ZAB0161 - Álgebra linear com aplicações em geometria analítica

Nome do aluno:	NOTA:
Número USP:	**Prova P3 (EAN). Data: 10/07/2023**

Justifique as respostas. Colocar na prova toda conta necessária para chegar na solução.

1. Escreva os autovetores unitários e autoespaços da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$.

   Resposta: O polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda(-10 + \lambda)$. Resolvendo a equação característica obtemos os candidatos a autovalores $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 10$.

   Calculando os autovetores para cada λ, temos os autovetores $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, logo os autoespaços são $S_1 = \left\{ r \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} / r \in \mathbb{R} \right\}$ e $S_2 = \left\{ r \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} / r \in \mathbb{R} \right\}$

2. Uma cônica satisfaz a seguinte propriedade: é o conjunto de pontos $P = (x, y)$ cuja soma das distâncias a $F_1 = (-2, 0)$ e a $F_2 = (0, 0)$ é igual a 5. Determine a equação da cônica e os valores de a e c se for elipse ou hipérbole, ou o valor de p se for parábola.
   Resposta: É uma elipse cuja equação é $\mathcal{E} : \ \frac{(x+1)^2}{\frac{25}{4}} + \frac{y^2}{\frac{21}{4}} = 1$, dado que $a = \frac{5}{2}$, $c = 1$.

3. Diagonalize, se possível, a matriz A da forma quadrática $\frac{8}{3}z^2 + 4xy + 3y^2 + 2xz + 4yz$ (utilize a matriz simétrica). Também escreva a matriz de autovetores na forma ortonormal.
   Resposta: A matriz é

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & \frac{8}{3} \end{bmatrix}.$$

   Para diagonalizar encontramos os autovalores e autovetores. Resolvendo a equação característica $det(A - \lambda I) = 0$ temos $(\lambda + 1)(-3\lambda^2 + 20\lambda - 17) = 0$. Temos três candidatos a autovetores $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = \frac{17}{3}$.

   Determinando os autovetores correspondentes temos $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $v_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$. Verificamos que são ortogonais (verifique). Logo basta utilizar os autovetores unitários para construir a matriz P ortogonal, então a diagonalização será

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & \frac{8}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{14}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{3}{\sqrt{70}} \\ \frac{-2}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{6}{\sqrt{70}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{70}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{17}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{14}} & \frac{-2}{\sqrt{14}} & \frac{3}{\sqrt{14}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{3}{\sqrt{70}} & \frac{6}{\sqrt{70}} & \frac{5}{\sqrt{70}} \end{bmatrix}.$$

4. Identifique a cônica cuja equação quadrática é dada por

$$8y^2 + 5x^2 - 4xy + 4\sqrt{5}x = -4.$$

Caso seja elipse ou hipérbole forneça os valores de a, b. Caso seja parábola determine o valor de p.
Resolução: Representando na forma matricial como

$$X^T AX + BX = -4$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4\ \sqrt{5} & 0 \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico de A é

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 13\lambda + 36$$

logo os autovalores são $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 9$.
Para $\lambda_1 = 4$ determinam-se os autovetores associados: $X = \begin{bmatrix} 2a \\ a \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, então pode-se escolher $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.
Para $\lambda_2 = 9$ determinam-se os autovetores associados: $X = \begin{bmatrix} -b \\ 2b \end{bmatrix} = b\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, então pode-se escolher $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.
São vetores ortogonais, pois $v_1 \cdot v_2 = 0$. Agora normalizando (vetores unitários) temos

$$w_1 = \tfrac{1}{\|v_1\|}v_1 = \tfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad e \quad w_2 = \tfrac{1}{\|v_2\|}v_2 = \tfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Então a matriz ortogonal será

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

e

$$P^T AP = D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Como na equação temos parte linear utilizamos a mudança de variável (nova variável) $X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$, onde $X = PX'$, então substituindo na equação matricial X temos

$$X'^T DX' + BPX' = -4.$$

Calculando o produto $BP = \begin{bmatrix} 8 & -4 \end{bmatrix}$ e realizando os produtos das matrizes

$$4x'^2 + 9y'^2 + 8x' - 4y' = -4.$$

Fazendo completação de quadrados:

$$4(x'^2 + 2x') + 9(y'^2 - \frac{4}{9}y') = -4$$

$$4(x'^2 + 2x' + 1) + 9(y'^2 - \frac{4}{9}y' + \frac{4}{81}) = -4 + 4 + \frac{4}{9}$$

$$4(x' + 1)^2 + 9(y' - \frac{2}{9})^2 = \frac{4}{9}.$$

Por simplicidade realizamos uma segunda mudança de variáveis: $x'' = x' + 1$ e $y'' = y' - \frac{2}{9}$, então fica

$$4x''^2 + 9y''^2 = \frac{4}{9}$$

dividindo para ter 1 no segundo membro

$$\frac{x''^2}{\frac{1}{9}} + \frac{y''^2}{\frac{4}{81}} = 1.$$

É uma elipse onde $a = \frac{1}{3}$ e $b = \frac{2}{9}$.