ZAB0161 - Álgebra linear com aplicações em geometria analítica

Nome do aluno:	NOTA:
Número USP:	**Prova P3 (EAD). Data: 13/07/2023**

Justifique as respostas. Colocar na prova toda conta necessária para chegar na solução.

1. Identifique e escreva a equação canônica da quádrica $2x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2yz + 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z - \frac{3}{8} = 0$.

   A matriz associada à forma quadrática da equação dada é: $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

   Os termos quadráticos serão equivalentes à matriz diagonal obtida através de $P^{-1}AP$. (Lembrar que a matriz P é composta pelos autovetores unitários). Os termos lineares serão obtidos da transformação $X = P\bar{X}$.

   Os autovetores (na forma unitária) associados à matriz A são $\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$$4\bar{x}^2 + 2\bar{y}^2 + 2\bar{z}^2 + \sqrt{2}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} = \frac{3}{8}$$

$$4\bar{x}^2 + 2\bar{y}^2 + 2\bar{z}^2 + \bar{y} + 2\bar{z} = \frac{3}{8}$$

   Completando quadrados,

$$4\bar{x}^2 + 2(\bar{y}^2 + \frac{1}{2}\bar{y} + \frac{1}{16}) + 2(\bar{z}^2 + \bar{z} + \frac{1}{4}) = 1$$

$$\frac{\bar{x}^2}{\frac{1}{4}} + \frac{(\bar{y} + \frac{1}{4})^2}{\frac{1}{2}} + \frac{(\bar{z} + \frac{1}{2})^2}{\frac{1}{2}} = 1$$

   A equação é de um elipsoide, onde $\begin{cases} \hat{x} = \bar{x} \\ \hat{y} = \bar{y} + \frac{1}{4} \\ \hat{z} = \bar{z} + \frac{1}{2} \end{cases}$.

2. Os pontos $(9, 10)$ e $(1, 4)$ são vértices de uma elipse. Sabendo que o valor do eixo menor é igual a $2b = 4$. Determine o centro, os vértices menores e o valor de c. Faça um desenho em XY.

   Resolução: Por dado $b = 2$. Observar que os vértices dados são os vértices maiores, pois $d(V_1, V_2) = \sqrt{(9-1)^2 + (10-4)^2} = \sqrt{100} = 10$. Assim $a = 5$.

   O centro é o ponto médio entre os vértices $C = (5, 7)$ e como $c^2 = a^2 - b^2$, então $c = \sqrt{21}$.

   O eixo focal passa pelos vértices com vetor direção $v = \frac{1}{5}(4, 3)$.

   Assim, os vértices menores: $B_1 = C - bv^{\perp} = (5, 7) - 2\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = \left(\frac{31}{5}, \frac{27}{5}\right)$ e $B_2 = \left(\frac{19}{5}, \frac{43}{5}\right)$.

3. Identifique a cônica $3(y^2+4y)+4x+6=0$. Se a cônica é uma elipse ou hipérbole determine os vértices e focos. Se for uma parábola determine o vértice V, o foco F e a reta diretriz.
Resolução:
$3(y^2+4y+4) = -4x-6+12 \Longleftrightarrow 3(y+2)^2 = 4\left(-x+\frac{3}{2}\right) \Longleftrightarrow (y+2)^2 = \frac{4}{3}\left(-x+\frac{3}{2}\right) \Longleftrightarrow \bar{x}^2 = \bar{y}$. É uma parábola.
Daqui $4p = \frac{4}{3} \Longleftrightarrow p = \frac{1}{3}$.
A forma canônica foi obtida com a transformação $\begin{cases} \bar{x} = y+2 \\ \bar{y} = -x+\frac{3}{2} \end{cases}$.
Utilizando as informações da forma canônica, obtemos os elementos da parábola:

Em $\bar{X}\bar{Y}$:	Em XY :
$\bar{V} = (0,0)$	$V = (\frac{3}{2}, -2)$
$\bar{F} = (0,p)$	$F = (\frac{7}{6}, -2)$
$\mathcal{L} : \bar{y}+p=0$	$x - \frac{11}{6} = 0$
Eixo de simetria: $\parallel \bar{Y}$	$\parallel X^-$

4. Determine os autovalores e os autovetores (se existem) da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.
Resolução:
$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Equação característica $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$,
então $(1-\lambda)^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda = 0$. Logo $\lambda = 0$ e $\lambda = 2$.
Para os autovetores se resolve $\begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$, então $x+y=0$, autovetor $v_1 = (1,-1)$.
$\begin{bmatrix} -1 & 1 & | & 0 \\ 1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$, então $x-y=0$, autovetor $v_2 = (1,1)$.