8 - Método das Duas Fases

8.1 Introdução

A esta altura, o algoritmo simplex já foi apresentado, com as devidas justificadas, e foi aplicado à resolução de 2 problemas de programação linear: o exemplo introdutório, utilizado para a análise geométrica, e o segundo, usado para mostrar a ocorrência de soluções básicas degeneradas e ótimos alternativos. Caberia, então a pergunta: é possível resolver (de forma eficiente e sistemática) qualquer problema de programação linear? Observe-se, então, que na descrição do algoritmo simplex, repetida abaixo de forma sintética, sem todas as argumentações mostradas previamente, existe um ponto de partida: existência de uma forma canônica viável para o problema a ser resolvido. No segundo caso, acima mencionado, a forma padrão do problema já era uma forma canônica viável. No exemplo introdutório, a forma canônica viável foi obtida, ao se resolver o sistema original de equações para x_3,

O Algoritmo Simplex

Ponto de Partida

Seja dada uma forma canônica viável para o problema a ser resolvido:

minimizar z

$$z = z_0 + \sum_j \bar{c}_j^N x_j^N$$

ou

$$\left(-z + \sum_j \bar{c}_j^N x_j^N = -z_0 \right)$$

sujeito a restrições

$$\begin{array}{lll} x_1^B & + \sum_j \bar{a}_{1j}^N x_j^N & = \bar{b}_1 \\ \quad x_2^B & + \sum_j \bar{a}_{2j}^N x_j^N & = \bar{b}_2 \\ \quad\quad \ddots & & \vdots \\ \quad\quad\quad x_m^B & + \sum_j \bar{a}_{mj}^N x_j^N & = \bar{b}_m \end{array}$$

$$x_i^B \geq 0, \; x_j^N \geq 0$$

com $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_m \geq 0$, caracterizando a viabilidade da forma canônica

Os dados desta forma canônica estão colocados, de forma esquemática, na tabela da página seguinte utilizada para controle das decisões do algoritmo simplex.

Tabela do Algoritmo Simplex

$-z$		$\bar{c}_j^N$		$\bar{c}_k^N$		0		$-z_0$	
x_1^B		$\bar{a}_{1j}^N$		$\bar{a}_{1k}^N$		0		$\bar{b}_1$	
x_2^B		$\bar{a}_{2j}^N$		$\bar{a}_{2k}^N$		0		$\bar{b}_2$	
x_r^B		$\bar{a}_{rj}^N$		$\bar{a}_{rk}^N$		1		$\bar{b}_r$	$\bar{b}_r/\bar{a}_{rk}^N$
x_m^B		$\bar{a}_{mj}^N$		$\bar{a}_{mk}^N$		0		$\bar{b}_m$	

Forma Canônica Viável $\bar{b}_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, m$

Solução Básica Viável $\begin{cases} \text{todo } x_j^N = 0 \\ x_i^B = \bar{b}_i,\ i = 1, \ldots, m \end{cases}$

Passo 1 – Exame de Otimalidade da Solução Básica Viável Atual

a) Se não há $\bar{c}_j^N < 0$, a solução básica viável atual é ótima. FIM.

b) Se há $\bar{c}_j^N < 0$, vá para o Passo 2

Passo 2 Melhoria da Solução Básica Viável Atual

2.1 Para maior redução na função objetivo por unidade de crescimento de uma única variável não básica, determine

$$\min \{ \bar{c}_j^N < 0 \} = \bar{c}_k^N$$

A variável não básica x_k é liberada para crescimento a partir de zero, mantidas com valor nulo todas as outras variáveis não básicas

2.2 Determinação do limite de crescimento da variável x_k de modo que nenhuma das variáveis básicas atuais assuma valor negativo

a) Não existe $\bar{a}_{ik}^N > 0$, $i = 1, \ldots, m$.
Neste caso, a viabilidade $x_i^B \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$, é mantida quando $x_k \to \infty$. A função objetivo tem valor ilimitado inferiormente na região viável, isto é $\to -\infty$, e o problema não tem solução ótima.

b) Existe $\bar{a}^N_{ik} > 0$

Determine

$$\theta = \min_{\bar{a}^N_{ik} > 0} \left\{ \bar{b}_i / \bar{a}^N_{ik} \right\} = \bar{b}_r / \bar{a}^N_{rk}$$

Quando x_k atinge o valor θ, a variável básica da equação r, x^B_{r}, atinge o valor zero. Assim x_k passa a ser a variável básica da equação r na próxima solução básica com valor θ, substituindo a variável básica da equação r na solução atual

Passo 3 Obtenção da Forma Canônica para a Nova Solução Básica Viável

Aplique o método Gauss-Jordan de eliminação, utilizando como pivô o parâmetro $\bar{a}^N_{rk}$

Passo 4

Volte ao Passo 1

x_4 e x_5 em função de x_1 e x_2 e substituir tais valores de x_3, x_4 e x_5 na expressão da função objetivo, de forma que esta ficasse escrita apenas em termos de x_1 e x_2. No entanto, caso a escolha tivesse sido a resolução do sistema de equações para x_1, x_2 e x_3 em função de x_4 e x_5, a forma canônica obtida seria inviável. De fato, como pode ser observado na representação geométrica (vide páginas 17 e 28), quando $x_4 = x_5 = 0$, o valor da variável x_3 é negativo, caracterizando uma solução básica inviável. Portanto, o procedimento empregado para geração da forma canônica viável para o exemplo introdutório não é recomendável pois o sucesso depende da escolha arbitrária das variáveis para as quais o sistema deve ser resolvido.

O procedimento sistemático para geração de uma forma canônica viável, quando a forma padrão original não é uma forma canônica viável, é o método das duas fases. Neste método, cria-se, para a Fase I, um novo problema de programação linear, com a introdução de novas variáveis, denominadas artificiais, de modo que ele seja facilmente colocado em forma canônica viável. Depois de resolvido o problema da fase I pelo algoritmo simplex, obtém-se uma forma canônica viável para o problema original (ou constata-se que não há solução viável para o problema).

O método das duas fases será aplicado inicialmente à resolução do problema introdutório e, a seguir, formalizado. O problema original é denominado P_1 (que será resolvido na Fase II) e o problema criado para a Fase I é denominado P_2, ambos escritos na forma padrão; para que garanta a existência de forma canônica viável para P_2, todos os termos independentes do sistema de equações de P_1 devem ser não negativos (o que ocorre no problema introdutório; se houvesse algum termo independente negativo a equação deveria ser multiplicada por (-1).)

P_1 minimizar z

$$z = -4x_1 + 6x_2 + 6x_3 - 4x_4 + 9/2\, x_5$$

$$\begin{cases} 4x_1 + \frac{5}{6}x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 29 \\ -2x_1 + \frac{23}{6}x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 11 \\ -\frac{7}{2}x_1 + 7x_2 + 6x_3 - 4x_4 + 6x_5 = 18 \end{cases}$$

$x_j \geq \quad j = 1,\ldots,5$

Associado ao problema P_1, cria-se o problema P_2 também na forma padrão:

P_2 minimizar w

$$w = x_6 + x_7 + x_8$$

$$\begin{cases} 4x_1 + \frac{5}{6}x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 + x_6 = 29 \\ -2x_1 + \frac{23}{6}x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 + x_7 = 11 \\ -\frac{7}{2}x_1 + 7x_2 + 6x_3 - 4x_4 + 6x_5 + x_8 = 18 \end{cases}$$

$x_j \geq \quad j = 1,\ldots,8$

Para obter o sistema de equações de P_2 foi somada uma nova variável no lado esquerdo de cada equação de P_1: x_6 na primeira equação, x_7 na segunda e x_8 na terceira. Desta forma, em P_2 o sistema de equações está resolvido para x_6, x_7 e x_8; além disto, quando se impõe valores nulos para as variáveis x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5, são obtidos os valores $x_6 = 29$, $x_7 = 11$ e $x_8 = 18$. Assim, P_2 não é uma forma canônica viável pelo fato de a função w estar escrita em termos das variáveis básicas x_6, x_7 e x_8. Antes de reescrever w em termos das variáveis não básicas, cabe explicar a forma em que a função w foi definida:

1. Uma solução viável de P_2 é solução viável de P_1 se e somente se $x_6 = x_7 = x_8 = 0$
2. Se, ao resolver P_2 pelo algoritmo simplex, for encontrado mínimo de $w = 0$, que implica $x_6 = x_7 = x_8 = 0$, então a solução básica ótima de P_2, caso não degenerada, é solução básica viável para P_1.

Escrevendo o valor de cada uma das variáveis básicas, x_6, x_7 e x_8 em termos das variáveis não básicas x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5, obtém para a função w na forma canônica a seguinte expressão:

$$w = x_6 + x_7 + x_8 =$$

$$(29 - 4x_1 - 5/6\,x_2 - 3x_3 - 2x_4 - 4x_5) +$$
$$(11 + 2x_1 - 23/6\,x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 4x_5) +$$
$$(18 + 7/2\,x_1 - 7x_2 - 6x_3 + 4x_4 - 6x_5) =$$

$$= 58 + 3/2\,x_1 - 70/6\,x_2 - 12x_3 + 4x_4 - 14x_5$$

ou

$$-w + 3/2\,x_1 - 70/6\,x_2 - 12x_3 + 4x_4 - 14x_5 = -58$$

<u>Variáveis Artificiais</u> As variáveis x_6, x_7 e x_8 são chamadas de variáveis artificiais.

a primeira tabela do simplex é a seguinte:

Tabela 1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8		
$-w$	$3/2$	$-70/6$	-12	4	-14				-58	
x_6	4	$5/6$	3	2	4	1			29	29/4
x_7	-2	$23/6$	3	-2	4		1		11	11/4
x_8	$-7/2$	7	6	-4	6			1	18	18/6

Solução básica viável correspondente à tabela 1

Variáveis não básicas: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$

Variáveis básicas: $x_6 = 29,\ x_7 = 11,\ x_8 = 18$

Função objetivo: $w = 58$

Aplicando-se o algoritmo simplex ao problema P_2, obtêm-se, sucessivamente, as tabelas 2, 3 e 4.

Tabela 2

$-w$	$-11/2$	$7/4$	$-3/2$	-3			$7/2$		$-39/2$
x_6	6	-3	0	4		1	-1		18
x_5	$-1/2$	$23/24$	$3/4$	$-1/2$	1		$-1/4$		$11/4$
x_8	$-1/2$	$5/42$	$3/2$	-1			$-3/2$	1	$3/2$

Solução básica viável correspondente à tabela 2

Variáveis não básicas: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_7 = 0$

Variáveis básicas: $x_6 = 18,\ x_5 = 11/4,\ x_8 = 3/2$

Função objetivo: $w = 39/2$

Tabela 3

$-w$		-1	$-3/2$	$2/3$		$11/12$	$31/12$		-3
x_1	1	$-1/2$	0	$2/3$		$1/6$	$-1/6$		3
x_5		$17/24$	$3/4$	$-1/6$	1	$1/12$	$1/6$		$17/4$
x_8		1	$3/2$	$-2/3$		$1/12$	$-19/12$	1	3

$$\frac{17/4}{3/4} = 17/3$$

$$\frac{3}{3/2} = 2$$

<u>Solução básica viável correspondente à tabela 3</u>

Variáveis não básicas: $x_2 = x_3 = x_4 = x_6 = x_7 = 0$

Variáveis básicas: $x_1 = 3,\ x_5 = 17/4,\ x_8 = 3$

Função objetivo: $w = 3$

Tabela 4

$-w$		0		0		1	1	1	0
x_1	1	$-1/2$		$2/3$		$1/6$	$-1/6$		3
x_5		$5/24$		$1/6$	1	$1/24$	$23/24$		$11/4$
x_3		$2/3$	1	$-4/9$		$1/18$	$-19/18$	$2/3$	2

<u>Solução básica viável correspondente à tabela 4: Solução Ótima do Problema da 1ª Fase</u>

Variáveis não básicas: $x_2 = x_4 = x_6 = x_7 = x_8 = 0$

Variáveis básicas: $x_1 = 3,\ x_5 = 11/4,\ x_3 = 2$

Função objetivo: $w = 0$

Terminada a resolução do problema P_2, fase 1 do método, as variáveis básicas são x_1, x_5 e x_3, todas variáveis do problema original P_1. Agora, é possível eliminar as colunas correspondentes às variáveis artificiais e substituir a equação da função W pela equação de z (escrita apenas em função das variáveis não básicas x_2 e x_4) para passar a aplicar o algoritmo simplex à resolução do problema P_1. Para obter a correspondente equação de z, basta substituir os valores de x_1, x_5 e x_3 retiradas da tabela 4:

$$x_1 = 3 + \tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{2}{3}x_4$$
$$x_5 = \tfrac{11}{4} - \tfrac{5}{24}x_2 - \tfrac{1}{6}x_4$$
$$x_3 = 2 - \tfrac{2}{3}x_2 + \tfrac{4}{9}x_4$$

obtendo-se $z = \tfrac{99}{8} - \tfrac{15}{16}x_2 + \tfrac{7}{12}x_4$

compondo-se, então, a tabela 5 inicial para a Fase 2,

Tabela 5 - Inicial para a fase 2

-z		-15/16		7/12		-99/8
x_1	1	-1/2		2/3		3
x_5		5/24		1/6	1	11/4
x_3		2/3	1	-4/9		2

. Observe-se que a tabela 5 é igual à tabela 2 anteriormente mostrada caso em que a primeira forma canônica foi obtida por procedimento de tentativa erro) apenas com alteração da ordem das equações do sistema. Esta solução básica viável corresponde ao vértice B mostrado na figura da página 17 (de 28). A tabela 2 supracitada aparece na página 38.

Observação: Com a finalidade de evitar que a função z tenha de ser expressa em termos das variáveis não básicas, ao fim da Fase I, costuma-se incluir nas tabelas da Fase I uma linha adicional para a equação de -z, que é alterada, em cada iteração, pelo método de Gauss-Jordan.

8.3 Formalização do Método das Duas Fases

Para a formalização do método, será adotado o caso mais desfavorável para o qual, a exemplo do problema introdutório, é necessário introduzir uma variável artificial em cada uma das m equações do problema original na forma padrão P_1. Sem perda de generalidade, admite-se que todos os termos independentes do sistema de equações de P_1 sejam não negativos. Utilizando a notação matricial, são apresentados abaixo os problemas P_1 e P_2.

P_1 minimizar z

$$z = cx$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

Premissa $b \geq 0$

P_2 minimizar w

$$w = \sum_{i=1}^{m} x_{a_i}$$
$$Ax + Ix_a = b$$
$$x \geq 0,\ x_a \geq 0$$

x_a é o vetor das variáveis artificiais e x_{ai} é a variável artificial da equação i.

Conforme mostrado no caso do problema introdutório, na fase I resolve-se o problema P_2 e na fase II o problema P_1, caso seja possível, ao fim da resolução de P_2, obter uma forma canônica viável para P_1.

Os diversos casos possíveis na resolução do problema da Fase I, P_2, são mostrados, de forma esquemática na figura da página 68.

Caso 1. Ao fim da Fase I, obtém-se $\min w = w^* > 0$

Dado que a função w é uma soma de variáveis artificiais, não negativas, o mínimo da função w é não negativo. Quando $\min w > 0$, isto indica que não há nenhuma solução viável para o problema P_1. Caso houvesse x' viável para P_1, com $Ax' = b$ e $x' \geq 0$, então o par de vetores x', $x_a = 0$ seria uma solução viável para P_2 para a qual $w = 0$, em contradição com o fato de $\min w = w^* > 0$.

Caso 2.1 $\min w = w^* = 0$ e não há nenhuma variável básica artificial ao fim da Fase I (na tabela ótima da Fase I)

Em tal caso, a forma canônica ótima da fase I, com a exclusão da linha da função w e das colunas das variáveis artificiais e inclusão da linha da equação de $-z$, caso esta não tenha sido utilizada na Fase I, é forma canônica viável para P_1, problema da Fase II. Trata-se do caso encontrado na aplicação do método das duas fases ao problema introdutório.

Fim da Fase I

W^*

- 1 – $W^* > 0 \Rightarrow P_I$ não tem solução viável (não há Fase II)
- 2 – $W^* = 0$
  - 2.1 Não há nenhuma variável básica artificial na tabela ótima do simplex da Fase I
  - 2.2 A variável básica da equação r na tabela ótima é artificial
    - 2.2.1 Na equação r $\bar{a}_{r1} = \bar{a}_{r2} = \ldots = \bar{a}_{rn} = 0$ Eliminar a eq. r (Redundância)
    - 2.2.2 Na equação r $\bar{a}_{rk} \neq 0$ Gauss-Jordan, pivô é $\bar{a}_{rk}$ para substituir a var. básica artificial por x_k

Casos Possíveis na Resolução do Problema da Fase I

Caso 2.2.1 $w^* = 0$, a variável básica da equação r na tabela ótima da fase I é uma variável artificial e nesta equação todos os coeficientes das variáveis do problema P_1 são nulos ($\bar{a}_{r1} = \bar{a}_{r2} = \cdots = \bar{a}_{rn} = 0$)

Dado que $\bar{b}_r = 0$, pois a variável básica artificial tem valor nulo, obteve-se, por combinação linear das equações do sistema $Ax = b$ na aplicação sucessiva do método de Gauss-Jordan, uma equação r na forma:

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0$$

a ser eliminada, indicando a existência de redundância no sistema $Ax = b$
Passa-se, então, à Fase II, como no caso 2.1

Caso 2.2.2 $w^* = 0$, a variável básica da equação r na tabela ótima da Fase I é uma variável artificial e nesta equação pelo menos uma variável do problema original, x_k, tem coeficiente $\bar{a}_{rk}^{IV} \neq 0$.

Em tal caso, aplica-se o método Gauss-Jordan utilizando como pivô $\bar{a}^N_{rk}$ de modo que a variável básica artificial da equação r seja substituída pela variável x_k

Passa-se, a seguir, à fase II como no caso 2.1.

Note-se que neste caso o pivô $\bar{a}^N_{rk}$ pode ser negativo pois, como $\bar{b}_r = 0$, não haverá alteração dos valores dos termos independentes quando se aplica o método Gauss-Jordan de eliminação.

Observação Final sobre a Aplicação do Método das Duas Fases

Dado um problema qualquer de programação linear, cuja forma padrão original não é uma forma canônica viável (mas todos $b_i \geq 0$) é sempre possível incluir uma variável artificial em cada equação para constituir o problema P_2 da Fase I. No entanto, quanto maior é o número de variáveis artificiais, maior tende a ser o número de iterações da Fase I. Por tal motivo, é recomendável incluir variáveis artificiais somente nas equações em que não há uma variável que seja candidata natural à variável básica daquela equação, isto é tenha coeficiente 1 naquela equação e coeficientes nulos nas demais equações do sistema. Por exemplo, nos casos de restrições desigualdade $\leq b_i$, com $b_i \geq 0$, as variáveis residuais a serem introduzidas são candidatas naturais a variáveis básicas da forma canônica inicial da Fase I, não sendo incluídas, portanto, em tais equações variáveis artificiais.

9 Candidatas à Solução Ótima de um Problema de Programação Linear são as Soluções Básicas Viáveis

A partir da análise geométrica do problema introdutório e da associação entre vértice da região viável e solução básica viável, adotou-se a tese de que, para encontrar uma solução ótima de um problema de programação linear, basta examinar as soluções básicas viáveis do pro_blema. Cabe agora encaminhar a demonstração desta tese que será feita com a contribuição dos alunos ao resolver a 2ª questão da 2ª série de Problemas.

Inicialmente, é necessário entender o signi_ficado de solução básica viável. Seja, então

$$Ax = b$$

um sistema de m equações independentes com n variáveis $(n > m)$. Para obter uma so_lução básica, selecionamos m colunas linearmen_te independentes da matriz A, formando uma matriz quadrada B. Seja A^N a matriz forma_da pelas demais colunas da matriz A e sejam x^B e x^N as componentes do vetor x asso_ciadas, respectivamente, às matrizes B e A^N.

A partir desta escolha, a solução básica é obtida, impondo-se

$$x^N = 0$$

e calculando-se

$$x^B = B^{-1} b = \bar{b}$$

Caso $\bar{b} \geq 0$, diz-se que a solução é viável para o problema de programação linear

$$(P) \quad \text{minimizar } z$$
$$z = cx$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

Assim, em uma solução básica viável há no máximo m componentes positivas; em soluções básicas degeneradas, o número de componentes positivas é menor que m. O que é importante ressaltar é que todas as componentes positivas de uma solução básica estão associadas a colunas linearmente independentes retirados da matriz A

<u>Observação 1</u> Se uma solução viável x' para o problema acima P tem mais que m componentes positivas, ela não é uma

solução básica e as componentes positivas estão associadas a um conjunto de colunas linearmente dependentes. De fato, as colunas da matriz são vetores de R^m (espaço de dimensão m) e neste espaço o maior número de vetores linearmente independentes é igual a m.

<u>Observação 2</u> Se uma solução viável x' para o problema acima P tem m componentes positivas, ela será uma solução básica se e somente se suas componentes positivas estiverem associadas a colunas linearmente independentes.

Para ilustrar a observação 2, apresenta-se abaixo uma tabela com uma solução viável para um problema de transporte com 3 centros produtores e 4 centros consumidores, em que a oferta global $(a_1+a_2+a_3)$ é igual à demanda global $(b_1+b_2+b_3+b_4)$

O número de variáveis básicas para este problema é igual a 6 e a solução apresentada na tabela tem 6 componentes positivas. Contudo, ela não é uma solução básica pois as colunas das variáveis x_{22}, x_{23}, x_{32} e x_{33} são linearmente dependentes no sistema de equações do problema de transporte. De fato, sendo:

$$A_{22}^T = [0, 1, 0, 0, 1, 0, 0]$$

$$A_{23}^T = [0, 1, 0, 0, 0, 1, 0]$$

$$A_{32}^T = [0, 0, 1, 0, 1, 0, 0]$$

$$A_{33}^T = [0, 0, 1, 0, 0, 1, 0]$$

constata-se que:

$$A_{33}^T = -1 \times A_{22}^T + 1 \times A_{23}^T + 1 \times A_{32}^T$$

Tabela do Problema de Transporte

				a_i
			$x_{14} = 60$	60
	$x_{22} = 60$	$x_{23} = 30$		90
$x_{31} = 50$	$x_{32} = 20$	$x_{33} = 10$		80
b_j: 50	80	40	60	

Depois desse exemplo para ilustrar a observação 2, cabe voltar ao tema central desta seção, que é demonstrar que a busca de uma solução ótima para o problema de programação linear pode ficar restrita ao exame das soluções básicas viáveis. O caminho adotado para a demonstração, utilizando o que foi exposto até aqui é o seguinte:

> dada uma solução viável x', com $(r+1)$ componentes positivas $x'_1, x'_2, \dots, x'_r, x'_{r+1}$ associadas a colunas linearmente dependentes; isto é
>
> $$A_{r+1} = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_r A_r$$
>
> constrói-se, a partir dela, uma nova solução viável y, com no máximo r componentes positivas, para a qual a função objetivo tenha valor $cy \leq cx'$.

A finalidade deste procedimento é obter uma solução viável melhor, com um menor número de componentes positivas. Se, para a solução viável obtida y, as componentes positivas ainda estiverem associadas a colunas linearmente dependentes, o procedimento pode ser replicado e, assim sucessivamente, até que se chegue a uma solução viável w cujas componentes positivas estejam associadas a colunas linearmente independentes. Caso o número de componentes positivas seja igual a m, w será uma solução básica viável não degenerada e as colunas das componentes positivas formam uma base B.

Se o número de componentes positivas de w for igual a $l < m$, então w será uma solução básica viável degenerada; para formar uma base B, basta adicionar $(m-l)$ colunas da matriz A que formem com as l colunas um conjunto linearmente independente.

O central é que, ao longo desse processo iterativo, há uma redução no valor da função objetivo, ou eventualmente numa iteração o valor é mantido, mas nenhuma solução melhor que w é perdida. Assim, se para qualquer solução não básica viável x' existe uma solução básica viável w, para a qual a função objetivo tem valor menor ou igual a que tem para x', fica provado que, para encontrar uma solução ótima de um problema de programação linear, basta examinar as soluções básicas viáveis.

10- Interpretação Geométrica de Soluções Básicas Degeneradas

Considere o seguinte problema de programação linear:

maximizar z

$$z = 2x_1 + 3x_2$$

sujeito a restrições

$$x_1 + x_2 \geq 2$$

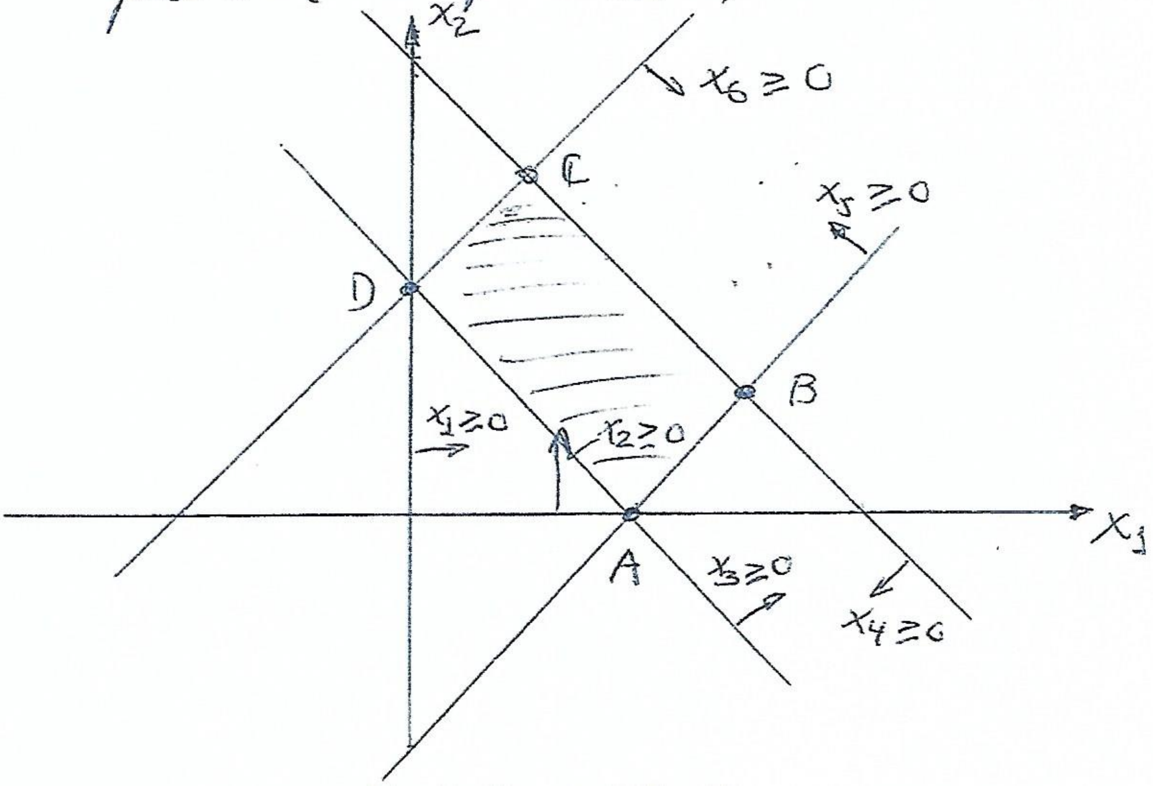
$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_2 - x_1 \geq -2$$

$$x_2 - x_1 \leq 2$$

$$x_1 \geq 0 \ , \ x_2 \geq 0$$

A figura abaixo mostra a região viável do problema no plano (x_1, x_2)



Colocando o problema na forma padrão e depois multiplicando a terceira equação por (-1), resulta:

minimizar z'

$$z' = -2x_1 - x_2$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 \qquad\qquad &= 2 \\ x_1 + x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 4 \\ x_1 - x_2 \qquad\qquad + x_5 \quad &= 2 \\ -x_1 + x_2 \qquad\qquad\quad + x_6 &= 2 \end{aligned}$$

$$x_j \geq 0, \; j = 1, \ldots, 6$$

Esta forma padrão não é uma forma canônica viável com relação às variáveis básicas x_3, x_4, x_5 e x_6 pois, quando se impõe para as variáveis não básicas $x_1 = x_2$, resulta $x_3 = -2 \;(<0)$, $x_4 = 4$ $x_5 = 2$ e $x_6 = 2$, configurando uma solução básica inviável. É, portanto, necessário recorrer ao método das duas fases para gerar uma forma canônica viável inicial para a aplicação do algoritmo simplex. Como as variáveis x_4, x_5 e x_6 aparecem apenas uma vez e com coeficiente 1, na segunda, terceira e quarta equações, respectivamente e os respectivos termos independentes são positivos basta colocar uma variável artificial na primeira equação formulação do problema da Fase I, que tem o seguinte modelo matemático:

minimizar w

$$w = x_7$$

sujeito a restrições:

$$\begin{array}{llllllll} x_1 & + x_2 & - x_3 & & & & + x_7 & = 2 \\ x_1 & + x_2 & & + x_4 & & & & = 4 \\ +x_1 & - x_2 & & & + x_5 & & & = 2 \\ -x_1 & + x_2 & & & & + x_6 & & = 2 \end{array}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, 7$$

Substituindo-se o valor de x_7 da equação 1

$$x_7 = 2 - x_1 - x_2 + x_3$$

na função objetivo w, obtem-se a forma canônica viável

minimizar w

$$-w - x_1 - x_2 + x_3$$

$$\begin{array}{llllllll} x_1 & + x_2 & - x_3 & & & & + x_7 & = 2 \\ x_1 & + x_2 & & + x_4 & & & & = 4 \\ x_1 & - x_2 & & & + x_5 & & & = 2 \\ -x_1 & + x_2 & & & & + x_6 & & = 2 \end{array}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, 7$$

Tabela 1 – Fase I

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		
$-w$	-1	-1	1					-2	
$-z'$	-2	-3						0	
x_7	1	1	-1				1	2	$2/1 = 2$
x_4	1	1		1				4	$4/1 = 4$
x_5	1	-1			1			2	$2/1 = 2$
x_6	-1	1				1		2	

Solução básica viável não ótima $\begin{cases} VNB: x_1 = x_2 = x_3 = 0^* \\ VB: x_7 = 2, x_4 = 4, x_5 = 2, x_6 = 2 \end{cases}$ $w = 2$ $z' = 0$

Tabela 2 – Fase I

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
$-w$		0	0				1	0
$-z'$		-1	-2					4
x_1	1	1	-1				1	2
x_4		0	1	1				2
x_5		-2	1		1			0
x_6		2	-1			1		4

Solução básica viável ótima para a Fase I e básico viável para a Fase II $\begin{cases} VNB \;\; x_2 = x_3 = x_7 = 0 \\ VB \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_4 = 2 \\ x_5 = 0 \\ x_6 = 4 \end{cases} \end{cases}$ $w = 0$ $z' = -4$

* Observe que não existe, na representação geométrica, solução viável $x_1 = x_2 = x_3 = 0$; para $x_1 = x_2 = 0$, tem-se $x_3 = -2$.

Tabela 1 – Fase II

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
$-z'$		-1	-2				4	
x_1	1	1	-1				2	
x_4		0	1	1			2	$2/1 = 2$
x_5		-2	1		1		0	$0/1 = 0$
x_6		2	-1			1	4	

Solução básica viável não ótima

$$\begin{cases} VNB: x_2 = x_3 = 0 \\ VB \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_4 = 2 \\ x_5 = 0 \\ x_6 = 4 \end{cases} \end{cases} \qquad z' = -4$$

Tabela 2 – Fase II

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
$-z'$		-5			2		4
x_1	1	-1			1		2
x_4		2		1	-1		2
x_3		-2	1		1		0
x_6		0			1	1	4

Solução básica viável não ótima

$$\begin{cases} VNB: x_2 = x_5 = 0 \\ VB \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_4 = 2 \\ x_3 = 0 \\ x_6 = 4 \end{cases} \end{cases} \qquad z' = -4$$

Observe-se que as tabelas 1 e 2 da Fase II correspondem ao mesmo vértice A.

Tabela 3 - Fase II

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
$-z'$				$5/2$	$-1/2$		9	
x_1	1			$1/2$	$1/2$		3	$\frac{3}{1/2} = 6$
x_2		1		$1/2$	$-1/2$		1	
x_3			1	1	0		2	
x_6				0	1		4	$4/1 = 4$

Tabela 4 - Fase II

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
$-z'$				$5/2$		$1/2$	11
x_1	1			$1/2$		$-1/2$	1
x_2		1		$1/2$		$1/2$	3
x_3			1	1		0	2
x_5				0	1	1	4

Solução Básica Viável Ótimo

VNB : $x_4 = x_6 = 0$

VB $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 2 \\ x_5 = 4 \end{cases}$ $z' = -11$

Conforme já mencionado, o vértice A corresponde a duas soluções básicas viáveis degeneradas examinadas na resolução do problema: a da Tabela 1, Fase II, com variáveis não básicas $x_2 = x_3 = 0$, e a da Tabela 2, Fase II, com variáveis não básicas $x_2 = x_5 = 0$. E há ainda outra solução básica viável, com variáveis não básicas $x_3 = x_5 = 0$. Isto ocorre pois no vértice A se interceptam 3 das retas que definem o contorno da região viável: $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ e $x_5 = 0$. Convém observar que o vértice D, não examinado pelo algoritmo simplex, também está associado a 3 soluções básicas viáveis degeneradas pois nele se interceptam as retas $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ e $x_6 = 0$. Por sua vez, os vértices B, correspondente à solução básica viável da Tabela 3, Fase II, e C, correspondente à solução básica viável da Tabela 4, Fase II estão na intersecção de apenas duas retas que definem o contorno da região viável. Há apenas uma solução básica viável associada a cada um desses vértices.