Prova P4 - Gabarito

Q1. [3,0] Um satélite de massa m orbita um planeta de massa $M \gg m$, como mostrado na figura abaixo.

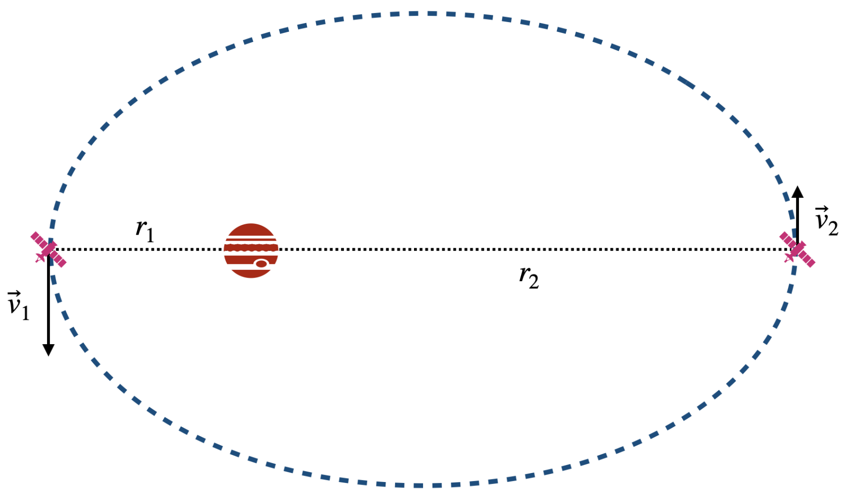

Figura 1: Um satélite orbita um planeta de massa muito maior. Considere que a posição do planeta coincide com o centro de massa do sistema.

a. **(1,0)** Demonstre que o momento angular do satélite com respeito ao centro do movimento (o planeta, que está no foco da elipse) é conservado durante todo o movimento.

Resposta

A variação do momento angular é dada pelo torque, ou seja:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Mas a força gravitacional é radial, $F_G \propto \hat{r}$. Como $\vec{a} \times \vec{a} = 0$ para qualquer vetor, temos que o torque da força gravitacional é nulo, ou seja:

$$\vec{\tau}_G = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = 0\ ,$$

ou seja, o momento angular se conserva.

b. **(1,5)**
Ao longo da órbita elíptica do satélite, há duas posições nas quais a velocidade do satélite é exatamente ortogonal ao raio vetor que aponta para o planeta: o periélio e o afélio. No ponto de maior *aproximação* do satélite (r_1), o periélio, a velocidade é *máxima* (v_1). No ponto de maior *afastamento* do satélite (r_2), o afélio, a velocidade é *mínima* (v_2).
Supondo que você conhece o valor da constante de Newton G, a massa do planeta M e os raios r_1 e r_2, encontre as velocidades v_1 e v_2.
Resposta
Por conservação de energia temos:

$$E = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{r_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GMm}{r_2} \ .$$

Por outro lado, como tanto no afélio quanto no periélio a velocidade é ortogonal ao raio vetor, o momento angular nesses dois pontos é dado simplesmente por:

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_1 = m\, r_1\, v_1\, \hat{k} \quad , \quad \vec{L}_2 = m\, r_2\, v_2\, \hat{k} \ ,$$

onde $\hat{k}$ é um versor unitário que aponta para "fora" do plano da órbita. Por conservação do momento angular temos:

$$\vec{L}_1 = \vec{L}_2 \quad \Rightarrow \quad r_1\, v_1 = r_2\, v_2 \ .$$

Substituindo essa última relação na equação para a conservação de energia, resolvendo para v_1, por exemplo, obtemos:

$$v_1^2 = \frac{r_2}{r_1}\frac{2GM}{r_1 + r_2} \ .$$

Para v_2 temos, de modo similar:

$$v_2^2 = \frac{r_1}{r_2}\frac{2GM}{r_1 + r_2} \ .$$

c. **(0,5)** Utilizando a sua resposta do item anterior, verifique que o momento angular no perélio é igual ao momento angular no afélio.
Resposta
Basta substituir as expressões acima nas expressões para o momento angular nos dois pontos. Obtemos, para L_1:

$$L_1 = m\, r_1\, v_1 = mr_1\sqrt{\frac{r_2}{r_1}\frac{2GM}{r_1 + r_2}} = m\sqrt{\frac{2GM\, r_1 r_2}{r_1 + r_2}} \ .$$

De modo similar, para L_2 obtemos:

$$L_2 = m\,r_2\,v_2 = mr_2\sqrt{\frac{r_1}{r_2}\frac{2GM}{r_1+r_2}} = m\sqrt{\frac{2GM\,r_2 r_1}{r_1+r_2}}\;.$$

Isso mostra que $L_1 = L_2$, como era de se esperar.

Q2. [2,0] Neste exercício vamos calcular o momento de inércia de um cone de massa M, raio R e altura H, que está mostrado na figura abaixo.

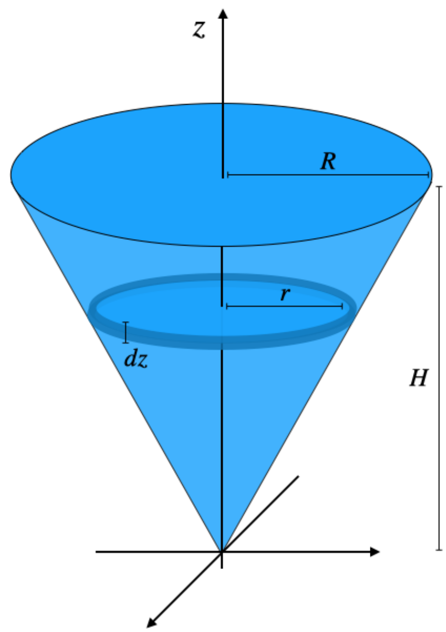

Figura 2: Um cone de densidade homogênea, massa M, raio R e altura H gira em torno de seu eixo central (o eixo z).

a. **(1,0)** Você pode pensar num cone como uma pilha de discos de massas diferentes. Cada disco tem uma espessura dz e, à medida que a altura cresce, o raio dos discos aumenta de modo proporcional à altura, ou seja, $r = (R/H)z$.

Primeiramente, some (integre!) o volume dos discos e mostre que o volume total do cone é dado por $V = (1/3)\pi R^2 H$. Use esse resultado para expressar a densidade do cone em termos da massa M, do raio R e da altura H.

Resposta

O volume de cada disco é dado por $dV = \pi r^2\, dz$, onde $r = (R/H)z$. Temos então:

$$V = \int dV = \int_0^H \pi \left(\frac{R}{H}z\right)^2 dz \pi \left(\frac{R}{H}\right)^2 \left(\frac{1}{3}z^3\right)_0^H = \frac{1}{3}\pi R^2 H \ .$$

A densidade é, portanto, dada por:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3M}{\pi R^2 H} \ .$$

b. **(1,0)** Agora, usando o fato de que o momento de inércia de um disco de raio r e massa dM é dado por $dI = (1/2)\, dM\, r^2$, calcule o momento de inércia do cone com relação ao seu eixo central (o eixo z na figura).

Resposta

O cálculo é muito parecido com o item anterior: o momento de inércia do cone é a soma dos momentos de inércia dos discos. Usando o fato de que $dM = \rho dV$, temos:

$$I = \int dI = \int_0^H \frac{1}{2} dM\, r^2 = \frac{1}{2}\int_0^H \left[\rho\, \pi \left(\frac{R}{H}z\right)^2 dz\right] \left(\frac{R}{H}z\right)^2 \ .$$

A integral $\int_0^H z^4 dz = H^5/5$ e portanto obtemos:

$$I = \frac{3}{10} M R^2 \ .$$

Q3. [3,0] Considere um cilindro homogêneo de massa M e raio R, que inicialmente está em repouso num plano. Esse cilindro é então sujeito a uma força $\vec{F}$ aplicada na altura do centro de massa. Quando essa força externa é aplicada, o cilindro, em seu ponto de contato com o plano, é também sujeito a uma força de atrito, como indicado na figura abaixo.

a. **(1,0)** Considere a situação em que tanto a força externa $\vec{F}$ quanto a força de atrito $\vec{F}_a$ são constantes. Qual o valor de F tal que o cilindro rola sem deslizar? Deixe a sua resposta em termos da massa do cilindro, de seu momento de inércia e do módulo da força de atrito (F_a).

Resposta

A força resultante é $F - F_a$, portanto pela 2a lei de Newton temos que:

$$M\frac{dV}{dt} = F - F_a \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{dt} = \frac{F - F_a}{M} \ .$$

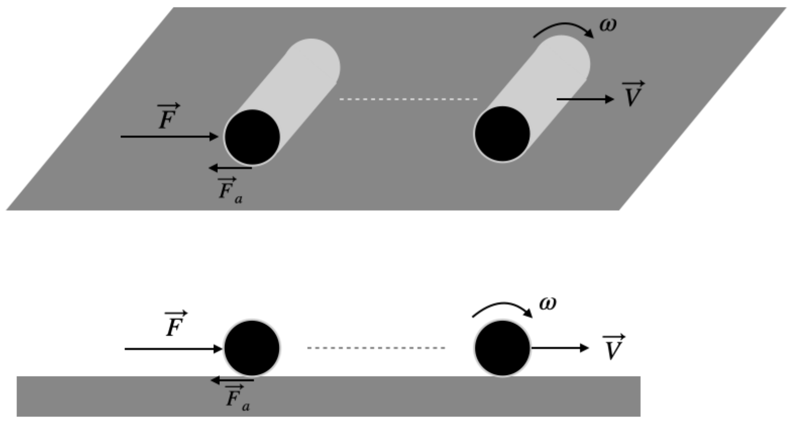

Figura 3: Um cilindro de massa M e raio R, inicialmente em repouso, sofre uma força externa $\vec{F}$ aplicada na altura do centro de massa. No ponto de contato do cilindro com o plano há uma força de atrito $\vec{F}_a$.

Por outro lado, a força de atrito faz um torque $\tau_a = RF_a$ e pela lei do torque temos que o momento angular do cilindro obedece a:

$$I\frac{d\omega}{dt} = \tau_a = RF_a \quad \Rightarrow \quad \frac{d(\omega R)}{dt} = \frac{R^2\,F_a}{I}\ ,$$

onde $I = \frac{1}{2}MR^2$ é o momento de inércia do cilindro.
A condição de rolamento sem deslizamento determina que o ponto de contato entre os dois deve estar em repouso, ou seja $V_c = V - \omega R = 0$. Combinando as duas equações acima temos que:

$$\frac{d}{dt}\,(V - \omega R) = \frac{F - F_a}{M} - \frac{R^2\,F_a}{I}\ .$$

Para que o cilindro esteja sempre rolando é necessário que V_c comece nula e continue nula após a aplicação das forças. Portanto é necessário que:

$$0 = \frac{F - F_a}{M} - \frac{R^2\,F_a}{I} \quad \Rightarrow \quad F = F_a\left(1 + \frac{MR^2}{I}\right) = 3F_a\ .$$

b. **(1,0)** Após um certo intervalo de tempo o cilindro se move com uma velocidade V e uma velocidade angular ω. Calcule a energia cinética desse cilindro.
Resposta

A energia é dada pela energia cinética de translação mais a energia cinética de rotação, ou seja:

$$K = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}MR^2\omega^2 = \frac{3}{4}MV^2 \ .$$

c. **(1,0)** Considere que o cilindro está se movendo com velocidade V e rola com velocidade angular ω, e não está mais sujeito a nenhuma força externa, nem a nenhuma força de atrito. Suponha que o meio material do cilindro se liquefaz, e que como resultado a massa M migra do volume interior do cilindro para a sua extremidade. Ou seja, ao final desse processo o cilindro passa a ser um cilindro vazado, de forma que a seção transversal do cilindro se parece com um anel de raio R. Você pode assumir que esse movimento da massa do cilindro para a extremidade ocorre sem nenhuma ação de forças externas. Calcule a velocidade final e a velocidade angular final desse cilindro.

Resposta

Nesse caso o momento linear se conserva, pois não há nenhuma força externa agindo no cilindro. Portanto, a velocidade final é a mesma – v.

Já a velocidade angular, ela vai mudar, porque o momento de inércia do cilindro, que era $I = \frac{1}{2}MR^2$, passa a ser $I \to I' = MR^2$. Como o momento angular se conserva (não há forças externas, e quaisquer torques internos se cancelam), temos:

$$L = I\,\omega = I'\,\omega' \quad \Rightarrow \quad \omega' = \frac{I}{I'}\omega = \frac{1}{2}\omega \ .$$

Q4. [3,0] Considere um disco que gira com velocidade angular Ω, no sentido anti-horário, como mostrado na figura abaixo. Sobre esse disco temos três formigas, sobre as quais vamos encontrar grandezas físicas.

Nos problemas abaixo vamos nos referir ao referencial S', que gira junto com o disco, como as coordenadas $\{r', \theta'\}$, junto com seus versores $\hat{r}(\theta')$ e $\hat{\theta}(\theta')$. Num referencial inercial (que não gira) temos $\{r, \theta\}$, junto com os versores $\hat{r}(\theta)$ e $\hat{\theta}(\theta)$. Note que $r' = r$ e $\theta' = \theta - \Omega t$. Considere $\vec{\Omega} = \Omega\,\hat{z}$, com Ω constante.

a. **(1,0)** A formiga A está parada em cima do disco, numa posição $\{r'_A, \theta'_A\}$, ou seja, $\vec{r}'_A = R_A\,\hat{r}(\theta'_A)$. Encontre a velocidade *vetorial* dessa formiga no referencial inercial e, em seguida, calcule a aceleração *vetorial* dessa formiga no referencial inercial.

Resposta

A formiga está parada no referencial girante, $r' = r = r_A$ =const, com uma posição angular constante no referencial girante, $\theta' = \theta_A$. Como $\theta' = \theta - \Omega t$ e $\theta' = \theta_A$ =const., temos que a posição angular da formiga no referencial inercial

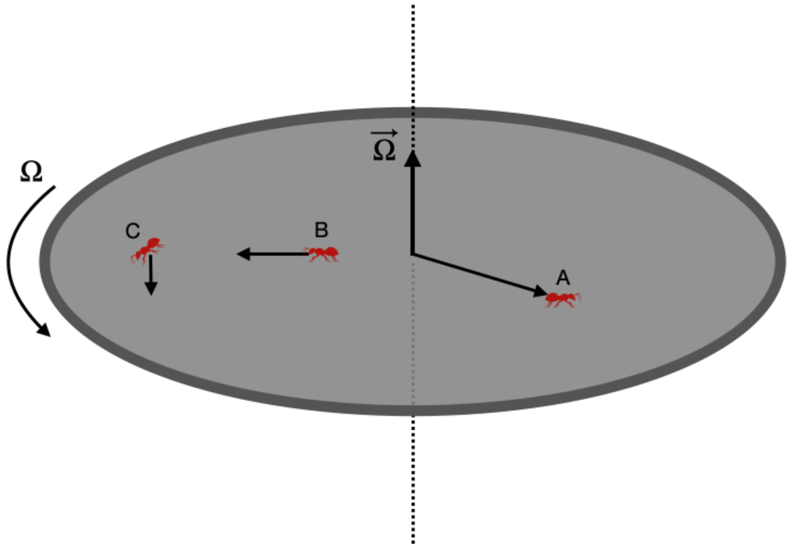

Figura 4: Um disco gira com velocidade angular Ω. Sobre esse disco temos três formigas: A, B e C.

é $\theta(t) = \theta_A + \Omega t$. A posição dessa formiga no referencial inercial é, portanto, dada por:

$$\vec{r}(t) = r_A\,\hat{\theta}(\theta_A + \Omega t)$$

A velocidade dela no referencial inercial pode ser calculada de duas maneiras. Primeiro, podemos calcular usando as definições:

$$\vec{v} = \frac{d\,\vec{r}(t)}{dt} = r_A\,\frac{d\hat{r}(\theta_A + \Omega t)}{dt}$$

Lembrando que $d\hat{r}/d\theta = \hat{\theta}$ temos:

$$\vec{v} = r_A\,\Omega\,\hat{\theta}(\theta = \theta_A + \Omega t) = r_A\,\Omega\,\hat{\theta}(\theta' = \theta_A)$$

De modo similar, poderíamos usar a relação direta entre as velocidades que está no formulário, obtendo:

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \Omega \times \vec{r}\,'_A = 0 + \Omega\,r_A\,\hat{\theta}(\theta' = \theta_A)\ .$$

Para obter a aceleração fazemos:

$$\vec{a} = \frac{d\,\vec{v}(t)}{dt} \quad \text{com} \quad \vec{v} = v_r\,\hat{r} + v_\theta\,\hat{\theta}$$

No caso da formiga A, temos $\vec{v} = r_A\Omega\hat{\theta}(\theta = \theta_A + \Omega t)$, portanto:

$$\vec{a} = r_A\Omega\frac{d\,\hat{\theta}(\theta = \theta_A + \Omega t)}{dt} = -r_A\,\Omega^2\,\hat{r}(\theta = \theta_A + \Omega t)\ ,$$

onde na derivada usamos a regra da cadeia e $d\hat{r}/d\theta = -\hat{\theta}$.

Evidentemente, todos os resultados acima poderia ter sido obtidos notando que a formiga A está em movimento circular uniforme, com velocidade angular Ω !

b. **(1,0)** A formiga B está na posição $\vec{r}\,'_B = R_B\,\hat{r}(\theta'_B)$, e com uma velocidade constante na direção radial dada por $\vec{v}\,'_B = V_B\,\hat{r}(\theta'_B)$, como medido no referencial girante. Encontre a velocidade *vetorial* dessa formiga no referencial inercial e, em seguida, calcule a aceleração *vetorial* dessa formiga no referencial inercial.

Resposta

Vamos primeiramente encontrar a velocidade no referencial girante. Novamente, podemos obter a velocidade de dois modos. Utilizando a transformação de coordenadas temos que a formiga B tem coordenadas $r'_B = V_Bt$ e $\theta' = \theta_B$. Como o raio é igual nos dois referenciais, temos que:

$$r_B = V_Bt \quad , \quad \theta = \theta_B + \Omega t$$

Usando novamente que $\vec{r} = r\hat{r}$ e derivando, temos:

$$\vec{v} = \frac{d\,\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[V_Bt\,\hat{r}(\theta = \theta_B + \Omega t)\right]\ .$$

Usando a regra do produto e da cadeia obtemos:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= V_B\,\hat{r}(\theta = \theta_B + \Omega t) + V_B\,t\,\frac{d}{dt}\left[\hat{r}(\theta = \theta_B + \Omega t)\right]\\ &= V_B\,\hat{r}(\theta = \theta_B + \Omega t) + V_B\,t\,\Omega\,\hat{\theta}(\theta = \theta_B + \Omega t)\ .\end{aligned}$$

Por outro lado, transformando diretamente as velocidades, como dado na fórmula do formulário, temos:

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{\Omega}\times\vec{r}\,' = \vec{v}\,' + r_B\Omega\,\hat{\theta}(\theta' = \theta_B) = V_B\,\hat{r}(\theta' = \theta_B) + V_B\,t\,\Omega\,\hat{\theta}(\theta' = \theta_B)\ ,$$

o que é o mesmo que obtivemos antes.

Agora, para calcular a aceleração temos:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\,\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\Big[V_B\,\hat{r}(\theta = \theta_B + \Omega t) + V_B\,t\,\Omega\,\hat{\theta}(\theta = \theta_B + \Omega t)\Big]\\ &= V_B\frac{d}{dt}\left[\,\hat{r}(\theta = \theta_B + \Omega t)\right] + V_B\,\Omega\,\hat{\theta}(\theta = \theta_B + \Omega t) + V_Bt\Omega\frac{d}{dt}\Big[\hat{\theta}(\theta = \theta_B + \Omega t)\Big]\\ &= V_B\Omega\,\hat{\theta} + V_B\Omega\,\hat{\theta} - V_Bt\,\Omega^2\,\hat{r} = 2V_B\Omega\,\hat{\theta} - V_Bt\,\Omega^2\,\hat{r}\ .\end{aligned}$$

c. **(1,0)** A formiga C está na posição $\vec{r}'_C = R_C\,\hat{r}(\theta_C)$, e com uma velocidade na direção tangencial dada por $\vec{v}'_C = V_C\,\hat{\theta}(\theta_C)$, como medido no referencial girante. Encontre a aceleração (*vetorial*) à qual essa formiga está sujeita.

Resposta

Nesse caso, a velocidade tangencial da formiga é V_C, sendo que ela mantém um raio fixo r_C. Isso que significa que $d\theta'/dt = V_C/r_C$.

Vamos calcular a velocidade pela relação direta entre os referenciais:

$$\begin{aligned}\vec{v}_C &= \vec{v}'_C + \vec{\Omega}\times\vec{r}' = V_C\hat{\theta}(\theta') + r_C\Omega\,\hat{\theta}(\theta') \\ &= (V_C + \Omega\, r_C)\,\hat{\theta}(\theta')\ .\end{aligned}$$

Ou seja, a formiga está num movimento circular com velocidade angular $\omega_C = \Omega + V_C/r_C$!

Para encontrar a aceleração, agora basta derivar a velocidade acima:

$$\begin{aligned}\vec{a}_C &= \frac{d}{dt}\left[(V_C + \Omega\, r_C)\,\hat{\theta}(\theta')\right] \\ &= (V_C + \Omega\, r_C)\frac{d}{dt}\left[\hat{\theta}(\theta')\right]\ .\end{aligned}$$

Agora, lembre-se que $\theta' = V_C/r_C\, t$ e que $\theta = \theta' + \Omega t$, portanto $d\theta/dt = V_C/r_C + \Omega$. Assim, temos:

$$\begin{aligned}&= (V_C + \Omega\, r_C)\frac{d\hat{\theta}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} \\ &= (V_C + \Omega\, r_C)\,(-\hat{r})\,\left(\frac{V_C}{r_C} + \Omega\right) \\ &= -r_C(\Omega + V_C/\, r_C)^2\,\hat{r}\ .\end{aligned}$$

Ou seja, a formiga C está num movimento circular uniforme com velocidade angular $\omega_C = \Omega + V_C/r_C$, e uma aceleração centrípeta $-r_C\omega_C^2\hat{r}$, como era de se esperar.