ZAB0161 - Álgebra linear com aplicações em geometria analítica

Nome do aluno:	NOTA:
Número USP:	**Prova P2 (EAN). Data: 05/06/2023**

Justifique as respostas. Colocar na prova toda conta necessária para chegar na solução.

1. Seja a transformação linear $T : P_2 \to \mathbb{R}^4$. São conhecidas três imagens:
   $T\left(2t^2\right) = (4,4,2,1)$, $T\left(1-t\right) = (1,1,4,2)$ e $T\left(5\right) = (5,5,6,3)$.
   Determine a fórmula da transformação linear T para um polinómio $p \in P_2$, e o núcleo de T.
   Resolução:
   Observar que os três polinómios, para os quais é conhecida a imagem, formam uma base em P_2: $\beta = \{2t^2, 1-t, 5\}$.
   Assim, todo polinómio $p(t) = at^2 + bt + c$ deve ter uma combinação linear única para β. Isto é

   $$at^2 + bt + c = c_1(2t^2) + c_2(1-t) + c_3(5).$$

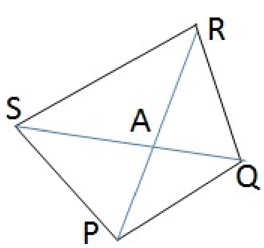
   Resolvendo $c_1 = \frac{1}{2}a$, $c_2 = -b$ e $c_3 = \frac{1}{5}(c+b)$. Logo

   $$\begin{aligned} T(p) &= \frac{1}{2}a\,(4,4,2,1) - b\,(1,1,4,2) + \frac{1}{5}(c+b)\,(5,5,6,3) \\ &= \left(2a + c, 2a + c, a - \frac{14}{5}b + \frac{6}{5}c, \frac{1}{2}a - \frac{7}{5}b + \frac{3}{5}c\right). \end{aligned}$$

   Para determinar o núcleo: $T(p) = (0,0,0,0)$, donde $c = -2a$ e $b = -\frac{1}{2}a$. Assim

   $$Ker(t) = \left\{a\left(t^2 - \frac{1}{2}t - 2\right) / \qquad a \in \mathbb{R}\right\}.$$

2. No trapézio $PQRS$ da figura, $\|RQ\| = \|SP\|$, $S = (0,2)$, $Q = (14,4)$, $PS \cdot PR = 0$ e $Proj_{QP}PR = (8,8)$.
   Determinar os pontos A, P, R e o vetor PR.



Resolução:
Os triângulos $\triangle RQS$ e $\triangle SPR$ são semelhantes, logo os seus ângulos correspondentes são iguais. Então, o ângulo RQS deve ser igual ao ângulo SPR.
O ângulo SPR é retângulo então RQS também, então RQ e QS são ortogonais, isto é, $QR \cdot QS = 0$.
Dessa equação podemos determinar uma relação entre as coordenadas de $R = (r_1, r_2)$, dado que os pontos S e Q são conhecidos:
$(R - Q) \cdot (S - Q) = 0$
$(r_1 - 14, r_2 - 4) \cdot (-14, -2) = 0$
$7r_1 + r_2 = 102$ ou $r_2 = 102 - 7r_1$.
Observar que $QP \| SR$, então $SR \| (1, 1)$,
isto significa que SR é um múltiplo do vetor $(1, 1)$, o que se escreve:
$SR = R - S = (r_1, r_2 - 2) = \beta(1, 1)$
igualando as componentes: $r_1 = \beta$ e $r_2 - 2 = \beta$, isto é: $r_1 = r_2 - 2$.
Substituindo a expressão anterior de r_2 temos: $r_1 = -6 + (74 - 7r_1)$ então $r_1 = \frac{17}{2}$ e $R = \left(\frac{25}{2}, \frac{29}{2}\right)$.
Para conhecer P: De 4., $(p_1 - 14, p_2 - 4) = \alpha(1, 1)$, daqui: $p_1 - 14 = p_2 - 4$, $p_1 = 10 + p_2$.
Temos $(-p_1, 2 - p_2) \cdot \left(\frac{25}{2} - p_1, \frac{29}{2} - p_2\right) = 0$
ou $(-10 - p_2, 2 - p_2) \cdot \left(\frac{5}{2} - p_2, \frac{29}{2} - p_2\right) = 0$
ou $2p_2^2 - 9p_2 + 4 = 0$, isto é $p_2 = 4$ e $p_2 = \frac{1}{2}$.
Observar que se $p_2 = 4$, então $\|SP\| = \sqrt{200} \neq \|RQ\|$, isto significa que não podemos utilizar o valor de 4 pois contradiz o item 2.
Em consequência utilizamos $p_2 = \frac{1}{2}$, logo $P = \left(\frac{21}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Daqui: $PR = (2, 14)$.
Para determinar A perceber que SA é paralelo a SQ, pois estão na mesma diagonal.
Por serem paralelos fazemos $SA = a(SQ)$, dai $A = S + a(SQ)$.
Também PA é paralelo a PR (na mesma diagonal), logo $PA = b(PR)$, isto é $A = P + b(PR)$.
De ambas igualdades para o ponto A temos $A = S + a(SQ) = P + b(PR)$.
Temos um sistema de duas equações com duas incognitas, resolvendo $b = \frac{7}{32}$.
Substituindo $A = \left(\frac{175}{16}, \frac{57}{16}\right)$.

3. Considere o conjunto $G \subset M_{2\times2}$, determinado por $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ tais que } a = 2b \text{ e } d = a - 3b \right\}$.
Determine se o conjunto G é um sub-espaço vetorial. Caso seja, encontre uma base de G. Caso não seja, informe a(s) propriedade(s) que não satisfaz.
Resolução:
Sabemos que $M_{2\times2} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \,/\, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ é espaço vetorial.
A pergunta é sobre o conjunto $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \,/\, a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } a = 2b \text{ e } d = a - 3b \right\} \subset M_{2\times2}$.
Assim $G = \left\{ \begin{bmatrix} 2b & b \\ c & -b \end{bmatrix} \,/\, b, c \in \mathbb{R} \right\}$
Verificando A1: Sejam $u, v \in G$ então $u + v \in G$.
Por serem elementos de G eles possuem quatro componentes e devem satisfazer a condição dada.
Então $u = \begin{bmatrix} 2b_u & b_u \\ c_u & -b_u \end{bmatrix}$ e $v = \begin{bmatrix} 2b_v & b_v \\ c_v & -b_v \end{bmatrix}$, portanto
$u + v = \begin{bmatrix} 2(b_u + b_v) & (b_u + b_v) \\ (c_u + c_v) & -(b_u + b_v) \end{bmatrix}$ o que verifica que a primeira casa é o dobro da segunda e a quarta casa é a inversa aditiva da segunda.
Em conclusão $u + v \in G$.
Verificando M1: Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ e dado $u \in C$ então $\alpha u \in C$.
$\alpha u = \alpha \begin{bmatrix} 2b_u & b_u \\ c_u & -b_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha 2b_u & \alpha b_u \\ \alpha c_u & -\alpha b_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(\alpha b_u) & (\alpha b_u) \\ (\alpha c_u) & -(\alpha b_u) \end{bmatrix}$. Donde a primeira casa é o dobro da segunda e a quarta é o inverso aditivo da segunda, isto é $\alpha u \in G$.
G **é sub-espaço vetorial**.

Para obter uma base: Se $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in G$ então $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b & b \\ c & -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b & b \\ 0 & -b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} =$ $b\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Assim $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ é gerador de G e é um conjunto L.I. β é uma base de G.

4. Sejam as retas $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$. Determine a equação geral do plano $\mathcal{P}$ que contêm as duas retas e do plano paralelo que dista $2\sqrt{3}$ unidades de $\mathcal{P}$. Sabendo que

$$\mathcal{L}_1 : \begin{cases} x = t + 2 \\ y = 3t + 1 \\ z = 2 - 4t \end{cases}$$

$$\mathcal{L}_2 : \frac{1-y}{2} = \frac{2-x}{1} = \frac{z-2}{3}.$$

Resolução:
Escrevendo as equações paramétricas da reta $\mathcal{L}_2$ temos

$$\mathcal{L}_2 : \begin{cases} x = 2 - s \\ y = 1 - 2s \\ z = 2 + 3s \end{cases} .$$

Assim temos um ponto de passagem do plano, o ponto $P_0 = (2, 1, 2)$.
Formamos o vetor normal ao plano, utilizando o produto vetorial dos dois vetores das retas $v = (1, 3, -4)$ e $w = (-1, -2, 3)$. O que dá $n = v \times w = (1, 1, 1)$.
A equação geral do plano é

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &: x + y + z = n \cdot P_0 \\ \mathcal{P} &: x + y + z = 5 \end{aligned}$$

Para conhecer o plano paralelo, observar que existem dois paralelos: um sobre e outro baixo o plano $\mathcal{P}$, chamaremos $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ respetivamente. Os três planos tem o mesmo vetor normal, pois são paralelos, basta encontrar um ponto de passagem $P_1 \in \mathcal{P}_1$ que diste $2\sqrt{3}$ unidades do ponto P_0 seguindo a direção do vetor normal n_u, que é o vetor unitário de n. Isto é:

$$P_1 = P_0 + 2\sqrt{3}n_u = (2, 1, 2) + (2, 2, 2) = (4, 3, 4).$$

Assim, tomando o negativo do n_u, temos $P_2 = (0, -1, 0)$. Logo, as equações dos planos paralelos são

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 &: x + y + z = 11 \\ \mathcal{P}_2 &: x + y + z = -1. \end{aligned}$$