



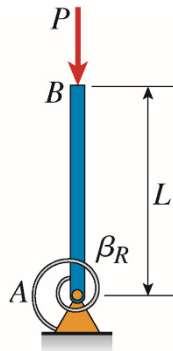
PME-3211 - Mecânica dos Sólidos II

8ª Lista de Exercícios – Estabilidade Estrutural

PARTE I: Exercícios do Livro-Texto (Cap.11)

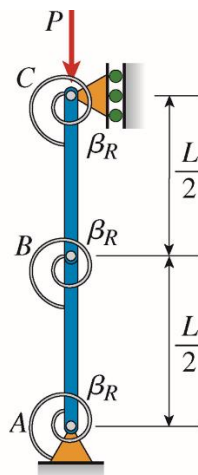
11.2-1. A figura mostra uma estrutura idealizada consistindo em uma barra rígida AB, de comprimento L , vinculada a um pino e a uma mola torcional linear de constante β_R na extremidade inferior. Determine a carga crítica da estrutura.

Resp: $P_{cr} = \beta_R/L$



11.2-3. A figura mostra uma estrutura idealizada consistindo em duas barras rígidas, AB e BC, de comprimento $L/2$, vinculadas por pinos e molas torcionais lineares de constante β_R . Determine a carga crítica da estrutura.

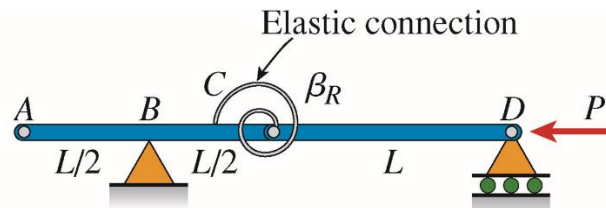
Resp: $P_{cr} = 6 \beta_R/L$





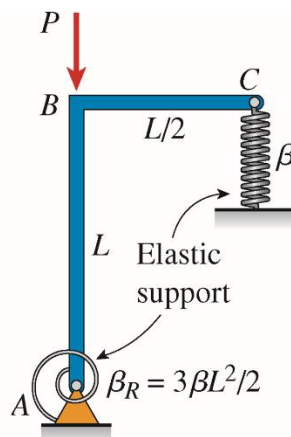
11.2-5. A figura mostra uma estrutura idealizada consistindo de duas barras rígidas, de comprimento L , vinculadas por um pino e a uma mola torcional linear de constante β_R em C. Determine a carga crítica da estrutura.

Resp: $P_{cr} = 3\beta_R/L$



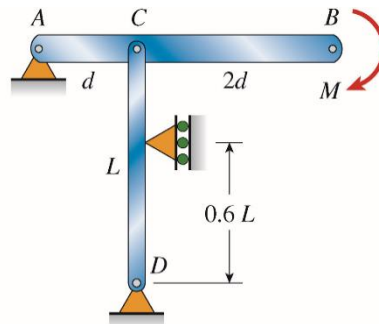
11.2-7. A figura mostra uma estrutura idealizada consistindo em uma estrutura rígida ABC em forma de L, apoiada por uma mola elástica linear (de constante β), em C, e vinculada a uma mola torcional linear de constante $\beta_R = 3\beta L^2/2$ em A. Determine a carga crítica da estrutura.

Resp: $P_{cr} = 7\beta L/4$



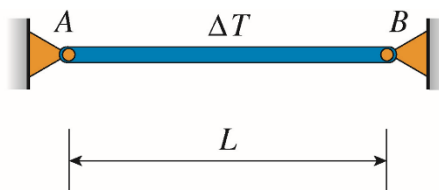
11.3-4. Uma viga horizontal AB está apoiada por um pino na extremidade A e suporta um momento M na extremidade B, aplicado no sentido horário. A viga é apoiada também em C por uma coluna de extremidade pinada em D e de comprimento L . Esta coluna é restrita lateralmente a $0,6L$ da base em D, como indicado na figura. A coluna é uma barra de aço ($E = 200$ GPa) sólida de seção transversal quadrada de largura b . Determine o momento admissível considerando que o fator de segurança em relação à flambagem da coluna é $n = 2,0$. Dados: $L = 2,4$ m, $d = L/2 = 1,2$ m, $b = 70$ mm.

Resp: $M_{adm} = 1143$ kN.m



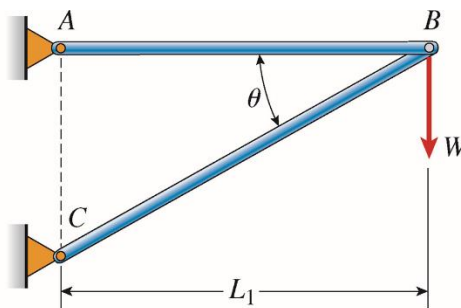
11.3-8. Uma barra delgada AB com extremidades apoiadas por pinos e comprimento L está apoiada entre superfícies imóveis. Qual aumento ΔT na temperatura da barra produzirá flambagem? (considere válida teoria de Euler). Dados: I (menor momento de inércia da seção transversal), A (área da seção transversal), α (coeficiente de dilatação térmica linear do material).

Resp: $\Delta T = \pi^2 I / \alpha A L^2$



11.3-18. Uma treliça ABC sustenta a carga W na junta B, como mostrado na figura. O comprimento L_1 do membro AB é fixo, mas o comprimento do esteio BC varia conforme o ângulo θ é modificado. A barra BC tem uma seção transversal circular sólida. A junta B é restrita contra deslocamento perpendicular ao plano da treliça. Admitindo que o colapso ocorra pela flambagem de Euler da barra BC, determine o ângulo θ para o peso mínimo da barra.

Resp: $\theta = 26,57^\circ$

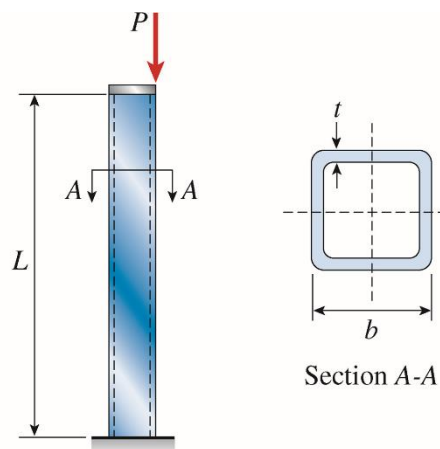




11.5-10. Uma coluna vazada de alumínio, de seção transversal quadrada, está engastada na base e livre no topo (vide figura). A dimensão externa (b) de cada lado é de 100 mm e a espessura (t) da parede é de 8 mm. A resultante dos carregamentos de compressão agindo no topo da coluna é uma força $P = 50$ kN agindo na aresta externa no ponto médio de um lado. Considerando que a deflexão no topo não deve exceder 30 mm, determine o maior comprimento permitido ($L_{máx}$) da coluna.

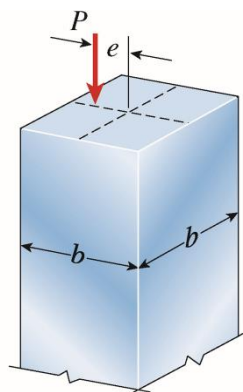
Dado: $E = 73$ GPa.

Resp: $L_{máx} = 2,21$ m



11.6-3. Uma barra de alumínio quadrada com extremidades apoiadas por pinos suporta um carregamento $P = 120$ kN agindo a uma distância $e = 50$ mm do centro (vide figura). A barra tem comprimento $L = 1,5$ m e módulo de elasticidade $E = 70$ GPa. Se a tensão na barra não deve exceder 42 MPa, qual é a largura mínima permitida ($b_{mín}$) da barra?

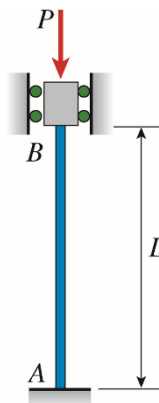
Resp: 106,3 mm





PARTE II: Exercícios Complementares

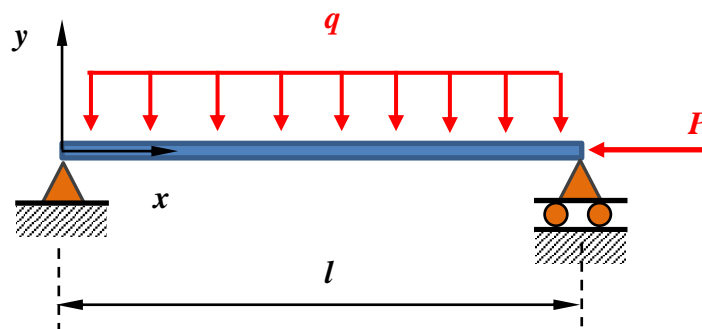
1) Determine as duas primeiras cargas críticas de flambagem (autovalores) e os respectivos modos de flambagem (autovetores) para a barra AB de comprimento L e rigidez flexional EI indicada abaixo. Esboce os dois modos de flambagem obtidos. Dados: EI, L .



2) Mostre, utilizando a teoria de 2ª ordem, que a expressão da linha elástica da viga-coluna indicada abaixo (comprimento l e rigidez flexional EI) quando submetida a um carregamento uniformemente distribuído de intensidade q e a forças de compressão de intensidade P é dada por:

$$v(x) = -\frac{q}{k^4 EI} \left[\tan\left(\frac{kL}{2}\right) \text{sen}(kx) + \cos(kx) + \frac{(kx)^2}{2} - \left(\frac{kL}{2}\right)(kx) - 1 \right]$$

onde: $k = \sqrt{P/EI}$ (observe o caráter não-linear entre os deslocamentos transversais $v(x)$ e a força P).





3) Utilizando o resultado do problema 2, mostre que o deslocamento transversal em $x = l/2$ é dado por:

$$\delta = v(l/2) = \frac{q l^4}{32 \cdot EI} \left[\frac{2 \cdot \sec(u) - u^2 - 2}{u^4} \right], \text{ onde } u = \frac{k l}{2}$$

Mostre então que:

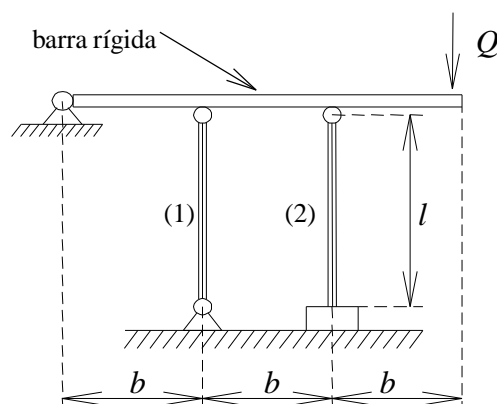
- a expressão do deslocamento δ dado acima recupera assintoticamente o deslocamento devido apenas ao carregamento uniformemente distribuído no limite para $P \rightarrow 0$;
- é possível determinarmos a carga crítica de flambagem através da análise da expressão acima, notando, por exemplo, que, quando $u \rightarrow \frac{\pi}{2}$, teremos $\delta \rightarrow \infty$, ou seja, o deslocamento torna-se indeterminado a medida em que P se aproxima da carga crítica. (Obs: o mesmo resultado seria obtido se analisássemos o deslocamento em outro ponto da viga, a não ser, é claro, nas extremidades).

4) O sistema indicado abaixo é formado por uma viga rígida (“indeformável”) conectada a duas colunas: a coluna (1) é biarticulada nas duas extremidades, enquanto a coluna (2) é engastada na base e articulada no topo. As colunas são feitas de aço estrutural cujas propriedades são dadas abaixo. Pretende-se utilizar o mesmo perfil (tubular) para as duas colunas. Considerando que o diâmetro externo das colunas é $d = 50$ mm, determine qual deve ser a espessura utilizada para que o coeficiente de segurança com relação à estabilidade do sistema (como um todo) seja igual a 2 para o carregamento indicado na figura.

Dados do material: $E = 200$ GPa, $\sigma_p = 210$ MPa, $\sigma_e = 240$ MPa

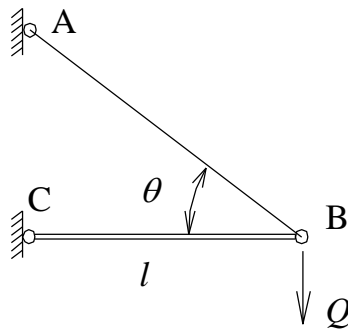
Dados geométricos: $l = 2500$ mm, $b = 1500$ mm, $d = 50$ mm (diâmetro externo das colunas)

Dados do carregamento: $Q = 50$ kN





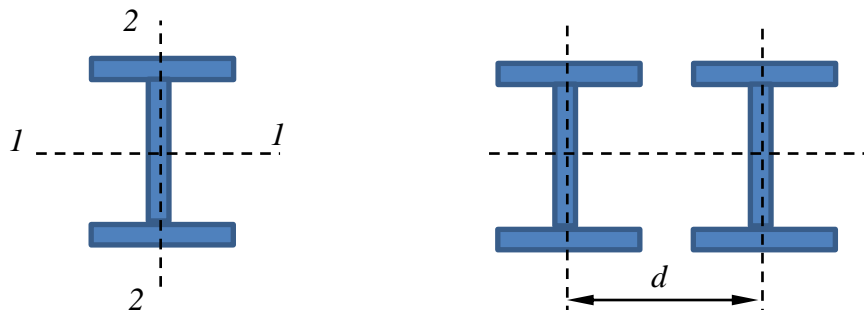
5) A figura abaixo mostra uma barra horizontal BC, de diâmetro $D = 50,8$ mm e módulo de elasticidade $E = 207$ GPa. O fio AB tem um diâmetro $d = 6,35$ mm e pode suportar uma tensão máxima $\sigma_{\text{út}} = 345$ MPa. Determine o valor máximo que a força Q pode ter para que o sistema (barra + fio) não falhe. Dados adicionais: $l = 4570$ mm; $\theta = 45^\circ$; $\sigma_p = 210$ MPa e $\sigma_e = 240$ MPa (para a barra BC).



6) Uma coluna é constituída por dois perfis I (vide características do perfil na tabela a seguir) ligados de forma a trabalharem como um único pilar (vide figura à direita). Admitindo que tal pilar seja biarticulado em suas extremidades, determine o comprimento mínimo do mesmo para o qual a fórmula de Euler seria válida (flambagem global no regime elástico). Qual seria a carga crítica de flambagem neste caso?

Dados: $E = 210$ GPa, $\sigma_p = 210$ MPa, $d = 101,6$ mm

Perfil	Área	Altura	I (eixo 1-1)	r (eixo 1-1)	I (eixo 2-2)	r (eixo 2-2)
S6 \times 12,5	23,68 cm ²	152,4 mm	919,87 cm ⁴	62,23 mm	75,75 cm ⁴	17,91 mm





7) Um pilar de aço tem seção transversal retangular de dimensões $a \times 2a$ e comprimento $l = 1,5\text{m}$. Pede-se determinar o valor da dimensão a sabendo que este pilar é biarticulado e que deve suportar uma carga axial compressiva (centrada) de intensidade $P = 800\text{ N}$ com um coeficiente de segurança $\eta = 2$.

Dados: $E = 210\text{ GPa}$, $\sigma_e = 240\text{ MPa}$, $\sigma_p = 210\text{ MPa}$.

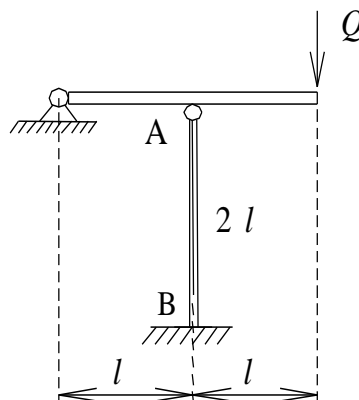
8) A coluna AB possui seção transversal circular cheia (diâmetro d), encontrando-se engastada na base e articulada, no topo, a uma barra horizontal rígida que suporta uma força concentrada $Q = 80\text{ kN}$, conforme a figura. Determine o diâmetro (d) necessário à coluna AB, para que o fator de segurança com respeito à flambagem ou escoamento seja $C.S. = 2$ (verifique se a fórmula de Euler pode ser utilizada neste caso).

Dado: $l = 1,0\text{ m}$

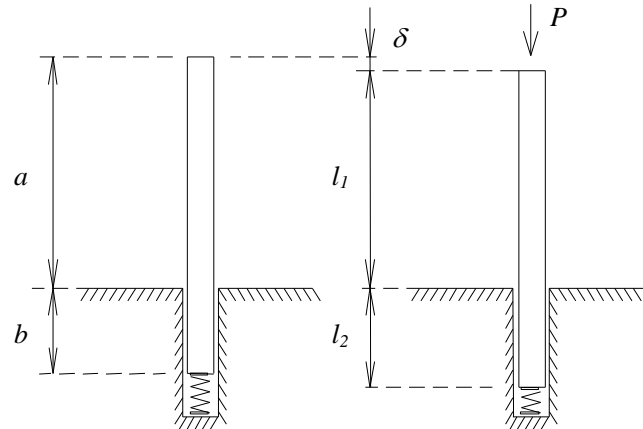
$E = 200\text{ GPa}$ (módulo de elasticidade)

$\sigma_p = 200\text{ MPa}$ (tensão limite de proporcionalidade)

$\sigma_e = 250\text{ MPa}$ (tensão de escoamento)

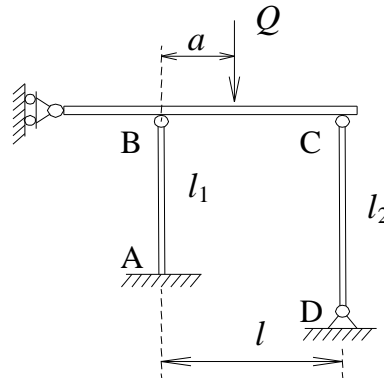


9) A barra vertical de seção circular (diâmetro d) e comprimento total l encontra-se inicialmente descarregada, tendo parte de seu comprimento fora e parte dentro de uma cavidade indeformável. No interior da cavidade há uma mola linear de constante k_m , também inicialmente descarregada (desprezamos o efeito do peso próprio da barra). Uma força de compressão P é então gradativamente aplicada até que a flambagem da barra ocorra. Determine o mínimo valor de P para o qual a flambagem ocorre. Verifique se a fórmula de Euler é válida nesta situação ou não. Dados: $l = 3000\text{ mm}$; $a = 2200\text{ mm}$; $b = 800\text{ mm}$; $d = 60\text{ mm}$; $E = 200\text{ GPa}$; $\sigma_p = 210\text{ MPa}$; $\sigma_e = 240\text{ MPa}$; $k_m = 500\text{ N/mm}$.



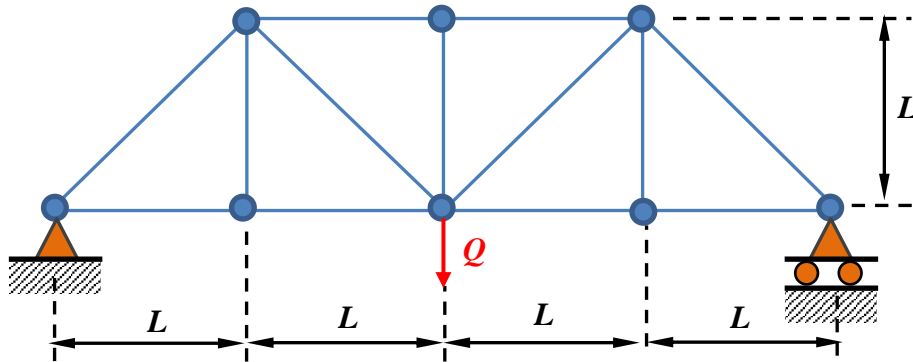
10) A barra horizontal mostrada na figura é simplesmente apoiada pelas colunas AB e CD, as quais são articuladas no topo à barra horizontal, sendo o suporte A fixo e o suporte D articulado. Ambas colunas tem seção transversal quadrada com largura $b = 15 \text{ mm}$. Determine a máxima carga Q que pode ser aplicada ao sistema para que nenhuma das colunas flambe.

Dados: $l = l_1 = 1,0 \text{ m}$, $l_2 = 1,2 \text{ m}$, $a = 0,4 \text{ m}$, $E = 200 \text{ GPa}$





11) A estrutura treliçada é formada por tubos de mesmo material e mesma seção transversal. O carregamento consiste de uma única força Q conforme indica a figura. Determine qual o valor máximo de Q para que nenhuma barra sofra flambagem. Dados: EI , l .



Respostas dos Exercícios Complementares

1) A primeira carga crítica de flambagem ocorre para $k.l = 2\pi$, onde $k = \sqrt{\frac{P}{EI}}$, resultando:

$$P_{cr} = \frac{4\pi^2 \cdot EI}{l^2}$$

e o primeiro modo de flambagem é dado por: $v(x) = A \left[\cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right) - 1 \right]$

A segunda carga crítica de flambagem ocorre para $k.l \cong 8,9868$, resultando:

$$P_{cr} \cong \frac{8,183 \cdot \pi^2 \cdot EI}{l^2}$$

e o segundo modo de flambagem é: $v(x) = A \left[\sin(k \cdot x) - \frac{k \cdot l}{2} \cdot \cos(k \cdot x) - k \cdot x + \frac{k \cdot l}{2} \right]$, com $k.l \cong 8,9868$.

4) $t \cong 5,2$ mm

5) Carga máxima para que não haja rompimento do fio: $Q_{máx} \cong 7,73$ kN

Carga máxima para que não haja flambagem da barra: $Q_{máx} \cong 31,98$ kN

Logo: $Q_{máx} \cong 7,73$ kN (condição limite: rompimento do fio)



6) $l_{\min} = 5,35 \text{ m}$, $P_{cr} = 994,4 \text{ kN}$.

7) $a = 10,1 \text{ mm}$.

8) $d = 50,4 \text{ mm}$. Vale a fórmula de Euler (flambagem ocorre no regime elástico-linear).

9) $P_{cr} \cong 74,65 \text{ kN}$. Vale a fórmula de Euler (flambagem ocorre no regime elástico-linear).

10) $Q_{\max} \cong 14,46 \text{ kN}$ (caso este valor seja ultrapassado a barra CD irá flambar)

11) $Q_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi^2 \cdot EI}{l^2}$