PMT3306 - Módulo “Plasticidade” - Material de apoio

Cláudio Geraldo Schön

Departamento de Engenharia Metalúrgica e de Materiais
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

8 de setembro de 2020

Inadequação da deformação de engenharia

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\Delta l_i}{l_j^0}$$

mas (deformação em duas etapas $l_0]rightarrowl_1 \rightarrow l_2$):

$$\varepsilon_{11}^{0\rightarrow 2} \equiv \frac{l_1^2 - l_1^0}{l_1^0} \neq \varepsilon_{11}^{0\rightarrow 1} + \varepsilon_{11}^{1\rightarrow 2} \equiv \frac{l_1^1 - l_1^0}{l_1^0} + \frac{l_1^2 - l_1^1}{l_1^1}$$

Inadequação da deformação de engenharia

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\Delta l_i}{l_j^0}$$

mas (deformação em duas etapas $l_0]rightarrowl_1 \rightarrow l_2$):

$$\varepsilon_{11}^{0\rightarrow 2} \equiv \frac{l_1^2 - l_1^0}{l_1^0} \neq \varepsilon_{11}^{0\rightarrow 1} + \varepsilon_{11}^{1\rightarrow 2} \equiv \frac{l_1^1 - l_1^0}{l_1^0} + \frac{l_1^2 - l_1^1}{l_1^1}$$

Deformação real

Deformação real

Definição:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

para uma deformação uniaxial infinitesimal:

$$\mathrm{d}\varepsilon_{11} = \frac{\mathrm{d}l_1}{l_1}$$

Deformação real

Definição:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

para uma deformação uniaxial infinitesimal:

$$\mathrm{d}\varepsilon_{11} = \frac{\mathrm{d}l_1}{l_1}$$

$$\varepsilon^r_{11} = \ln \frac{l_1^2}{l_1^0} \tag{1}$$

Tensão real

$$\sigma_{11}^{r} \equiv \frac{F_1}{s_1(\varepsilon_{11})} \tag{2}$$

- O volume se conserva durante a deformação plástica.
- A deformação é uniforme e homogênea ao longo de todo o volume do corpo.

$$\frac{V(\varepsilon_{11})}{V_0} = 1 \Rightarrow \frac{l_1^1 \times s_1(\varepsilon_{11})}{l_1^0 \times s_1^0} = 1$$

Tensão real

$$\sigma^r_{11} \equiv \frac{F_1}{s_1(\varepsilon_{11})} \tag{2}$$

- O volume se conserva durante a deformação plástica.
- A deformação é uniforme e homogênea ao longo de todo o volume do corpo.

$$\varepsilon_{11} \equiv \frac{l_1^1 - l_1^0}{l_1^0} \Rightarrow \frac{l_1^1}{l_1^0} = 1 + \varepsilon_{11}$$

Tensão real

$$\sigma^r_{11} \equiv \frac{F_1}{s_1(\varepsilon_{11})} \qquad (2)$$

- O volume se conserva durante a deformação plástica.
- A deformação é uniforme e homogênea ao longo de todo o volume do corpo.

$$\sigma^r_{11} = \sigma_{11}\,(1 + \varepsilon_{11})$$

Tensão real

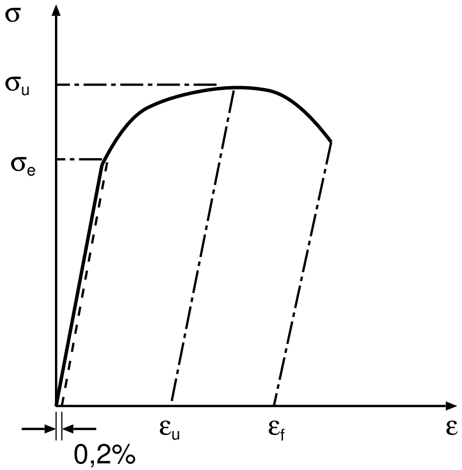
$$\sigma^r_{11} \equiv \frac{F_1}{s_1(\varepsilon_{11})} \tag{2}$$

- O volume se conserva durante a deformação plástica.
- A deformação é uniforme e homogênea ao longo de todo o volume do corpo.

$$\sigma^r_{11} = \sigma_{11}\left(1 + \varepsilon_{11}\right)$$

$$\varepsilon^r_{11} = \ln\left(1 + \varepsilon_{11}\right)$$

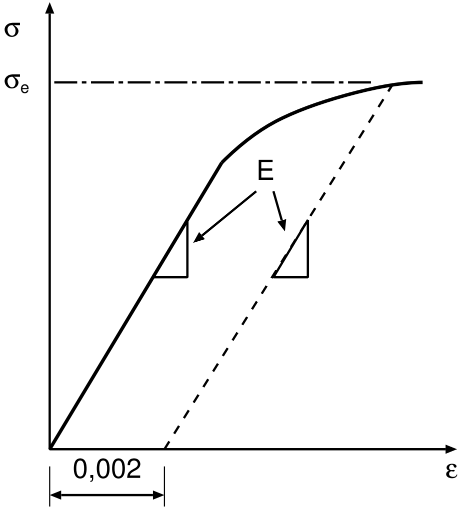
Parâmetros da curva tensão - deformação



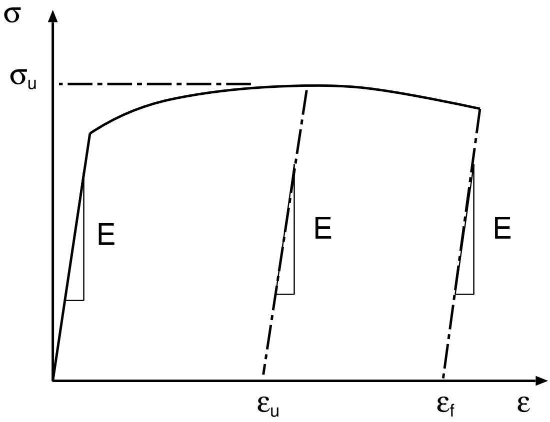
ε

- **O limite de escoamento** (*yield stress*, σ_e).
- **O limite de resistência** (*ultimate tensile stress*, σ_u).
- **O alongamento uniforme** (ε_u).
- **O alongamento total** (ε_f).

Limite de escoamento

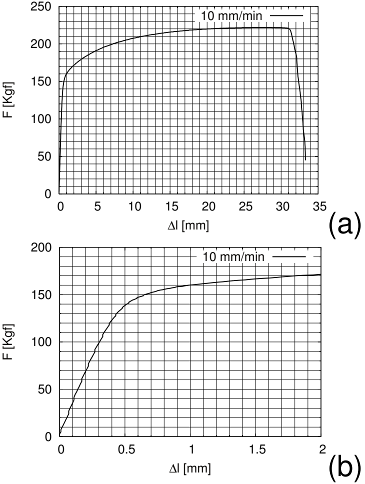


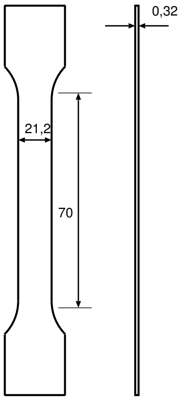
Limite de resistência e alongamentos



Curvas tensão - deformação experimentais

Aço AISI 1006





Curvas tensão - deformação experimentais

Aço AISI 1006

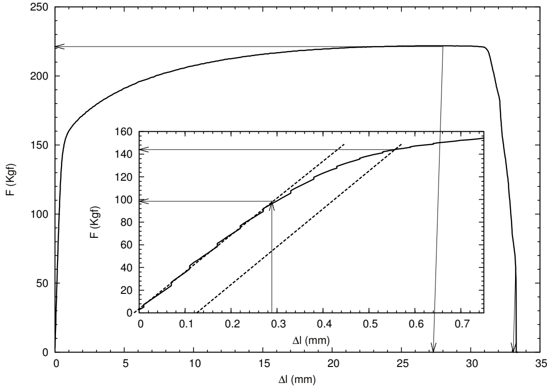
a. $E = \frac{150}{0.0043} = 34,9$ GPa (o ensaio foi executado sem extensômetro, portanto este resultado contém um erro devido à deformação da máquina).

b. $\sigma_e = 225$ MPa.

c. $\sigma_u = 338$ MPa.

d. $\varepsilon_u = 0,385$.

e. $\varepsilon_f = 0,47$.



Equação de Hollomon

Hollomon (1944) estudando latões para a Marinha americana:

$$\sigma^r = \sigma_1 \left(\varepsilon_p^r\right)^n$$

Ludiwik:

$$\sigma^r = \sigma_0 + \sigma_1 \left(\varepsilon_p^r\right)^n$$

Equação de Hollomon

Hollomon (1944) estudando latões para a Marinha americana:

$$\sigma^r = \sigma_1 \left(\varepsilon_p^r\right)^n$$

Ludiwik:

$$\sigma^r = \sigma_0 + \sigma_1 \left(\varepsilon_p^r\right)^n$$

Outra versão, Relação de Ramberg - Osgood:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_e} = \frac{\sigma}{\sigma_e} + \varepsilon_0 \left(\frac{\sigma}{\sigma_e}\right)^{n'}$$

com

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma_e}{E}$$

Equilíbrio plástico

Ponto de máximo da curva tensão - deformação (de engenharia):

$$\mathrm{d}F_1 = \mathrm{d}\left[\sigma^r_{11} \times s_1\left(\varepsilon^r_{11}\right)\right] \Rightarrow \left[s_1\left(\varepsilon^r_{11}\right)\mathrm{d}\sigma^r_{11}\right] + \left[\sigma^r_{11}\mathrm{d}s_1\left(\varepsilon^r_{11}\right)\right] = 0$$

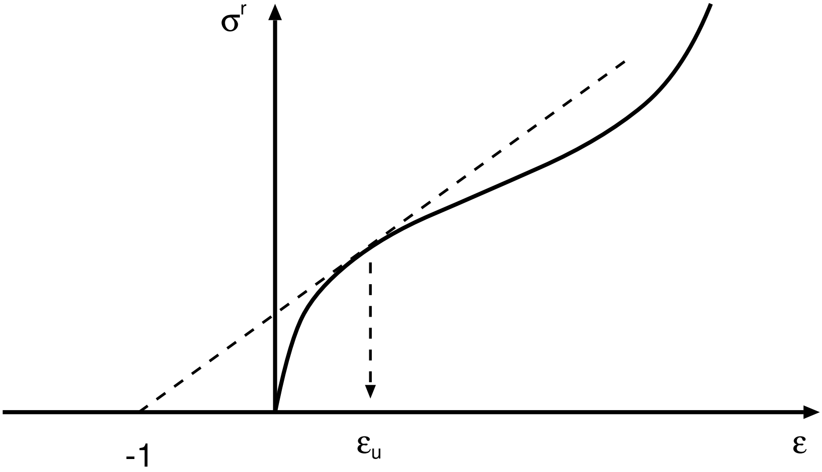
O equilíbrio será dado por:

$$\sigma^r_{11} = \frac{\mathrm{d}\sigma^r_{11}}{\mathrm{d}\varepsilon^r_{11}}$$

mas

$$\mathrm{d}\varepsilon^r_{11} = \frac{\mathrm{d}\varepsilon_{11}}{\left(1+\varepsilon_{11}\right)}$$

Construção gráfica



Relação de Considère

$$\sigma_1 \left(\varepsilon_{11}^r\right)^n = n\sigma_1 \left(\varepsilon_{11}^r\right)^{n-1} \Rightarrow \left(\frac{n}{\varepsilon_{11}^r} - 1\right)\sigma_1 = 0$$

portanto:

$$\varepsilon_u^r = n$$

O tratamento de Argon

Segundo Ali Argon:

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_0 \exp\left[-\frac{\Delta H(\tau, \tau_0, P)}{k_B T}\right]$$

derivando:

$$\mathrm{d}\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_0 \exp\left(-\frac{\Delta H}{k_B T}\right)\left[-\frac{1}{k_B T}\left(\frac{\partial H}{\partial \tau}\right)_{P,\tau_0}\mathrm{d}\tau - \frac{1}{k_B T}\left(\frac{\partial H}{\partial \tau_0}\right)_{P,\tau}\mathrm{d}\tau_0 \right. \\ \left. - \frac{1}{k_B T}\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_{\tau,\tau_0}\mathrm{d}P + \frac{\Delta H}{k_B T^2}\mathrm{d}T\right]$$

onde

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{\beta \tau \dot{\gamma}}{\rho C_P}$$

Instabilidade em uma banda de espessura *h*

Com $k(T)$ sendo a condutividade térmica:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\beta\tau\dot{\gamma}}{\rho C_P}\right)\left(\frac{\rho C_P}{k_T}\right)\left(\frac{h^2\dot{\gamma}}{\gamma}\right) = \left(\frac{\beta\tau\dot{\gamma}h^2}{k_T\gamma}\right)\dot{\gamma}$$

substituindo:

$$\frac{\mathrm{d}\dot{\gamma}}{\mathrm{d}\gamma} = -\frac{1}{k_B T}\left(\frac{\partial\Delta H}{\partial\gamma}\right)_{P,T}\dot{\tau} - \frac{1}{k_B T}\left(\frac{\partial\Delta H}{\partial P}\right)_{\gamma,T}\dot{P}$$
$$+\left[-\frac{1}{k_B T}\left(\frac{\partial\Delta H}{\partial\tau_0}\right)_{\gamma,P}\left(\frac{\mathrm{d}\tau_0}{\mathrm{d}\gamma}\right)_P + \left(\frac{\Delta H}{k_B T}\right)\left(\frac{\beta\tau\dot{\gamma}h^2}{k_T\gamma T}\right)\right]\dot{\gamma}$$

com

$$\Delta H = \Delta H\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)$$

Coeficiente de sensibilidade à taxa de deformação

Definimos:

$$m = \left(\frac{\mathrm{d}\ln\dot{\gamma}}{\mathrm{d}\ln\tau}\right)_T$$

portanto:

$$\frac{\mathrm{d}\dot{\gamma}}{\mathrm{d}\gamma} = m\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} - m\left(\frac{\partial\ln\tau_0}{\partial P}\right)_\gamma\frac{\dot{P}}{P} + \left[-\frac{m}{\tau_0}\left(\frac{\partial\tau_0}{\partial\gamma}\right)_P + \theta\right]\dot{\gamma}$$

Definimos:

$$\theta \equiv \frac{\beta\tau\dot{\gamma}h^2}{k_T\gamma T}$$

Estricção

Definição formal de um ensaio de tração:

$$\begin{cases} \frac{\dot{\sigma}}{\sigma} = \frac{\dot{F}}{F} + \dot{\varepsilon} \\ P = \frac{\sigma}{3} \\ \frac{\mathrm{d}\dot{\varepsilon}}{\mathrm{d}\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\left(\frac{\dot{\ell}}{\ell}\right) \end{cases}$$

substituindo

$$\frac{\mathrm{d}\dot{\ell}}{\mathrm{d}\ell} = m\left(\frac{\partial \tau_0}{\partial P}\right)_{\varepsilon}\frac{\dot{F}}{F} + \left\{ m\left[1 - \left(\frac{\partial \ln \tau_0}{\partial \ln P}\right)_{\varepsilon} - \frac{1}{\tau_0}\left(\frac{\partial \tau_0}{\partial \varepsilon}\right)_P\right] + 1 + \theta \right\}\frac{\dot{\ell}}{\ell}$$

Em um ensaio em controle de deformação temos que $\dot{\ell} = 0$. O limite da capacidade de sustentação de carga pelo componente será dada por $\dot{F} = 0$, que fornece a condição para o máximo de carga:

$$m\left[1 - \left(\frac{\partial \ln \tau_0}{\partial \ln P}\right)_{\varepsilon} - \frac{1}{\tau_0}\left(\frac{\partial \tau_0}{\partial \varepsilon}\right)_P\right] + 1 + \theta = 0 \qquad (3)$$

Estricção

Para um material que não apresente dependência da deformação plástica na pressão hidrostática e onde o aquecimento adiabático possa ser negligenciado a Equação 3 se reduz a:

$$1 - \frac{1}{\tau_0}\left(\frac{\partial \tau_0}{\partial \varepsilon}\right)_P + \frac{1}{m} = 0$$

Estricção

Expressando a resistência plástica em função da tensão de escoamento:

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon} = & \frac{\dot{\ell}}{\ell} = \dot{\varepsilon}_0 \exp\left(-\frac{\Delta H}{k_B T}\right) \\ \frac{\dot{\ell}}{\ell}\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}t} = & 0 = \dot{\ell} - \ell \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\Delta H}{k_B T}\right) \Leftarrow \ddot{\ell} = 0 \\ \mathrm{d}\varepsilon = & \mathrm{d}\left(\frac{\Delta H}{k_B T}\right) = \frac{1}{k_B T}\left(\frac{\partial \Delta H}{\partial \sigma}\right)_{\tau_0, P} \mathrm{d}\sigma + \frac{1}{k_B T}\left(\frac{\partial \Delta H}{\partial \tau_0}\right)_{\sigma, P} \mathrm{d}\tau_0 \\ & + \frac{1}{k_B T}\left(\frac{\partial \Delta H}{\partial P}\right)_{\sigma, \tau_0} \mathrm{d}P - \frac{\Delta H}{k_B T^2}\mathrm{d}T \end{cases}$$

sendo

$$\frac{m}{\tau_0}\left(\frac{\partial \tau_0}{\partial \varepsilon}\right)_P = 1 + \frac{m}{\sigma}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}\right)_P + \theta$$

Substituindo em 3 temos finalmente:

$$1 - \left(\frac{\partial \ln \tau_0}{\partial \ln P}\right)_\varepsilon - \frac{1}{\sigma}\left(\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}\right)_P = 0 \tag{3}$$

Estricção

Definimos a estricção como:

$$\frac{\delta \dot{s}_1}{\delta s_1} \leq 0$$

que requer:

$$-\frac{\dot{s}_1}{s_1}\left\{-m\left[1-\left(\frac{\partial \ln \tau_0}{\partial P}\right)_\varepsilon\right]\frac{\delta \ln F}{\delta \ln s_1} - 1 + m\left[1-\left(\frac{\partial \tau_0}{\partial P}\right)_\varepsilon - \frac{1}{\tau_0}\left(\frac{\partial \tau_0}{\partial \varepsilon}\right)_P\right]\right\} \leq 0$$

considerando que $\frac{\delta \ln F}{\delta s_1} \equiv 0$ e como $\frac{\dot{s}_1}{s_1} < 0$ em tração:

$$1 - m\left[1-\left(\frac{\partial \ln \tau_0}{\partial \ln P}\right)_\varepsilon - \frac{1}{\tau_0}\left(\frac{\partial \tau_0}{\partial \varepsilon}\right)_P\right] - \theta \geq 0$$

Estricção

Condição para máximo de carga:

$$\frac{1}{\tau_0}\left(\frac{\partial \tau_0}{\partial \varepsilon}\right)_P = \frac{1}{m} + 1 - \left(\frac{\partial \tau_0}{\partial P}\right)_\varepsilon + \frac{1}{m}\theta$$

Condição para desenvolvimento da instabilidade:

$$\frac{1}{\tau_0}\left(\frac{\partial \tau_0}{\partial \varepsilon}\right)_P = 1 - \frac{1}{m} - \left(\frac{\partial \tau_0}{\partial P}\right)_\varepsilon + \frac{1}{m}\theta$$

só coincidem para $m \to \infty$ (materiais insensíveis à taxa de deformação)

Bandas de cisalhamento

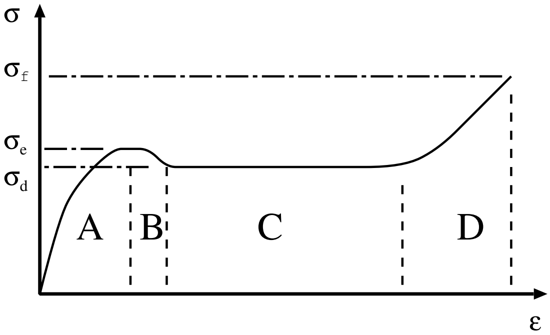
Sob a condição de taxa de deformação angular constante (ou seja, $\mathrm{d}\dot{\gamma} = 0$), a condição para máximo de carga será:

$$\frac{m}{\tau_0}\left(\frac{\partial \tau_0}{\partial \gamma}\right)_P - \theta = 0$$

I- Se tanto $\left(\frac{\partial \tau_0}{\partial \gamma}\right)_P$ quanto θ forem independentemente nulos.

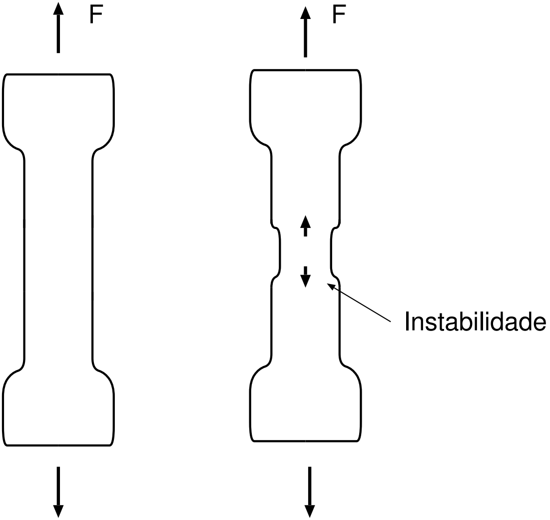
II- Se o aquecimento adiabático superar o encruamento.

Localização da deformação em polímeros



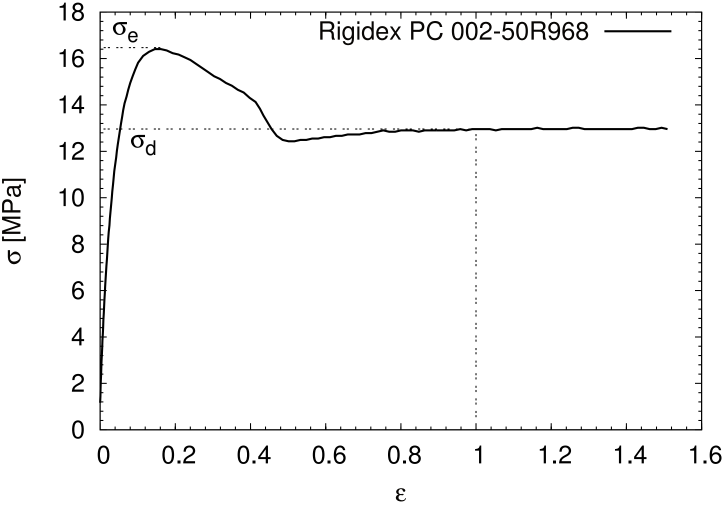
- σ_e = limite de escoamento (*yield stress*)
- σ_d = tensão de estiramento (*drawing stress*)

Localização da deformação em polímeros

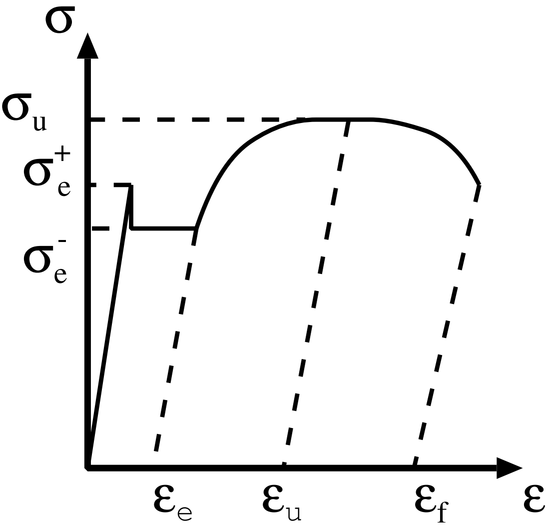


Localização da deformação em polímeros

Polietileno de média densidade (MDPE)

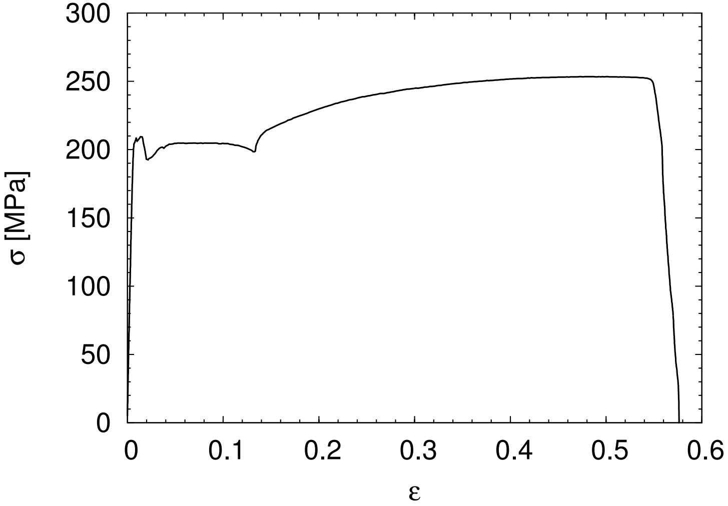


Escoamento descontínuo em aços carbono



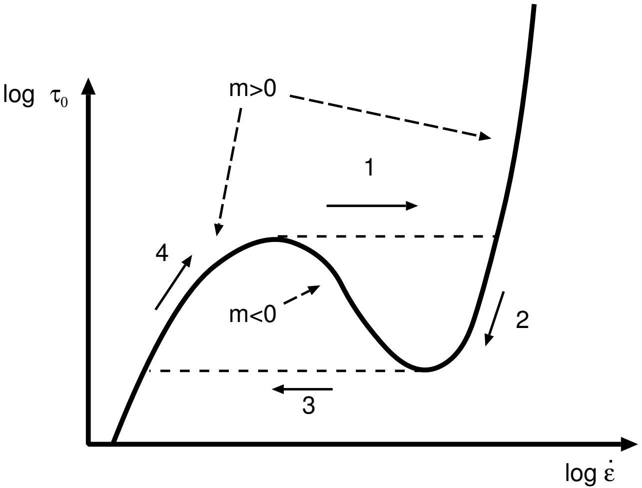
Escoamento descontínuo em aços carbono

Aço AISI 1006 (envelhecido):



Efeito Portevin - Le Châtelier

PLC



Efeito Bauschinger