ZAB0161 - Álgebra linear com aplicações em geometria analítica

Nome do aluno:	NOTA:
Número USP:	**Prova P2 (EB). Data: 01/06/2023**

Justifique as respostas. Colocar na prova toda conta necessária para chegar na solução.

1. Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} + I$$

I é a matriz identidade de ordem 3×3. Resolva o sistema homegéneo $AX = 0$. O conjunto solução é um espaço vetorial. Determine uma base e a dimensão do conjunto solução.
Resolução:
O conjunto solução é $S = \left\{ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} / \quad z \in \mathbb{R} \right\}$.
Assim uma base é $\beta = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, logo o espaço é de dimensão 1.

2. Seja a transformação linear $T : P_2 \to P_1$. São conhecidas três imagens:
$T\left(2t^2\right) = 4t + 2$, $T\left(1 - t\right) = t + 1$ e $T\left(5\right) = t - 2$.
Determine a fórmula da transformação linear $T(p)$ para um polinómio $p \in P_2$.
E determine a matriz da transformação $[T]_{\delta\beta}$ para as bases $\beta = \left\{1 - t, 5, 2t^2\right\}$ e $\delta = \{t + 1, t - 1\}$.
Resolução:
Observar que conhecemos as imagens dos elementos da base do espaço de partida $U = P_2$.
Se $p \in P_2$, ele se escreve $p(t) = at^2 + bt + c$ deve ter uma combinação linear única para β. Isto é

$$at^2 + bt + c = c_1(1 - t) + c_2(5) + c_3(2t^2).$$

Resolvendo $c_1 = -b$, $c_2 = \frac{1}{5}(c + b)$ e $c_3 = \frac{1}{2}a$. Logo

$$\begin{aligned} T(p) &= -b(t + 1) + \frac{1}{5}(c + b)(t - 2) + \frac{1}{2}a(4t + 2) \\ &= \frac{1}{5}\left[(10a - 4b + c)\, t + (5a - 7b - 2c)\right]. \end{aligned}$$

Essa é a fórmula da transformação T que transforma um polinomio quadrático em um polinómio linear.
Para determinar a matriz da transformação T, se precisa das imagens como combinação linear da base δ:

$$T(\beta_1) = T(1 - t) = t + 1 = c_1\delta_1 + c_2\delta_2 = c_1(t + 1) + c_2(t - 1) = (c_1 + c_2)t + (c_1 - c_2).$$

Resolvendo: $[T(\beta_1)] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_\delta$.
Idem para $T(\beta_2)$ e $T(\beta_3)$, se monta a matriz da transformação

$$[T]_{\delta\beta} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}_{\delta\beta}.$$

3. Sejam duas retas $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ que se interceptam no primeiro quadrante no ponto M. As retas formam um ângulo de $\alpha = \frac{\pi}{4}$ no ponto M. A reta $\mathcal{L}_1$ passa pelo ponto $N = (0, 10)$ e tem inclinação negativa. A reta $\mathcal{L}_2$ passa pelo ponto $R = (r_1, 0)$ com $r_1 < 0$ e tem inclinação $m = 3$.
Sabendo que o vetor $RM + MN$ é paralelo ao vetor $(1, 5)$ determine: uma equação vetorial da reta $\mathcal{L}_1$ e uma equação geral da reta $\mathcal{L}_2$.
Resolução:
Como $RM + MN = RN = (-r_1, n)$ e $RN \parallel (1, 5)$ temos $(-r_1, 10) = \beta(1, 5) = (\beta, 5\beta)$ então $10 = 5\beta$, logo $\beta = 2$, dai $r_1 = -\beta$, portanto $R = (-2, 0)$.
Considerando v como vetor de direção de $\mathcal{L}_2$ e pelo dado da inclinação $m = 3 = \frac{v_2}{v_1}$. Como podemos tomar qualquer paralelo tomamos $v = (1, 3)$.
Como $\mathcal{L}_1$ forma α graus com $\mathcal{L}_2$, tomamos o vetor v e o seu ortogonal $v^\perp$ (ambos de igual medida), se somamos temos o vetor de direção da bissetriz que é a reta $\mathcal{L}_1$. Logo $v + (v^\perp) = (1, 3) + (-3, 1) = (-2, 4) = 2(-1, 2)$.
Chamando por w ao vetor de direção de $\mathcal{L}_1$ escolhemos $w = (-1, 2)$.
Para conhecer M, vemos que RM é paralelo a v, ou ortogonal a $v^\perp$:
$v^\perp \cdot MR = 0 \Rightarrow (-3, 1) \cdot (-2 - m_1, -m_2) = 0 \Rightarrow 6 + 3m_1 - m_2 = 0.$
e também MN deve ser paralelo a w, ou ortogonal a $w^\perp$:
$w^\perp \cdot MN = 0 \Rightarrow (-2, -1) \cdot (-m_1, 10 - m_2) = 0 \Rightarrow 2m_1 - 10 + m_2 = 0.$
Resolvendo o sistema de equações temos $M = \left(\frac{4}{5}, \frac{42}{5}\right) = (0.80, 8.40)$.
Então a equação vetorial de $\mathcal{L}_1$ é $\mathcal{L}_1 : P = (0, 10) + t(-1, 2)$.
E para a segunda reta damos a equação geral $\mathcal{L}_2 : -3x + y = 6$.

4. Sejam as retas $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$. Determine a equação geral do plano $\mathcal{P}$ que contêm as duas retas e do plano paralelo que dista $\sqrt{3}$ unidades de $\mathcal{P}$. Sabendo que

$$\mathcal{L}_1 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 3t \\ z = 2 - 4t \end{cases}$$

$$\mathcal{L}_2 : \frac{2 - x}{1} = \frac{1 - y}{2} = \frac{z - 2}{3}.$$

Resolução:
Escrevendo as equações paramétricas da reta $\mathcal{L}_2$ temos

$$\mathcal{L}_2 : \begin{cases} x = 2 - s \\ y = 1 - 2s \\ z = 2 + 3s \end{cases}.$$

Assim temos um ponto de passagem do plano, o ponto $P_0 = (2, 1, 2)$.
Formamos o vetor normal ao plano, utilizando o produto vetorial dos dois vetores das retas $v = (1, 3, -4)$ e $w = (-1, -2, 3)$. O que dá $n = v \times w = (1, 1, 1)$.
A equação geral do plano é

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &: x + y + z = n \cdot P_0 \\ \mathcal{P} &: x + y + z = 5 \end{aligned}$$

Para conhecer o plano paralelo, observar que existem dois paralelos: um sobre e outro baixo o plano $\mathcal{P}$, chamaremos $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ respetivamente. Os três planos tem o mesmo vetor normal, pois são paralelos, basta encontrar um ponto de passagem $P_1 \in \mathcal{P}_1$ que diste $\sqrt{3}$ unidades do ponto P_0 seguindo a direção do vetor normal n_u, que é o vetor unitário de n. Isto é:

$$P_1 = P_0 + \sqrt{3} n_u = (2, 1, 2) + (1, 1, 1) = (3, 2, 3).$$

Assim, tomando o negativo do n_u, temos $P_2 = (1, 0, 1)$. Logo, as equações dos planos paralelos são

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 &: \quad x + y + z = 8 \\ \mathcal{P}_2 &: \quad x + y + z = 2 \end{aligned}$$