ZAB0161 - Álgebra linear com aplicações em geometria analítica

Nome do aluno:	NOTA:
Número USP:	**Prova P3 (EB). Data: 13/07/2023**

Justifique as respostas. Colocar na prova toda conta necessária para chegar na solução.

1. Determine os autovalores da matriz de coeficientes quadráticos A, ao diagonalizar $2x^2+xy+3xz+4y^2-yx+3yz+7z^2-2zx+6zy$ sem comutar as variáveis.
   Verifique que $(3,3,6)$ é um autovetor de A.
   Resolução: A matriz é
   $$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3\\ -1 & 4 & 3\\ -2 & 6 & 7\end{bmatrix}.$$
   Resolvendo
   $$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 3\\ -1 & 4-\lambda & 3\\ -2 & 6 & 7-\lambda\end{vmatrix}=0$$
   Obtemos os autovalores 9, 3 e 1.
   Então, para verificar se v é autovetor deve ser satisfeito $Av=\lambda v$, para algum λ.
   Então $Av=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3\\ -1 & 4 & 3\\ -2 & 6 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\3\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}27\\27\\54\end{bmatrix}=9\begin{bmatrix}3\\3\\6\end{bmatrix}=9v$, portanto é autovetor para o autovalor igual a 9.

2. Na hipérbole $\mathscr{H}:\ 3x^2-3y^2+12x+6y=-36$, achar o centro, as equações das assíntotas, os focos, os vértices, a excentricidade e os pontos extremos dos lados retos da hipérbole.
   Resolução: A hipérbole é $\frac{(y-1)^2}{9}-\frac{(x+2)^2}{9}=1$.
   Então $a=b=3$, $c=3\sqrt{2}$, daqui a excentricidade é $\frac{c}{a}=\sqrt{2}$.
   O centro $C=(-2,1)$.
   Assíntotas $\mathcal{L}_1: y=1+(x+2)$ e $\mathcal{L}_2: y=1-(x+2)$.
   Focos $F_1=(-2,1-3\sqrt{2})$ e $F_2=(-2,1+3\sqrt{2})$.
   Vértices $V_1=(-2,-2)$ e $V_2=(-2,4)$.
   Os extremos do lado reto passando pelo F_1 são $(-5,1-3\sqrt{2})$ e $(1,1-3\sqrt{2})$,
   e para o F_2 são $(-5,1+3\sqrt{2})$ e $(1,1+3\sqrt{2})$.

3. Escreva a equação canônica da elipse, dados:

   (a) os focos $(\pm5,0)$ e dois vértices $(\pm13,0)$.
   Resposta: A equação da elipse é $\mathcal{E}:\ \frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$.

(b) o centro $(0,0)$, um dos focos $(0,-\sqrt{40})$ e um ponto $\left(\sqrt{5},\frac{14}{3}\right)$.

Resposta: Como o foco está no eixo Y e $c^2=40$, temos $\mathcal{E}:\quad \frac{y^2}{40+b^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$, e como o ponto pertence a elipse, deve satisfazer a equação. Substituindo as coordenadas do ponto na equação temos $b^2=9$, logo $\mathcal{E}:\quad \frac{y^2}{49}+\frac{x^2}{9}=1$.

4. Identifique a quádrica na equação $-4x^2+y^2-z^2+16x-8y+6z-16=0$. Se é uma quádrica cêntrica determine o centro, se for não cêntrica determine o vértice da quádrica.
Como há apenas termos quadráticos e termos lineares, basta completar quadrados. Assim,

$$4(x^2-4x+4-4)-(y^2-8y+16-16)+(z^2-6z+9-9)=-16$$

$$4(x-2)^2-(y-4)^2+(z-3)^2=-7$$

$$\frac{(y-4)^2}{7}-\frac{(x-2)^2}{\frac{7}{4}}-\frac{(z-3)^2}{7}=1$$

$$\frac{\bar{x}^2}{7}-\frac{\bar{y}^2}{\frac{7}{4}}-\frac{\bar{z}^2}{7}=1$$

A equação é de um hiperboloide de duas folhas, onde $\left\{\begin{array}{lcl}\bar{x} & = & y-4\\ \bar{y} & = & x-2\\ \bar{z} & = & z-3\end{array}\right.$.

Assim o centro é $C=(2,4,3)$.