ZAB0161 - Álgebra linear com aplicações em geometria analítica

Nome do aluno:	NOTA:
Número USP:	**Prova P2 (EAD). Data: 05/06/2023**

Justifique as respostas. Colocar na prova toda conta necessária para chegar na solução.

1. Seja a transformação linear $T : P_2 \rightarrow M_{2\times 1}$. São conhecidas três imagens:
$T\left(2t^2\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$, $T\left(1-t\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $T\left(5\right) = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$.
Determine o núcleo de T.
Determine a matriz da transformação linear T para uma base $\delta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ de $M_{2\times 1}$.

Resolução:
Observar que os três polinómios, para os quais é conhecida a imagem, formam uma base em P_2: $\beta = \{2t^2, 1-t, 5\}$.
Assim, todo polinómio $p(t) = at^2 + bt + c$ deve ter uma combinação linear única para β. Isto é

$$at^2 + bt + c = c_1(2t^2) + c_2(1-t) + c_3(5).$$

Resolvendo $c_1 = \frac{1}{2}a$, $c_2 = -b$ e $c_3 = \frac{1}{5}(c+b)$. Logo

$$\begin{aligned} T(p) &= \frac{1}{2}a \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} - b \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{5}(c+b) \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2a + c \\ a - \frac{4}{5}b + \frac{6}{5}c \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Para determinar o núcleo: $T(p) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, donde $c = -2a$ e $b = -\frac{7}{4}a$. Assim, os p tal que $T(p) = 0$ tem a forma $p(t) = at^2 - \frac{7}{4}at - 2a$. Logo

$$Ker(t) = \left\{ a\left(t^2 - \frac{7}{4}t - 2\right) / \qquad a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Para determinar a matriz, utiliza-se as imagens dadas (de base β) e devem ser formadas as colunas com as combinações lineares na base δ. Isto é

$$[T]_{\beta\delta} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 8 & 5 & 17 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{\beta\delta}.$$

2. Sejam duas retas $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ que se interceptam no primeiro quadrante no ponto M. As retas formam um ângulo de $\alpha = \frac{\pi}{4}$ no ponto M.
A reta $\mathcal{L}_1$ passa pelo ponto $N = (0, 8)$. A reta $\mathcal{L}_2$ passa pelo ponto $R = (r_1, 0)$ com $r_1 < 0$ e tem inclinação $m = 2$.
Sabendo que o vetor $RM + MN$ é paralelo ao vetor $(1, 4)$ determine: uma equação vetorial da reta $\mathcal{L}_1$ e uma equação geral da reta $\mathcal{L}_2$.
Resolução:
Como $RM + MN = RN = (-r_1, 8)$ e $RN \parallel (1, 4)$ temos $(-r_1, 8) = \beta(1, 4) = (\beta, 4\beta)$ então $8 = 4\beta$, logo $\beta = 2$, dai $r_1 = -2$, portanto $R = (-2, 0)$.
Considerando v como vetor de direção de $\mathcal{L}_2$ e pela dado da inclinação $m = 2 = \frac{v_2}{v_1}$. Como podemos tomar qualquer paralelo tomamos $v = (1, 2)$.
Como $\mathcal{L}_1$ forma α graus com $\mathcal{L}_2$, tomamos o vetor v e o seu ortogonal negativo (observar a posição das retas no esboço que deve fazer o aluno), se somamos temos o vetor de direção da bissetriz que é a reta $\mathcal{L}_1$. Logo $v + (-v^{\perp}) = (1, 2) + (2, -1) = (3, 1)$. Chamando por w ao vetor de direção de $\mathcal{L}_1$ escolhemos $w = (3, 1)$.
Agora aproveitamos da ortogonalidade construindo vetores pelos pontos de passagem e multiplicando (produto ponto) com os vetores ortogonais dos vetores de direção:
$v^{\perp} \cdot MR = 0 \Rightarrow (-2, 1) \cdot (-2 - m_1, -m_2) = 0 \Rightarrow 4 + 2m_1 - m_2 = 0.$
$w^{\perp} \cdot MN = 0 \Rightarrow (-1, 3) \cdot (-m_1, 8 - m_2) = 0 \Rightarrow m_1 - 3m_2 + 24 = 0.$
Resolvendo o sistema de equações temos $M = \frac{4}{5}(3, 11)$.
Como é conhecido o vetor ortogonal de $\mathcal{L}_1$, escrevemos primeiro a equação geral: $\mathcal{L}_1 : -x + 3y = 24$ então $\mathcal{L}_1 : P = (0, 8) + t(3, 1)$.
Conhecemos o vetor ortogonal e um ponto de passagem, então $\mathcal{L}_2 : -2x + y = 4$.

3. Considere o conjunto $G \subset \mathbb{R}^4$, determinado por $G = \{(x, y, z, w)$ tais que $x = 2y$ e $w = x - 3y\}$.
Determine se o conjunto G é um sub-espaço vetorial. Caso seja, encontre uma base de G. Caso não seja, informe a(s) propriedade(s) que não satisfaz.
Resolução:
Sabemos que $\mathbb{R}^4 = \{(x, y, z, w) \,/\, x, y, z, w \in \mathbb{R}\}$ é espaço vetorial.
A pergunta é sobre o conjunto $G = \{(x, y, z, w) \,/\, x, y, z, w \in \mathbb{R}$ e $x = 2y$ e $w = x - 3y\} \subset \mathbb{R}^4$.
Assim $G = \{(2y, y, z, -y) \,/\, x, y, z, w \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^4$
Verificando A1: Sejam $u, v \in G$ então $u + v \in G$.
Por serem elementos de G eles possuem quatro componentes e devem satisfazer a condição dada.
Então $u = (2y_u, y_u, z_u, -y_u)$ e $v = (2y_v, y_v, z_v, -y_v)$, portanto
$u + v = (2(y_u + y_v), y_u + y_v, z_u + z_v, -(y_u + y_v))$ o que verifica que a primeira componente é o dobro da segunda e a quarta componente é a inversa aditiva da segunda.
Em conclusão $u + v \in G$.
Verificando M1: Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ e dado $u \in C$ então $\alpha u \in C$.
$\alpha u = \alpha(2y_u, y_u, z_u, -y_u) = (\alpha 2y_u, \alpha y_u, \alpha z_u, -\alpha y_u) = (2(\alpha y_u), \alpha y_u, \alpha z_u, -(\alpha y_u)))$. Donde a primeira componente é o dobro da segunda e a quarta é o inverso aditivo da segunda, isot é $\alpha u \in G$.
G **é sub-espaço vetorial**.
Para obter uma base: Se $(x, y, z, w) \in G$ então $(x, y, z, w) = (2y, y, z, -y) = y(2, 1, 0, -1) + z(0, 0, 1, 0)$. Assim $\beta = \{(2, 1, 0, -1), (0, 0, 1, 0)\}$ é gerador de G e é um conjunto L.I. β é uma base de G.

4. Sejam os planos $\mathcal{P} : x + y + z = 3$ e $\bar{\mathcal{P}} : x + y - z = 2$. Determine as equações paramétricas da reta interseção $\mathcal{L} = \mathcal{P} \cap \bar{\mathcal{P}}$.
Determine também, as equações das duas retas paralelas a $\mathcal{L}$ que estão no plano $\mathcal{P}$ e equidistam $3\sqrt{6}$ unidades.
Resolução:
A reta interseção satisfaz
$$\mathcal{L} : \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y - z = 2 \end{cases} .$$
Assim, temos duas equações (pois a reta pertence aos dois planos) e três variáveis. Podemos considerar uma livre, observar que z não pode ser livre, dado que resolvendo para z obtemos $z = \frac{1}{2}$. Logo as equações

paramétricas da reta são

$$\mathcal{L}: \begin{cases} x = \frac{5}{2} - s \\ y = s \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Para determinar as retas paralelas a $\mathcal{L}$ em $\mathcal{P}$, podemos pegar um ponto de passagem da reta $\mathcal{L}$ e considerando um vetor ortogonal unitário v_u a essa reta, mas considerado sobre o plano, encontraremos um ponto afastado o tanto de unidades longe de $\mathcal{L}$. Seja o ponto $P_0 = (\frac{5}{2}, 0, \frac{1}{2})$ da reta $\mathcal{L}$. Um vetor de direção de $\mathcal{L}$ é $w = (-1, 1, 0)$. Um vetor ortogonal a $\mathcal{L}$ sobre o plano $\mathcal{P}$ se obtem com o produto vetorial do vetor normal a $\mathcal{P}$ (que é $n = (1, 1, 1)$) produto vetorial o vetor de direção de $\mathcal{L}$. Isto é

$$v = n \times w = (1, 1, 1) \times (-1, 1, 0) = (-1, -1, 2).$$

Onde $v_u = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -1, 2)$. Com isto obtemos um ponto no plano $\mathcal{P}$ que dista $3\sqrt{6}$ unidades do ponto P_0, fazendo

$$P_1 = P_0 + 3\sqrt{6}v_u = (\frac{5}{2}, 0, \frac{1}{2}) + (-3, -3, 6) = (-\frac{1}{2}, -3, \frac{13}{2}).$$

Considerando o negativo de v_u obtemos

$$P_1 = P_0 - 3\sqrt{6}v_u = (\frac{5}{2}, 0, \frac{1}{2}) + (3, 3, -6) = (\frac{11}{2}, 3, -\frac{11}{2}).$$

As retas paralelas tem o mesmo vetor de direção de $\mathcal{L}$, passando cada uma pelo ponto correspondente a distância $3\sqrt{6}$, isto é

$$\mathcal{L}_1: \begin{cases} x = -\frac{1}{2} - s \\ y = -3 + s \\ z = \frac{13}{2} \end{cases}$$

$$\mathcal{L}_2: \begin{cases} x = \frac{11}{2} - s \\ y = 3 + s \\ z = -\frac{11}{2} \end{cases}.$$