T\rangle$)

<u>Incertezas</u>

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \underbrace{\langle x\rangle^2}_{=0}} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\,(n+1/2)^{1/2}$$

$$\Delta p = \sqrt{\langle p^2\rangle - \underbrace{\langle p\rangle^2}_{=0}} = \sqrt{m\hbar\omega}\,\left(n+\frac{1}{2}\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \Delta x\cdot\Delta p = \hbar(n+1/2) \geq \frac{\hbar}{2}$$ <u>OK</u>