ZAB0161 - Álgebra linear com aplicações em geometria analítica

Nome do aluno:	NOTA:
Número USP:	**Prova P1. Data: 24/04/2023**

Justifique as respostas.

1. No seguinte sistema há parâmetros α e β, eles representam uns coeficientes no beneficiamento dos grãos de café, que não foram identificados durante a produção. Sabendo a importância do sistema no processamento resolva o sistema e discuta as soluções em função dos valores adequados dos parâmetros.

$$\begin{cases} -2z + 5y + 2x = 20 \\ 2x - \beta + 6y = -\alpha z \\ 2x + 3z = 10 - 4y \end{cases} .$$

Nota: Na resolução deve utilizar o **método de Gauss-Jordan**.
Solução:
Se $a + 7 \neq 0$. Nesse caso existiria uma solução

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-30a-23b+480}{a+7} \\ \frac{10a+5b-80}{a+7} \\ \frac{b-30}{a+7} \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, quando $a + 7 = 0$, temos dois casos:
Se $b - 30 = 0$, tem-se $(a + 7)z = b - 30 \Longrightarrow 0z = 0 \Longrightarrow 0 = 0$. O que é uma verdadeiro sempre, para qualquer valor que se assuma para z. Assim existem infinitas soluções, da seguinte forma:

$$X = \begin{bmatrix} -15 - \frac{23}{2}z \\ 10 + 5z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -\frac{23}{2} \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Mas, se $b - 30 \neq 0$ tem-se $0z \neq 0$, que é falso para quaisquer valor de z, portanto não existem soluções para $b \neq 30$, quando $a = -7$.

2. Em um time de futebol, seu treinador anotou as probabilidades de seu time vencer, perder e empatar no jogo seguinte:

   (a) Após uma vitória: $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{3}{10}$ respectivamente;
   (b) Após de ser derrotado: $\frac{3}{10}, \frac{3}{10}, \frac{2}{5}$;
   (c) Após um empate: $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}$.

   - Se o time não melhorar nem piorar, conseguira mais vitorias que derrotas a longo prazo ?

- Determine a matriz de transição que corresponde e calcule o estado estacionário (se existir).
  Solução: a matriz de transição é
$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}.$$
  O estado estacionário é
$$E = \begin{bmatrix} vencer \\ perder \\ empatar \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{26}{79} \\ \frac{24}{79} \\ \frac{29}{79} \end{bmatrix}.$$
  Portanto, se não piorar conseguirá mais vitorias do que derrotas.

3. Em uma cidade do interior existem três indústrias primárias. Uma mina de cobre que para produzir R$ 1.00 de cobre consome R$ 0.20 de cobre, R$ 0.10 de transporte e R$ 0.20 de energia elétrica. Uma estrada de ferro que para produzir R$ 1.00 de transporte, requer R$ 0.10 de cobre, R$ 0.10 de transporte e R$ 0.40 de energia elétrica. Uma planta geradora de energia elétrica que para produzir R$ 1.00 de energia elétrica consome R$ 0.20 de cobre, R$ 0.30 de energia elétrica e R$ 0.20 de transporte. Para o presente ano, as indústrias têm uma demanda externa de R$ 1.2 milhões de cobre, R$ 0.80 milhões de transporte e R$ 1.5 milhões de energia elétrica.

   (a) Monte um sistema de equações que possibilite resolver quanto cada indústria deve produzir para atender as demandas
   Solução: Para determinar as incôgnitas do problema, sabemos que é conhecida a produção de cada indústria em valor de 1.00 real de cada produto. Então, denotamos por x a quantidade de frações de cobre em valor de R$ 1.00, y a quantidade de frações de transporte em valor de R$ 1.00 e z a quantidade de frações de energia elétrica em valor de R$ 1.00 .
   Agora, para atender a demanda externa das três indústrias, elas precisam atender a demanda (interna) entre elas. Caso contrário por exemplo, se a mina de cobre não abastece a estrada de ferro de cobre, ela não poderá produzir o transporte solicitado, e a própria mina precisa de cobre para produzir mais cobre. Logo,
$$\begin{cases} x = 1200000 + 0.2x + 0.10y + 0.20z \\ y = 800000 + 0.10x + 0.10y + 0.20z \\ z = 1500000 + 0.20x + 0.40y + 0.30z \end{cases}$$
   O sistema a ser resolvido é
$$\begin{cases} 0.8x - 0.10y - 0.20z = 1200000 \\ 0.90y - 0.10x - 0.20z = 800000 \\ 0.70z - 0.20x - 0.40y = 1500000 \end{cases}$$

   (b) Determine a matriz inversa da matriz de coeficientes obtida na parte (a).
   Solução: A inversa de A, A^{-1}, é
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{10}{7} & \frac{30}{77} & \frac{40}{77} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{104}{77} & \frac{36}{77} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{7} & \frac{68}{77} & \frac{142}{77} \end{bmatrix}.$$

4. Na formulação de ração das diversas espécies animais, a procedência dos ingredientes é de extrema importância já que pode haver alterações na quantidade de determinandos nutrientes. Para tanto, fez-se uma análise de três ingredientes coletados de duas fábricas (A e B) localizadas em diferentes regiões do estado de São Paulo.
$$A = \begin{bmatrix} 6.5 & 0.2 & 0.6 \\ 2.3 & 1.2 & 0.0 \\ 4.2 & 1.0 & 1.6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1.2 & 1.2 & 5.0 \\ 0.35 & 0.2 & 4.0 \\ 0.7 & 0.15 & 2.7 \end{bmatrix}$$
   OBS: Na matriz A, sabe-se que os elementos das linhas representam os ingredientes (Caroço de algodão

(Alg), Calcário calcitico (Ca) e Milho (Mil)) e os elementos das colunas os nutrientes (gordura, cálcio e fósforo) em gramas do nutriente/para cada 100g do ingrediente. Na matriz B tem-se os mesmos ingredientes só que agora em coluna e os mesmos nutrientes em linha.
Sabendo que a matriz de consumo dos pets (em gramas) é

$$P = \begin{array}{c} \\ Pet1 \\ Pet2 \\ Pet3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Mil & Alg & Ca \end{array} \\ \begin{bmatrix} 250 & 400 & 250 \\ 200 & 380 & 150 \\ 300 & 200 & 30 \end{bmatrix} \end{array}$$

Determine utilizando **operações de matrizes**. E a partir das matrizes resultantes responda:
a) Qual a quantidade de gordura, cálcio e fósforo consumido pelo Pet2 sabendo que as rações foram elaboradas com os ingredientes da fábrica A?
b) Qual a quantidade de gordura, cálcio e fósforo consumido pelos Pet1 e Pet3 sabendo que as rações foram elaboradas com os ingredientes da fábrica B?
Resolução:
a) Considerando a matriz A, para conhecer os nutrientes, se pode multiplicar a matriz P vezes a matriz A, mas devem ser adequados os dados. Considerar uma matriz Q com troca de colunas da matriz P para que as colunas da Q coincidam com as linhas de A.

$$Q = \begin{array}{c} \\ Pet1 \\ Pet2 \\ Pet3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Alg & Ca & Mil \end{array} \\ \begin{bmatrix} 400 & 250 & 250 \\ 380 & 150 & 200 \\ 200 & 30 & 300 \end{bmatrix} \end{array}$$

Por outro lado, como a informação na matriz A e B são gramas por cada 100 gramas de ingrediente, precisamos compatibilizar as unidades, logo a matriz Q é transformada a informação de gramas para grupos de 100 gramas. Assim:

$$Q = \begin{array}{c} \\ Pet1 \\ Pet2 \\ Pet3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Alg & Ca & Mil \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4.0 & 2.5 & 2.5 \\ 3.8 & 1.5 & 2.0 \\ 2.0 & 0.30 & 3.0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Então se multiplicam as matrizes para responder.

$$QA = \begin{array}{c} \\ Pet1 \\ Pet2 \\ Pet3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Alg & Ca & Mil \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4.0 & 2.5 & 2.5 \\ 3.8 & 1.5 & 2.0 \\ 2.0 & 0.30 & 3.0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ Alg \\ Ca \\ Mil \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Gord & Cal & Fós \end{array} \\ \begin{bmatrix} 6.5 & 0.2 & 0.6 \\ 2.3 & 1.2 & 0.0 \\ 4.2 & 1.0 & 1.6 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$QA = \begin{array}{c} \\ Pet1 \\ Pet2 \\ Pet3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Gord & Cal & Fós \end{array} \\ \begin{bmatrix} 42.25 & 6.30 & 6.40 \\ 36.55 & 4.56 & 5.48 \\ 26.29 & 3.76 & 6.00 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ Pet1 \\ Pet2 \\ Pet3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Gord & Cal & Fós \end{array} \\ \begin{bmatrix} 169/4 & 63/10 & 32/5 \\ 731/20 & 114/25 & 137/25 \\ 2629/100 & 94/25 & 6.00 \end{bmatrix} \end{array}$$

b) Considerando a matriz B, observar que pode ser feito como a)), mas deve ser considerada a transposta de matriz B, para que as linhas de B coincidam com as colunas de Q. Então

$$QB^t = \begin{array}{c} \\ Pet1 \\ Pet2 \\ Pet3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Alg & Ca & Mil \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4.0 & 2.5 & 2.5 \\ 3.8 & 1.5 & 2.0 \\ 2.0 & 0.30 & 3.0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ Alg \\ Ca \\ Mil \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Gord & Cal & Fós \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1.2 & 0.35 & 0.7 \\ 1.2 & 0.2 & 0.15 \\ 5.0 & 4.0 & 2.7 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$QA = \begin{array}{c} \\ Pet1 \\ Pet2 \\ Pet3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Gord & Cal & Fós \end{array} \\ \begin{bmatrix} 20.30 & 11.90 & 9.925 \\ 16.36 & 9.63 & 8.285 \\ 17.76 & 12.76 & 9.545 \end{bmatrix} \end{array}$$