Prova de Recuperação de Mecânica dos Fluidos II – PME3330   20/07/2023

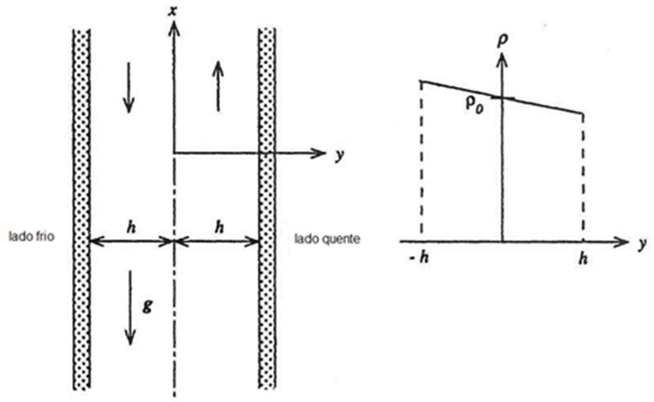
Nome:____NUSP:__________

1ª Questão (3,0 pontos) – Uma camada de ar entre duas placas de vidro em uma janela isolante tem uma massa específica ρ que varia linearmente com a distância y do centro da camada segundo a expressão $\rho = \rho_o\ (1- \alpha y)$ por causa da transferência de calor entre as placas quente e fria. Entretanto, a diferença de temperaturas não é suficiente para influenciar a viscosidade dinâmica, de modo que a distribuição de μ pode ser considerada uniforme. O ar quente ($0 \le y \le h$) se move para cima e o ar frio ($-h \le y \le 0$) se move para baixo, de modo que as linhas de corrente são paralelas às superfícies de vidro, ou seja, a velocidade na direção y é $\upsilon = 0$ e podemos considerar também $\partial p/\partial y = 0$. Podemos considerar o escoamento permanente e desenvolvido. Por simetria, a vazão para cima do lado quente iguala a vazão para baixo do lado frio. Pede-se:

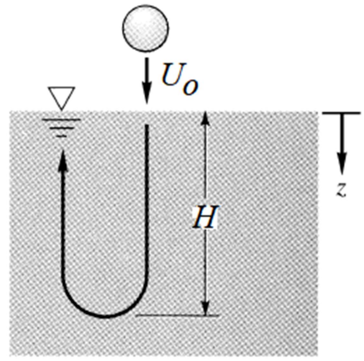
a)Mostre que como o escoamento é permanente, $\rho = \rho(y)$ e $\upsilon = 0$, podemos considerá-lo incompressível (1,0 ponto).

b)Na linha de centro verifica-se que $\partial^2 u/\partial y^2 = 0$ (temos um ponto de inflexão do perfil). Com isso, ache uma expressão para $\partial p/\partial x$ (1,0 ponto).

c)Obtenha o perfil de velocidades $u=u(y)$ como função de ρ_o, α, h, g e μ (1,0 pontos).



1a Questão



2a Questão

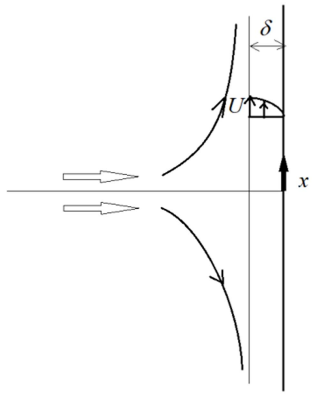
2ª Questão (3,0 pontos) – Um objeto sólido de massa específica ρ_s penetra na vertical em um reservatório com um líquido de massa específica ρ_f com uma velocidade inicial U_o em $z = 0$, sendo $\rho_f > \rho_s$ (ou seja, o sólido tende a flutuar). O sólido tem um volume $\forall$, uma área frontal A e um coeficiente de arrasto C_D constante ao longo de seu trajeto. A aceleração da gravidade é g. Qual a profundidade máxima H atingida pelo objeto antes de voltar para a superfície? Escreva H em função de $\rho_s, \rho_f, U_o, \forall, A, g$ e C_D.   Dicas: faça $\frac{dU}{dt} = \frac{dU}{dz}\frac{dz}{dt} = U\frac{dU}{dz}$ $\int \frac{x}{A+Bx^2}\,dx = \frac{1}{2B}\ln(A+Bx^2) + C$

3ª Questão (2,0 pontos) – Um escoamento bidimensional, incompressível, permanente e não-viscoso é dado, num sistema cilíndrico de coordenadas, pelo campo de velocidades:

$$v_r = \frac{C_1}{r},\ v_\theta = \frac{C_2}{r},\ v_z = 0 \text{ , onde } C_1 \text{ e } C_2 \text{ são constantes.}$$

a) Mostre que é possível determinar uma função de corrente ψ para esse escoamento. (0,5 ponto)
b) Determine a função de corrente ψ. (0,5 ponto)
c) Mostre que é possível determinar uma função potencial ϕ para esse escoamento. (0,5 ponto)
d) Determine a função potencial ϕ. (0,5 ponto)

4ª Questão (2,0 pontos) – O escoamento irrotacional externo a uma camada limite laminar causada pela incidência de uma corrente perpendicular a uma parede é dado por $U = A\,x^m$. O escoamento é permanente, bidimensional e incompressível. Temos que a tensão de cisalhamento na parede é dada por $\tau_o = \beta\,\mu\,U/\delta$, onde β é uma constante. As espessuras de deslocamento e quantidade de movimento são dadas por $\delta^* = \gamma\delta$ e $\theta = \alpha\delta$, onde γ e α são constantes. A espessura da camada limite resulta constante, ou seja, $d\delta/dx = 0$. Determine o expoente m. Determine a espessura da camada limite δ como função de A, α, β, γ e das propriedades ρ e μ do fluido.



Formulário

Continuidade : $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \upsilon}{\partial y}=0$

Navier-Stokes: $\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+g_x$

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t}+u\frac{\partial \upsilon}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial \upsilon}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial y^2}\right)+g_y$$

Camada Limite:

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1-\frac{u}{U}\right)dy \qquad \theta = \int_0^\delta \left[\frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right)\right]dy \qquad \frac{c_f}{2} = \frac{d\theta}{dx}+\frac{\theta}{U}\frac{dU}{dx}\left(2+\frac{\delta^*}{\theta}\right)$$

$c_f = \frac{\tau_o}{\frac{1}{2}\rho\,U^2}$ onde τ_o é a tensão na parede $\quad \tau_o = \rho u^{*2} \quad C_D = \frac{1}{L}\int_0^L c_f\,dx \quad F_x = \frac{1}{2}\,\rho\,U^2\,A\,C_D$

Arrasto: $F_{arr} = \frac{1}{2}\,\rho\,A\,C_D\,U^2$

Escoamento Potencial:

$$v_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{\partial\psi}{r\partial\theta} \qquad v_\theta = \frac{\partial\phi}{r\partial\theta} = -\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

$$\nabla\times\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\theta & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{r\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_r & v_\theta & v_z \end{vmatrix} + \frac{v_\theta}{r}\,\vec{e}_z \qquad \nabla.\vec{V} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,v_r)+\frac{\partial v_\theta}{r\partial\theta}+\frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Gabarito

1ª Questão (3,0 pontos)

a) Neste escoamento, a velocidade υ na direção y é nula e as partículas de movem na direção x. Como ρ varia apenas na direção y, isso significa que a massa específica não varia na direção do escoamento. Isso significa que as partículas conservam sua massa específica (A derivada material de ρ é nula). Portanto, o escoamento é incompressível.

Outra forma de justificar que o escoamento é incompressível é simplesmente atentar para o fato que o próprio enunciado diz que υ=0, logo $\partial\upsilon/\partial y = 0$, e que o escoamento é desenvolvido, logo $\partial u/\partial x = 0$.
Com isso resulta a equação da continuidade para fluido incompressível:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \upsilon}{\partial y}=0$$

b) Como $\upsilon = 0$ a equação da continuidade para um escoamento incompressível $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \upsilon}{\partial y}=0$ resulta:

$\frac{\partial u}{\partial x}=0$ ou seja, o escoamento é desenvolvido.

Aplicando Navier-Stokes na linha de centro, como $\rho = \rho_o$ e g_x = -g:

$$\rho_o\left(\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{0}+u\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{0}+\underset{0}{v}\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{0}+\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{0}\right)-\rho_o\, g$$

Resulta:

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial x}=-\rho_o\, g}$$

c) Aplicando a equação de Navier-Stokes:

$$\rho\left(\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{0}+u\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{0}+\underset{0}{v}\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{0}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)-\rho\, g$$

Como $\frac{\partial p}{\partial y}=0$, vale para toda uma seção em y o gradiente de pressão $\frac{\partial p}{\partial x}=-\rho_o\, g$ do ítem (b). Assim:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x}+\rho\, g\right)=\frac{1}{\mu}\left(-\rho_o g+\rho_o g-\rho_o\alpha\, y\, g\right)$$

Logo, como u=u(y) podemos trocar o sinal de derivada parcial por derivada total:

$$\frac{d^2 u}{d y^2}=-\frac{\rho_o\,\alpha\, y\, g}{\mu}$$

Com condições de contorno u = 0 para y = ± h, u = 0 para y = 0. A integração resulta:

$$\boxed{u=\frac{\rho_o\,\alpha\, g\, y}{6\,\mu}\left(h^2-y^2\right)}$$

2ª Questão (3,0 pontos)

Aplicando a segunda lei de Newton, considerando que atuam sobre o objeto as forças peso, de arrasto e o empuxo do fluido deslocado:

$$m\,\frac{dU}{dt} = mg - E - \frac{1}{2}\,\rho_f\,A\,C_D\,U^2$$

Aplicando a dica dada, essa equação fica:

$$\rho_s \forall\, U\,\frac{dU}{dz} = \rho_s \forall g - \rho_f \forall g - \frac{1}{2}\,\rho\,A\,C_D U^2$$

Podemos escrever essa última equação como:

$$U\,\frac{dU}{dz} = -g\left(\frac{\rho_f}{\rho_s} - 1\right) - \frac{1}{2}\,\frac{\rho_f}{\rho_s}\,\frac{A}{\forall}\,C_D U^2 = -k_1 - k_2\,U^2$$

Podemos escrever essa última equação como:

$$dz = -\frac{U}{k_1 + k_2\,U^2}\,dU$$

Integrando:

$$z = -\frac{1}{2k_2}\ln(k_1 + k_2\,U^2) + C$$

Como para $z = 0$ temos $U = U_o$, resulta $C = \frac{1}{2k_2}\ln\left(k_1 + k_2\,{U_o}^2\right)$ e então:

$$z = \frac{1}{2k_2}\ln\left(\frac{k_1 + k_2\,{U_o}^2}{k_1 + k_2\,U^2}\right)$$

Pra a profundidade máxima $z = H$ temos $U = 0$, assim:

$$H = \frac{1}{2k_2}\ln\left(\frac{k_1 + k_2\,{U_o}^2}{k_1}\right) = \frac{1}{2k_2}\ln\left(1 + \frac{k_2}{k_1}\,{U_o}^2\right)$$

Substituindo as constantes:

$$H = \frac{1}{\frac{\rho_f}{\rho_s}\,\frac{A}{\forall}\,C_D}\ln\left(1 + \frac{\frac{\rho_f}{\rho_s}\,\frac{A}{\forall}\,C_D}{2g\left(\frac{\rho_f}{\rho_s} - 1\right)}\,{U_o}^2\right)$$

3ª Questão (2,0 pontos)

a)Para podermos determinar uma função de corrente o escoamento precisa ser bidimensional (o que ele é) e incompressível. Assim:

$$\nabla.\vec{V} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\, v_r) + \frac{\partial v_\theta}{r\partial\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(C_1) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{C_2}{r}\right) = 0$$

Logo, podemos determinar a função de corrente ψ.

b)Finalmente, a função de corrente é obtida de:

$\frac{\partial\psi}{\partial r} = -v_\theta = -\frac{C_2}{r}$ logo $\psi = -C_2 \ln r + f(\theta)$

$\frac{\partial\psi}{r\partial\theta} = v_r = \frac{C_1}{r}$ logo $\psi = C_1\theta + f(r)$

Por inspeção:

$$\psi = C_1\theta - C_2 \ln r$$

c)Para ser potencial, o escoamento tem que ser irrotacional. As velocidades são dadas por:

O rotacional da velocidade é dado por:

$$\nabla\times\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\theta & \vec{e}_z \\ \partial/\partial r & \partial/r\partial\theta & \partial/\partial z \\ v_r & v_\theta & v_z \end{vmatrix} + \frac{v_\theta}{r}\,\vec{e}_z = \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{r\partial\theta} + \frac{v_\theta}{r}\right)\vec{e}_z$$

Isso resulta:

$$\nabla\times\vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{C_2}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{C_1}{r}\right) + \frac{C_2}{r^2}\right)\vec{e}_z = \left(-\frac{C_2}{r^2} + \frac{C_2}{r^2}\right)\vec{e}_z = 0$$

Logo, é possível determinar uma função potencial para esse escoamento.

d)Finalmente, a função potencial é obtida de:

$\frac{\partial\phi}{\partial r} = v_r = \frac{C_1}{r}$ logo $\phi = C_1 \ln r + f(\theta)$

$\frac{\partial\phi}{r\partial\theta} = v_\theta = \frac{C_2}{r}$ logo $\phi = C_2\theta + f(r)$

Por inspeção:

$$\phi = C_2\theta + C_1 \ln r$$

4ª Questão (2,0 pontos)

Da equação integral de Von Kármán:

$$\frac{c_f}{2} = \underbrace{\frac{d\theta}{dx}}_{0} + \frac{\theta}{U}\frac{dU}{dx}\left(2 + \frac{\delta^*}{\theta}\right)$$

Isso resulta:

$$\frac{\tau_o}{\rho U^2} = \frac{\theta}{U}\frac{dU}{dx}\left(2 + \frac{\gamma}{\alpha}\right)$$

Ou:

$$\frac{\beta\mu U}{\rho\delta U^2} = \frac{\theta}{U}\frac{dU}{dx}\left(2 + \frac{\gamma}{\alpha}\right)$$

Reparem que é possível eliminar U. Assim:

$$\frac{\beta\mu}{\rho\delta} = \theta\frac{dU}{dx}\left(2 + \frac{\gamma}{\alpha}\right)$$

Substituindo θ e dU/dx:

$$\frac{\beta\mu}{\rho\delta} = \alpha\delta\, A\, m\, x^{m-1}\left(2 + \frac{\gamma}{\alpha}\right)$$

Como δ, ρ e μ são constantes, o único valor aceitável de m é $m = 1$. Assim:

$$\frac{\beta\mu}{\rho\delta} = \alpha\delta\, A\left(2 + \frac{\gamma}{\alpha}\right)$$

Isso resulta:

$$\delta^2 = \frac{\beta}{\alpha}\frac{1}{\left(2+\frac{\gamma}{\alpha}\right)}\frac{\mu}{A\rho}$$

Ou:

$$\delta = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}\frac{1}{\left(2+\frac{\gamma}{\alpha}\right)}\frac{\mu}{A\rho}}$$