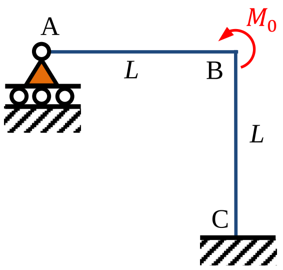
ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Departamento de Engenharia Mecânica

Q1: __________
Q2: __________
Nota: ________

PME3211 – Mecânica dos Sólidos II – Prova Substitutiva – 20/12/2023
Duração: 100 minutos

Nome: ____________________________________ N.USP: _________ Turma:___ Assinatura: __________________

<u>1ª Questão</u> <u>(5,0 pontos)</u>



A estrutura ABC da figura está contida em um plano vertical e é formada pelas barras AB e BC, ambas de comprimento L, rigidez flexional EI e peso próprio desprezível. Pede-se:

a) As reações de apoio;

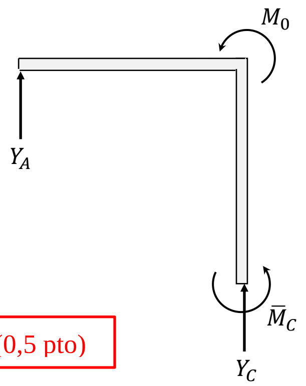
b) O deslocamento horizontal em A.

Nota: Despreze a contribuição das forças cortantes e das forças normais no cálculo da energia complementar do sistema.

<u>Resolução:</u>

a)

DCL



(0,5 pto)

Equilíbrio:

$$\Sigma F_V = 0 \Rightarrow Y_A + Y_C = 0$$

$$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow -Y_A L + M_0 + \bar{M}_C = 0$$

Três incógnitas e duas equações $\Rightarrow g = 1$ (0,5 pto)

Vou escolher Y_A como incógnita hiperestática.

Pelo Teorema da Energia Complementar Mínima:

$$\frac{\partial U^*}{\partial Y_A} = 0$$ (0,5 pto)

$$\Rightarrow \int_0^L M_{AB}(x)\frac{\partial M_{AB}}{\partial Y_A}dx + \int_0^L M_{BC}(x)\frac{\partial M_{BC}}{\partial Y_A}dx = 0$$

$$M_{AB}(x) = Y_A x \qquad \frac{\partial M_{AB}}{\partial Y_A} = x$$

$$M_{BC}(x) = Y_A L - M_0 \qquad \frac{\partial M_{BC}}{\partial Y_A} = L$$

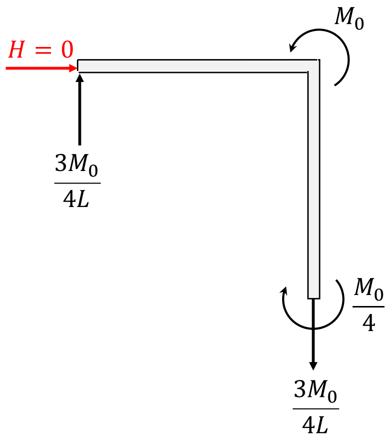
$$\Rightarrow \int_0^L Y_A x^2 dx + \int_0^L (Y_A L - M_0)L dx = 0$$

$$\Rightarrow Y_A = \frac{3}{4}\frac{M_0}{L}$$ (1,0 pto)

As outras reações vêm das equações de equilíbrio:

$$Y_C = -\frac{3}{4}\frac{M_0}{L} \qquad \bar{M}_C = -\frac{M_0}{4}$$ (0,5 pto)

Assim, o *DCL* com os valores e sentidos corretos das reações fica:



(onde foi adicionada uma força horizontal fictícia $H = 0$ para ser usada no próximo item)

b) Pelo Teorema de Crotti-Engesser:

$$\delta = \left(\frac{\partial U^*}{\partial H}\right)_{H=0}$$ (0,5 pto)

$$\Rightarrow \delta = \frac{1}{EI}\int_0^L M_{AB}(x)\frac{\partial M_{AB}}{\partial H}dx + \int_0^L M_{BC}(x)\frac{\partial M_{BC}}{\partial H}dx$$

$$M_{AB}(x) = \frac{3}{4}\frac{M_0}{L}x \qquad \frac{\partial M_{AB}}{\partial H} = 0$$

$$M_{BC} = -\frac{1}{4}M_0 + Hx \qquad \frac{\partial M_{BC}}{\partial H} = x$$ (1,0 pto)

$$\Rightarrow \delta = -\frac{1}{EI}\int_0^L \frac{1}{4}M_0 x dx$$

$$\Rightarrow \delta = -\frac{M_0 L^2}{8EI}$$ (0,5 pto)

(o sinal negativo indica que o deslocamento ocorre no sentido contrário ao da força fictícia *H*, ou seja, da direita para a esquerda).

2ª Questão (5,0 pontos)

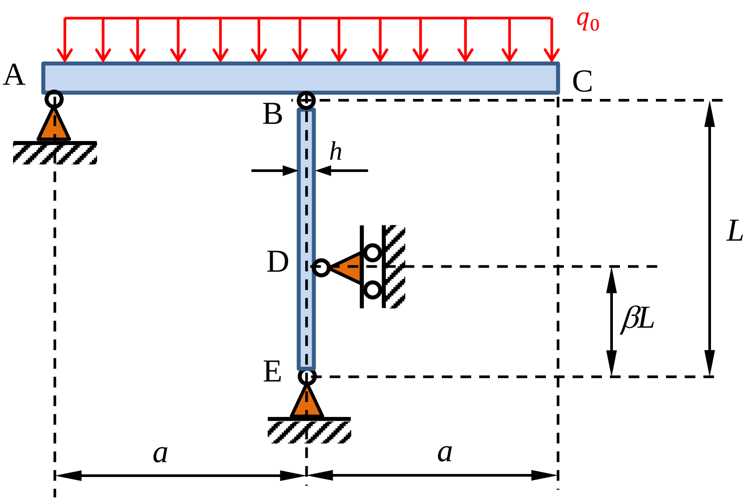
A estrutura indicada na figura consiste em uma viga horizontal ABC rígida (indeformável), de comprimento $2a$ e simplesmente apoiada em A e em B, e que suporta um carregamento uniformemente distribuído de intensidade q_0. A coluna BDE, de comprimento total L está simplesmente apoiada em B e E, e possui também um terceiro ponto de apoio no ponto em D (a uma distância βL de E). Considere que a coluna possua seção retangular de base b (ortogonal ao plano da figura) e altura h (no plano da figura) e seja feita de um material elástico-linear (com módulo de elasticidade E e com tensão limite de proporcionalidade σ_p). Para os dados numéricos indicados abaixo, determine:

a) Os valores mínimos do comprimento L para que a flambagem ocorra no regime elástico-linear do material nos seguintes casos: i) $\beta = 0$, ii) $\beta = 0{,}5$ e iii) $\beta = 0{,}01$. Justifique suas respostas em cada caso!;

b) O coeficiente de segurança com relação à flambagem para o caso em que $\beta = 0{,}5$ e $L = 2{,}5L_{min}$.

Obs: Considere ainda que a flambagem possa ocorrer apenas no plano da figura!!

Dados: $a = 2$ m, $E = 200GPa$, $\sigma_p = 200MPa$, $b = 120mm$, $h = 30mm$, $q_0 = 2\ kN/m$.



Resolução:

a) Para que a flambagem ocorra no regime elástico-linear do material devemos ter:

$$\sigma = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{L_{ef}^2 A} \le \sigma_p$$

O que leva a:

$$L_{ef} \ge \pi \left(\frac{E}{\sigma_p}\frac{I}{A}\right)^{1/2}$$

No caso da seção retangular indicada:

$$I = \frac{bh^3}{12}, \quad A = bh$$

Logo:

(1,0 pto)

$$L_{ef} \ge \pi h \left(\frac{E}{12\sigma_p}\right)^{1/2}$$

Numericamente:

$$L_{ef} \geq 30\pi \left(\frac{2 \times 10^5 MPa}{12 \times 200\ MPa} \right)^{\frac{1}{2}} mm\ \cong 860\ mm$$

$$\therefore \quad L_{ef,mín} \cong 860mm$$

Assim:

- No caso (i): temos uma viga biapoiada ($L_{ef} = L$). Logo: (1,0 pto)

$$L_{mín} = L_{ef,min} = 860\ mm$$

- No caso (ii): temos uma viga cujo comprimento efetivo será $L_{ef} = L/2$. Logo: (1,0 pto)

$$\mathrm{L_{mín}} = 2\mathrm{L_{ef,mín}} \cong 1720\ \mathrm{mm}$$

- No caso (iii): temos praticamente uma viga engastada na base e apoiada no topo, e, portanto, com comprimento efetivo de flambagem próximo a $L_{ef} = 0{,}699L$. Logo: (1,0 pto)

$$\mathrm{L_{mín}} = \frac{\mathrm{L_{ef,mín}}}{0{,}699} \cong 1230\ \mathrm{mm}$$

b) Neste caso, teremos:

$$L \cong 2{,}5\mathrm{L_{mín}} = 2{,}5 \times 1720\mathrm{mm} \cong 4300\ mm$$

$$L_{ef} = \frac{L}{2} \cong 2150\ mm$$

A carga de compressão sobre a coluna será tal que:

$$Pa = 2q_0a^2 \quad \Leftrightarrow \quad P = 2q_0a = 8\ kN$$

E o coeficiente de segurança em relação à flambagem será:

$$n = \frac{P_{cr}}{P} = \frac{\pi^2 EI}{L_{ef}^2 P} = \frac{\pi^2 Ebh^3}{12L_{ef}^2 P} = \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{Ebh}{P}\right)\left(\frac{h}{L_{ef}}\right)^2$$

Resultando: (1,0 pto)

$$n = \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{2 \times 10^5 \times 3{,}6 \times 10^3}{8 \times 10^3}\right)\left(\frac{30}{2150}\right)^2 \cong 14{,}4$$

(Folha Adicional)