



PME 3100 – MECÂNICA I (Reoferecimento) – Prova de Recuperação – 19 de Julho de 2023

- Esta avaliação tem duração de 120 minutos e é composta por 3 questões.
- Não é permitido utilização de quaisquer dispositivos eletrônicos, tampouco consulta a qualquer material externo.
- As questões podem ser resolvidas a lápis, na ordem escolhida pelo aluno (que deve indicar onde iniciou cada questão).

Formulário

$$m\vec{a}_G = \vec{R} = \sum_i \vec{F}_i \quad m(\vec{G} - \vec{O}) \wedge \vec{\alpha}_O + \frac{d}{dt}(J_O \vec{\omega}) = \vec{M}_O = \sum_i (\vec{P}_i - \vec{O}) \wedge \vec{F}_i \quad T = \frac{1}{2}m|\vec{v}_O|^2 + m\vec{v}_O \cdot \vec{\omega} \wedge (\vec{G} - \vec{O}) + \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot (J_O \vec{\omega})$$

$$J_O \vec{\omega} = (+J_{Ox}\omega_x - J_{Oxy}\omega_y - J_{Oxz}\omega_z)\vec{i} + (-J_{Oxy}\omega_x + J_{Oy}\omega_y - J_{Oyz}\omega_z)\vec{j} + (-J_{Oxz}\omega_x - J_{Oyz}\omega_y + J_{Oz}\omega_z)\vec{k}$$

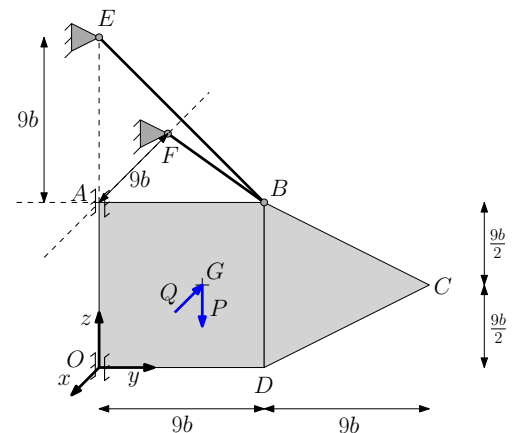
$$\Delta T = W^{ext} + W^{int} = -\Delta V + W^{nc} \quad V_g = mgh_G \quad V_e = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 \quad J_{Oz} = J_{Gz} + m(x_G^2 + y_G^2) \quad J_{Oxy} = J_{Gxy} + mx_G y_G$$

$$\vec{M}_A = \vec{M}_B + (\vec{B} - \vec{A}) \wedge \vec{R} \quad \vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \wedge (\vec{A} - \vec{B}) \quad \vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{\alpha} \wedge (\vec{A} - \vec{B}) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (\vec{A} - \vec{B})]$$

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{P,rel} + \vec{v}_{P,arr} \quad \vec{a}_P = \vec{a}_{P,rel} + \vec{a}_{P,arr} + 2\vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{v}_{P,rel} \quad \vec{\omega} = \vec{\omega}_{rel} + \vec{\omega}_{arr} \quad \vec{\alpha} = \vec{\alpha}_{rel} + \vec{\alpha}_{arr} + \vec{\omega}_{arr} \wedge \vec{\omega}_{rel}$$

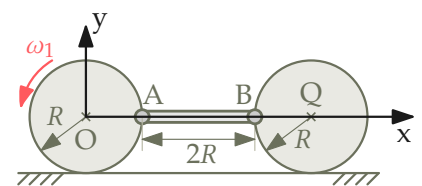
Questão 1 (3,5 pontos). O sistema ilustrado na figura é constituído por uma placa rígida e homogênea OABCD, de centro de massa G e peso P, e também pelas barras rígidas BE e BF de peso desprezível e articuladas em suas extremidades. Note que a barra BE está contida no plano Oyz, enquanto que a barra BF está contida no plano Oxy. Além disso, a placa é vinculada por dois anéis ideais nos pontos O e A. É ainda aplicada sobre a placa uma força $(-Q\vec{i}, G)$. Considerando a geometria da placa, bem como as dimensões e o sistema de coordenadas dado, pede-se:

- (0,5) obter o vetor posição $(\vec{G} - \vec{O})$ do centro de massa da placa OABCD;
- (0,8) o diagrama de corpo livre (DCL) da placa OABCD;
- (0,2) listar quais das forças indicadas no DCL da placa produzem momento **não nulo** com respeito ao eixo Oz;
- (1,0) escrever o sistema de equações de equilíbrio estático da placa;
- (0,6) resolver o sistema de equações, obtendo a expressão de todas as componentes de reação;
- (0,4) dizer se as barras BE e BF são ou não barras de treliça, e em caso afirmativo, dizer se estão sob tração ou compressão, justificando sua resposta com base nos resultados obtidos nos itens anteriores.

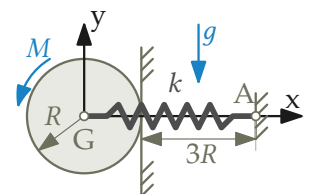


Questão 2 (3,0 pontos). Um mecanismo é composto por dois discos rígidos idênticos de raio R, que podem rolar sem escorregar sobre uma superfície plana horizontal fixa, e por uma barra rígida AB de comprimento 2R que tem cujas extremidades encontram-se articuladas às periferias de cada um dos discos. Sabendo que o disco de centro O tem velocidade angular $\vec{\omega}_1 = \omega_1 \vec{k}$ constante, pede-se para a configuração mostrada na figura:

- (0,6) os vetores posição $(\vec{C}_1 - \vec{O})$ do centro instantâneo de rotação (CIR) do disco de centro O, $(\vec{C}_2 - \vec{O})$ do CIR da barra AB e $(\vec{C}_3 - \vec{O})$ do CIR do disco de centro Q.
- (0,6) os vetores velocidade \vec{v}_A , \vec{v}_B e \vec{v}_Q dos pontos A, B e Q, respectivamente;
- (0,6) os vetores velocidade angular $\vec{\omega}_2$ da barra AB e $\vec{\omega}_3$ do disco de centro Q.
- (0,6) os vetores aceleração angular $\vec{\alpha}_2$ da barra AB e $\vec{\alpha}_3$ do disco de centro Q.
- (0,6) os vetores aceleração \vec{a}_A , \vec{a}_B e \vec{a}_Q dos pontos A, B e Q, respectivamente;



Questão 3 (3,5 pontos). No sistema ilustrado na figura, o disco homogêneo de centro G, raio R, massa m, momento de inércia $J_{Gz} = mR^2/2$ pode rolar sem escorregar sobre uma parede vertical. Sobre o disco atua um momento $M\vec{k}$ constante. Conectando o centro G do disco ao ponto A fixo, há uma mola elástica linear de constante k e comprimento natural $l_0 = 3R$. Admita que o sistema parte do repouso da configuração indicada na figura ($y_G = 0$), que os efeitos dissipativos sejam desprezíveis e que o sistema de coordenadas fornecido esteja fixo a um referencial inercial.



- (0,5) os diagramas de corpo livre (DCLs) do disco nas configurações $y_G = 0$ e $y_G = -3R$;
- (1,0) o vetor velocidade angular $\vec{\omega}$ do disco ao atingir a configuração $y_G = -3R$.
- (0,8) os vetores de aceleração angular $\vec{\alpha}$ do disco nas configurações $y_G = 0$ e $y_G = -3R$;
- (1,2) determinar o menor valor de coeficiente de atrito estático μ entre o disco e a superfície, consistente com a condição de rolamento sem escorregamento nas configurações $y_G = 0$ e $y_G = -3R$.



Questão 1 (3,5 pontos)

Distribuição de pontos:

- (a) 0,1 para cada componente correta em x e z , e 0,3 para a componente em y correta.
- (b) 0,1 para cada força representada corretamente no DCL (6 reativas e 2 ativas).
- (c) 0,1 por identificar cada força correta. Desconto de 0,1 para cada força incorreta colocada na resposta, com limite inferior de nota 0 no item.
- (d) 0,1 por montar um sistema com 6 equações. 0,1 para cada equação correta em forças, 0,2 para cada equação correta em momentos.
- (e) 0,1 para cada componente correta de reação.
- (f) 0,1 para cada justificativa correta de cada barra sobre ser barra de treliça e 0,1 para cada identificação correta de tração ou compressão.

Resolução:

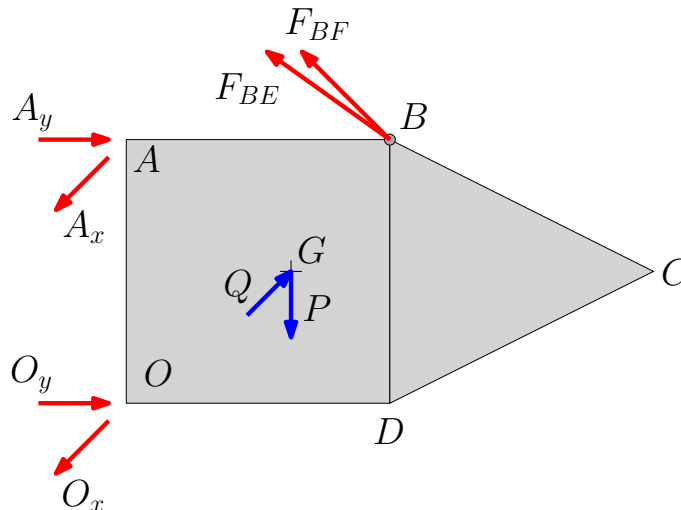
- (a) Uma vez que a placa está contida no plano yz , sabe-se que a coordenada x de G é zero. Além disso, por simetria, a coordenada z de G vale $9b/2$. Por fim, sendo y_G a coordenada y de G têm-se, compondo as áreas do quadrado $OABS$ e do triângulo BCD :

$$y_G = \frac{9b \cdot 9b \cdot \frac{9b}{2} + \frac{1}{2} 9b \cdot 9b (9b + 3b)}{9b \cdot 9b + \frac{1}{2} 9b \cdot 9b} = \frac{21b \cdot \frac{1}{2} 9b \cdot 9b}{3 \cdot \frac{1}{2} 9b \cdot 9b} = 7b$$

Com isso:

$$G - O = (0, 7b, \frac{9b}{2})$$

- (b) O diagrama de corpo livre está indicado abaixo:



- (c) As únicas forças que produzem momento com respeito ao eixo Oz são a força aplicada $(-Q\vec{i}, G)$ e a força \vec{F}_{BF} . As demais forças são paralelas ao eixo Oz ou tem linha de ação passando pelo próprio eixo.
- (d) Para a condição de equilíbrio estático, as três equações obtidas das componentes de resultante são:

$$R_x = 0 \Rightarrow O_x + A_x - Q - F_{BF} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$R_y = 0 \Rightarrow O_y + A_y - F_{BE} \frac{\sqrt{2}}{2} - F_{BF} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$R_z = 0 \Rightarrow F_{BE} \frac{\sqrt{2}}{2} - P = 0$$



Já devido ao somatório de momentos usando o polo O , têm-se:

$$M_x = 0 \Rightarrow -9bA_y - 7bP + 9bF_{BF} \frac{\sqrt{2}}{2} + 9bF_{BE} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$M_y = 0 \Rightarrow 9bA_x - 9bF_{BF} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{9b}{2}Q = 0$$

$$M_z = 0 \Rightarrow 9bF_{BF} \frac{\sqrt{2}}{2} + 7bQ = 0$$

(e) A solução do sistema de equações fornece:

$$F_{BE} = P\sqrt{2}$$

$$F_{BF} = -Q \frac{7\sqrt{2}}{9}$$

$$O_x = \frac{Q}{2}$$

$$O_y = \frac{7}{9}P$$

$$A_x = -\frac{5}{18}Q$$

$$A_y = \frac{2}{9}P - \frac{7}{9}Q$$

(f) Ambas as barras BE e BF são barras de treliça, uma vez que são articuladas nas extremidades e estão sujeitas apenas a forças aplicadas nos pontos de articulação. No DCL, as forças em ambas as barras foram adotadas como positivas no sentido de tracionar cada barra. Assim sendo, pelos sinais dos resultados obtidos conclui-se que a barra BE está sob tração enquanto que a barra BF está sob compressão.

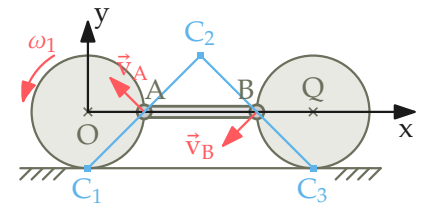


Questão 2 (3,0 pontos)

Distribuição de pontos:

- (a) 0,1 por cada expressão de vetor posição; 0,3 pela construção geométrica correta.
- (b,c) 0,2 por cada expressão vetorial correta; 0,2 pelo raciocínio.
- (d,e) 0,2 por cada expressão vetorial correta; 0,2 pelo raciocínio.

Resolução:



- (a) Pela condição de rolamento sem escorregamento, os pontos de contato C_1 e C_3 dos discos com a superfície são os CIRs dos discos de centros O e Q , respectivamente. A partir destes CIRs, pode-se fazer a construção geométrica indicada na figura ao lado, que permite determinar as direções das velocidades dos pontos A e B e, conseqüentemente, o CIR C_2 da barra AB . Ainda, observando que o triângulo $C_1C_2C_3$ é isósceles e retângulo em C_2 , conclui-se que:

$$\boxed{(C_1 - O) = -R\vec{j}} \quad \boxed{(C_2 - O) = 2R\vec{i} + R\vec{j}} \quad \boxed{(C_3 - O) = 4R\vec{i} - R\vec{j}}$$

- (b,c) Aplicando as equações de campo de velocidades ao disco de centro O e à barra AB , respectivamente:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{C_1} + \vec{\omega}_1 \wedge (A - C_1) = \vec{0} + \omega_1 \vec{k} \wedge (R\vec{i} + R\vec{j}) \Rightarrow \boxed{\vec{v}_A = \omega_1 R(-\vec{i} + \vec{j})}$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{C_2} + \vec{\omega}_2 \wedge (A - C_2) = \vec{0} + \omega_2 \vec{k} \wedge (-R\vec{i} - R\vec{j}) = -\omega_2 R(-\vec{i} + \vec{j}) \Rightarrow \omega_2 = -\omega_1 \Rightarrow \boxed{\vec{\omega}_2 = -\omega_1 \vec{k}}$$

Aplicando as equações de campo de velocidade à barra AB e ao disco de centro Q , respectivamente:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{C_2} + \vec{\omega}_2 \wedge (A - C_2) = \vec{0} - \omega_1 \vec{k} \wedge (R\vec{i} - R\vec{j}) \Rightarrow \boxed{\vec{v}_B = \omega_1 R(-\vec{i} - \vec{j})}$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{C_3} + \vec{\omega}_3 \wedge (B - C_3) = \vec{0} + \omega_3 \vec{k} \wedge (-R\vec{i} + R\vec{j}) = \omega_3 R(-\vec{i} - \vec{j}) \Rightarrow \omega_3 = \omega_1 \Rightarrow \boxed{\vec{\omega}_3 = \omega_1 \vec{k}}$$

Aplicando a equação de campo de velocidade ao disco de centro Q :

$$\vec{v}_Q = \vec{v}_{C_3} + \vec{\omega}_3 \wedge (Q - C_3) = \vec{0} + \omega_1 \vec{k} \wedge (R\vec{j}) \Rightarrow \boxed{\vec{v}_Q = -\omega_1 R\vec{i}}$$

- (d,e) Os pontos O e Q descrevem movimentos retilíneos na direção do eixo x . Assim:

$$\vec{a}_O = -\alpha_1 R\vec{i} = \vec{0} \quad \text{e} \quad \vec{a}_Q = -\alpha_3 R\vec{i}$$

Aplicando as equações de campo de acelerações aos discos de centros O e Q e à barra AB , respectivamente:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_O + \vec{\alpha}_1 \wedge (A - O) - \omega_1^2 (A - O) = \vec{0} + \vec{0} - \omega_1^2 (R\vec{i}) \Rightarrow \boxed{\vec{a}_A = -\omega_1^2 R\vec{i}}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_Q + \vec{\alpha}_3 \wedge (B - Q) - \omega_3^2 (B - Q) = -\alpha_3 R\vec{i} + \alpha_3 \vec{k} \wedge (-R\vec{i}) - \omega_1^2 (-R\vec{i}) \Rightarrow \vec{a}_B = (\omega_1^2 - \alpha_3)R\vec{i} - \alpha_3 R\vec{j}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha}_2 \wedge (B - A) - \omega_2^2 (B - A) = -\omega_1^2 R\vec{i} + \alpha_2 \vec{k} \wedge (2R\vec{i}) - \omega_1^2 (2R\vec{i}) \Rightarrow \vec{a}_B = (-3\omega_1^2)R\vec{i} + 2\alpha_2 R\vec{j}$$

Igualando as duas últimas expressões para a aceleração \vec{a}_B conclui-se que:

$$\omega_1^2 - \alpha_3 = -3\omega_1^2 \Rightarrow \boxed{\vec{\alpha}_3 = -4\omega_1^2 \vec{k}}$$

$$-\alpha_3 = 2\alpha_2 \Rightarrow \boxed{\vec{\alpha}_2 = 2\omega_1^2 \vec{k}}$$

Finalmente:

$$\boxed{\vec{a}_B = \omega_1^2 R(-3\vec{i} + 4\vec{j})} \quad \text{e} \quad \boxed{\vec{a}_Q = 4\omega_1^2 R\vec{i}}$$

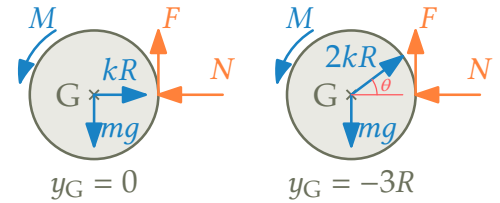


Questão 3 (3,5 pontos)

Distribuição de pontos:

- (a) 0,5 para o par de DCLs inteiramente correto ou 0,3 para o par de DCLs se houver até 2 componentes erradas.
- (b) 0,2 pela aplicação correta do Teorema da Energia Cinética; 0,2 pelo cálculo da variação da energia cinética; 0,2 pelo cálculo da variação da energia potencial; 0,2 pelo cálculo do trabalho do momento constante; 0,2 por $\vec{\omega}$.
- (c,d) 0,2 pela aplicação correta do Teorema da Quantidade de Movimento Angular em cada configuração; 0,2 por cada expressão correta de aceleração angular; 0,2 por cada equação correta do Teorema da Resultante em cada configuração; 0,2 por cada expressão correta para o valor mínimo de μ .

Resolução:



- (a) A figura ao lado indica os DCLs solicitados. Observe que na configuração $y_G = 0$, o comprimento da mola é $l = 4R$ e, portanto, $l - l_0 = R$. Já a configuração $y_G = -3R$, o comprimento da mola é $l = 5R$ e, portanto, $l - l_0 = 2R$. Note ainda que, nesta configuração, $\cos \theta = \frac{4}{5}$ e $\sin \theta = \frac{3}{5}$.
- (b) Pode-se aplicar o Teorema da Energia Cinética ao sistema entre as configurações inicial $y_G = 0$ e final $y_G = -3R$. Em termos de variação de energia cinética, tem-se:

$$\Delta T = \left[\frac{1}{2} m |\vec{v}_G|^2 + \frac{1}{2} J_{Gz} \omega^2 \right]_{y_G=0}^{y_G=-3R} = \left[\frac{1}{2} m (\omega R)^2 + \frac{1}{2} \frac{mR^2}{2} \omega^2 \right] - 0 = \frac{3}{4} mR^2 \omega^2$$

Em termos de variação de energia potencial, tem-se:

$$\Delta V = \left[mgh_G + \frac{1}{2} k (l - l_0)^2 \right]_{y_G=0}^{y_G=-3R} = \left[mg(-3R) + \frac{1}{2} k (2R)^2 \right] - \left[0 + \frac{1}{2} k (R)^2 \right] = -3mgR + \frac{3}{2} kR^2$$

O único esforço não-conservativo que realiza trabalho é o momento constante $\vec{M}\vec{k}$:

$$W^{nc} = \int_0^t \vec{M}\vec{k} \cdot \omega \vec{k} dt = \int_0^t M \frac{v_G}{R} dt = \frac{M}{R} \int_0^t v_G dt = \frac{M}{R} \Delta s_G = \frac{M}{R} (3R) = 3M$$

Assim:

$$\Delta T = -\Delta V + W^{nc} \Rightarrow \frac{3}{4} mR^2 \omega^2 = 3mgR - \frac{3}{2} kR^2 + 3M \Rightarrow \boxed{\vec{\omega} = \sqrt{4 \frac{g}{R} - 2 \frac{k}{m} + 4 \frac{M}{mR^2}} \vec{k}}$$

- (c,d) Observe que em ambas as configurações, a expressão da aceleração do centro de massa \vec{a}_G do disco em função de sua aceleração angular $\vec{\alpha} = \alpha \vec{k}$ é dada por: $\vec{a}_G = -\alpha R \vec{j}$. Assim, aplicando o Teorema da Quantidade de Movimento Angular (polo G) e o Teorema da Resultante ao disco na configuração $y_G = 0$:

$$\begin{cases} J_{Gz} \alpha = M_{Gz} \\ ma_{Gx} = R_x \\ ma_{Gy} = R_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{mR^2}{2} \alpha = FR + M \\ 0 = kR - N \\ -m\alpha R = F - mg \end{cases} \Rightarrow \boxed{N = kR} \quad \boxed{F = -\frac{2M}{3R} + \frac{1}{3}mg} \quad \boxed{\vec{\alpha} = \frac{2}{3} \left[\frac{M}{mR^2} + \frac{g}{R} \right] \vec{k}}$$

Aplicando o Teorema da Quantidade de Movimento Angular (polo G) e o Teorema da Resultante ao disco na configuração $y_G = -3R$:

$$\begin{cases} J_{Gz} \alpha = M_{Gz} \\ ma_{Gx} = R_x \\ ma_{Gy} = R_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{mR^2}{2} \alpha = FR + M \\ 0 = \frac{8}{5}kR - N \\ -m\alpha R = F + \frac{6}{5}kR - mg \end{cases} \Rightarrow \boxed{N = \frac{8}{5}kR} \quad \boxed{F = -\frac{2M}{3R} - \frac{2}{5}kR + \frac{1}{3}mg} \quad \boxed{\vec{\alpha} = \frac{2}{3} \left[\frac{M}{mR^2} - \frac{6k}{5m} + \frac{g}{R} \right] \vec{k}}$$

Para satisfazer à condição de rolamento sem escorregamento:

$$\mu \geq \frac{|F|}{N} \Rightarrow \boxed{\mu \geq \max \left\{ \left| -\frac{2M}{3kR^2} + \frac{1}{3} \frac{mg}{kR} \right|, \left| -\frac{5M}{12kR^2} - \frac{1}{4} + \frac{5}{24} \frac{mg}{kR} \right| \right\}}$$