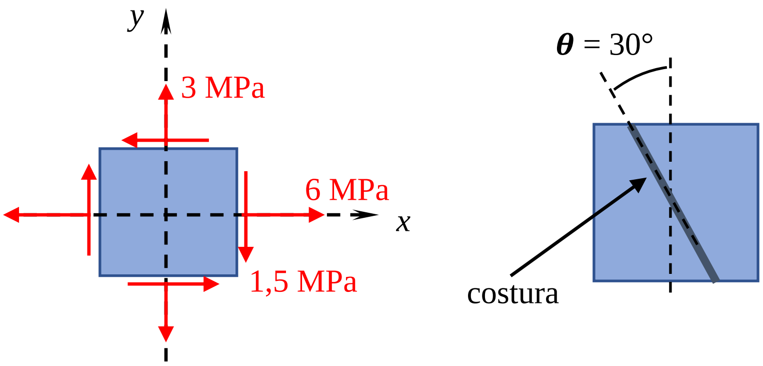
PME-3211 – Mecânica dos Sólidos II

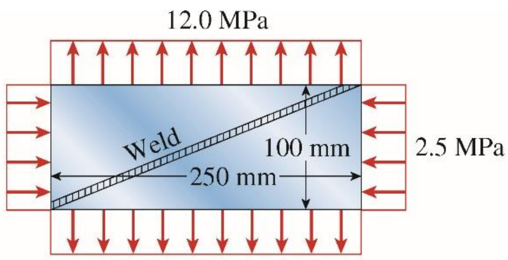
2ª Lista de Exercícios: Estudo das Tensões – Parte I

PARTE I: Exercícios do Livro-Texto (Cap.7)

7.2-9. O revestimento de polietileno de um reservatório de recalque está submetido às tensões $\sigma_x = 6$ MPa, $\sigma_y = 3$ MPa e $\tau_{xy} =$ -1,5 MPa, como ilustrado no elemento de estado plano de tensões na figura à esquerda. Determine as tensões normal e de cisalhamento que agem em uma costura orientada a 30° em relação ao eixo vertical y, como indicado na figura à direita. Mostre essas tensões em um esboço de um elemento de tensão tendo seus lados paralelos e perpendiculares à costura.



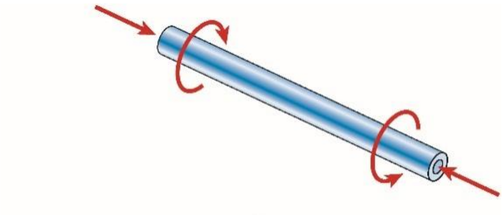
7.2-12. Uma chapa retangular de dimensões 250 mm × 100 mm é fabricada soldando-se duas chapas triangulares. A chapa retangular assim formada está submetida a tensões de compressão de 2,5 MPa aplicadas sobre os lados verticais e a tensões de tração de 12 MPa aplicadas sobre os lados horizontais. Determine a tensão normal agindo perpendicularmente à linha de solda e a tensão de cisalhamento agindo paralelamente à linha de solda. Esboce estas tensões em um elemento tendo seus lados paralelos e perpendiculares à linha de solda.

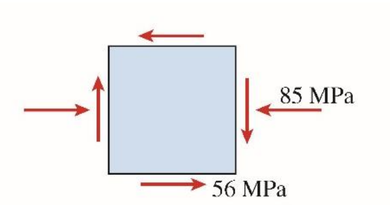


7.3-10. Um eixo propulsor, submetido à torção combinada com um carregamento axial de compressão, é projetado para resistir a uma tensão de cisalhamento de 56 MPa e a uma tensão de compressão de 85 MPa (conforme a figura).

a) Determine as tensões principais e mostre-as em um elemento orientado adequadamente (em relação aos planos horizontal e vertical indicados na figura);

b) Determine as tensões de cisalhamento máximas e as tensões normais que ocorrem nos planos de máxima tensão cisalhante. Mostre tais tensões em um elemento orientado adequadamente (em relação aos planos horizontal e vertical indicados na figura).





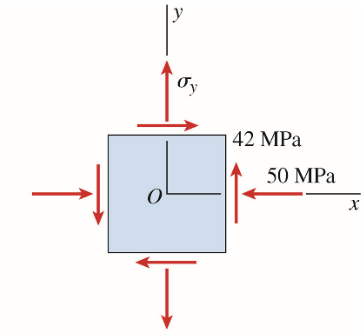
Resp. parciais: a) $\sigma_1 = 27{,}8$ MPa, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -112{,}8$ MPa

b) $\tau_{máx} = 70{,}3$ MPa, σ = -42,5 MPa

7.3-20. Um elemento em *estado plano de tensões* está submetido às tensões indicadas na figura. Sabendo que uma das tensões principais é igual a 33 MPa em tração, pede-se:

a) Determine a tensão σ_y;

b) Determine a outra tensão principal e a orientação dos planos principais. Mostre então as tensões principais em um esboço de um elemento orientado adequadamente (em relação aos eixos *x* e *y* indicados na figura).

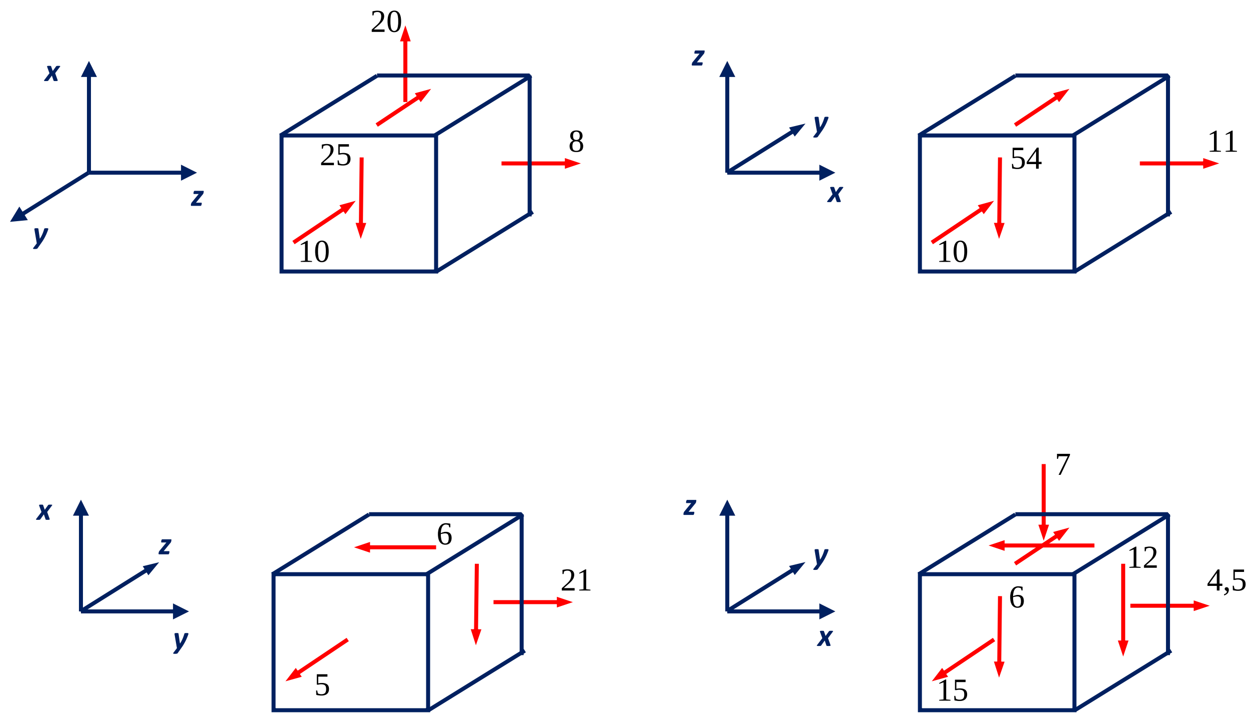


Resp. parciais: a) $\sigma_y = 11{,}7$ MPa;

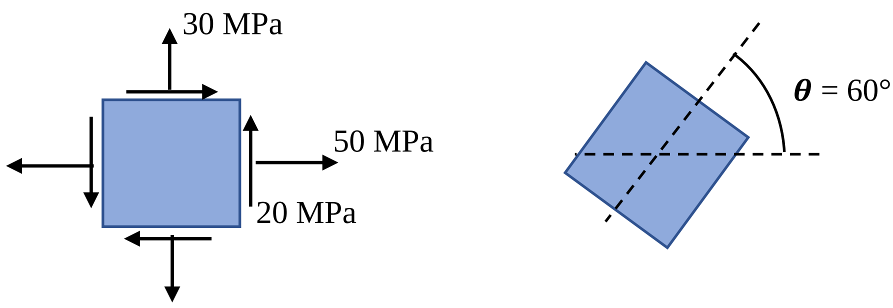
b) θ_{p1} = 63,15°

Exercícios Complementares

1) Determine o tensor das tensões, escrito em relação à base b = $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, para cada um dos casos indicados. Nota: as tensões indicadas estão em valores absolutos e expressas em MPa (as tensões nas faces não visíveis não estão indicadas, apesar de existirem, para não sobrecarregar a figura).



2) Um elemento em estado plano de tensões está submetido às tensões $\sigma_x = 50$ MPa, $\sigma_y = 30$ MPa e $\tau_{xy} = 20$ MPa, como ilustrado na figura à esquerda. Determine as tensões agindo nas faces de um elemento orientado segundo um ângulo $\theta = 60°$ a partir do eixo x, como indicado na figura à direita.

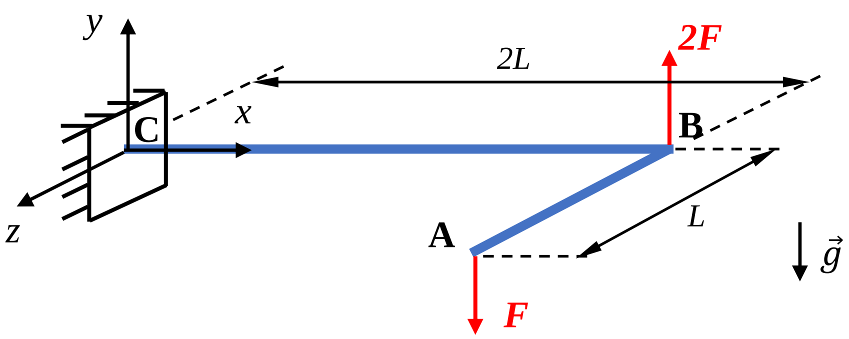


3) A figura abaixo indica o eixo central de uma estrutura tubular (com diâmetro interno d_i = 254 mm, e espessura t = 25,4 mm) engastada na extremidade C. Os trechos AB e BC são ortogonais entre si e estão ambos contidos no plano xz. Forças concentradas de intensidade F e $2F$ são aplicadas respectivamente nas seções A e B, conforme ilustrado. O material utilizado é o aço estrutural A36, cujas propriedades são dadas abaixo. Pede-se determinar o estado de tensões nos seguintes pontos da estrutura (vide observações a seguir):

$P_1 = (2L, d_i/2 + t, l/2)$ $P_4 = (0, d_i/2 + t, 0)$

$P_2 = (L, d_i/2 + t, 0)$ $P_5 = (0, 0, d_i/2 + t)$

$P_3 = (L, -d_i/2 - t, 0)$ $P_6 = (0, 0, -d_i/2 - t)$



Dados do problema: F = 2000 N; L = 2,0 m; g = 10 m/s^2.

E = 200 GPa (módulo de elasticidade do material);

G = 78 GPa (módulo de elasticidade transversal do material);

ρ = 7850 kg/m^3 (massa específica do material).

Observações:

a) O estado de tensões deve ser indicado: (i) com um elemento 3D de lados paralelos aos eixos coordenados x, y, z indicados na figura, com todas as tensões não-nulas representadas neste elemento (indicar o sentido em que cada tensão está atuando e sua magnitude) e (ii) com o tensor das tensões escrito em relação a base de versores $b = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$;

b) Considerar o efeito do peso próprio da estrutura uma vez que este tem a mesma ordem de grandeza dos esforços concentrados aplicados;

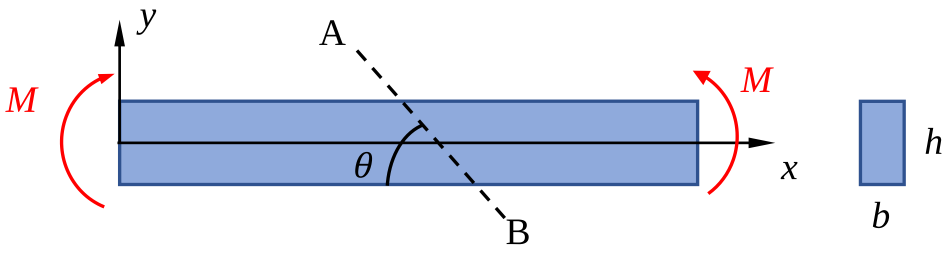
c) Levar em consideração as tensões de cisalhamento devidas à força cortante, quando for pertinente;

d) Expressar todas as tensões em MPa.

4) Uma viga de seção transversal retangular (base b, altura h) é submetida a um momento fletor de intensidade M (flexão uniforme). A partir da distribuição de tensões normais em uma seção transversal genérica (i.é, a partir de σ_x), expressa em função dos parâmetros dados, determine:

a) a distribuição de tensões normais (σ_n) segundo o plano inclinado AB, para $\theta = 45^o$;

b) a distribuição de tensões de cisalhamento (τ_n) segundo o plano inclinado AB, para $\theta = 45^o$.



5) Considerando os dados do exercício 3, determine:

a) Os esforços solicitantes na seção mais solicitada (seção crítica);

b) O estado de tensões no ponto considerado mais crítico desta seção (vide obs.(a) do exercício 3);

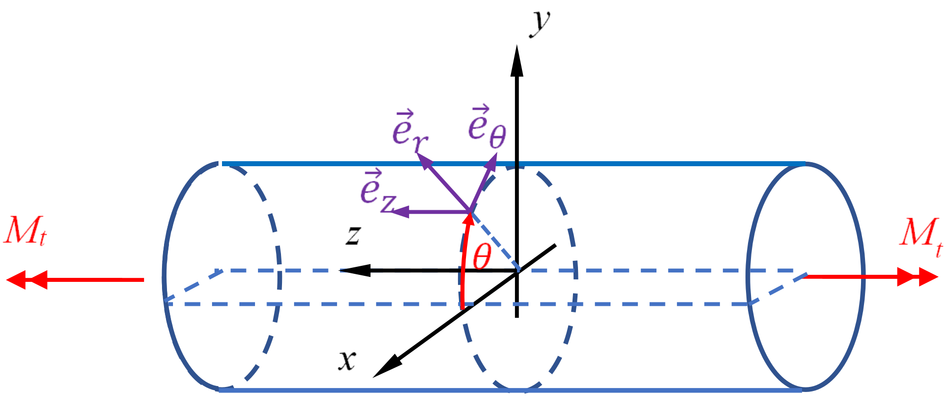
c) as tensões principais e as direções principais de tensão para o ponto escolhido no item (b). Faça também um desenho indicando a orientação dos planos principais de tensão (com relação aos eixos x, y, z) em um elemento 3D.

6) O eixo indicado a seguir está submetido à torção pura, sendo dados: M_t (momento torçor aplicado) e d (diâmetro do eixo). Determine:

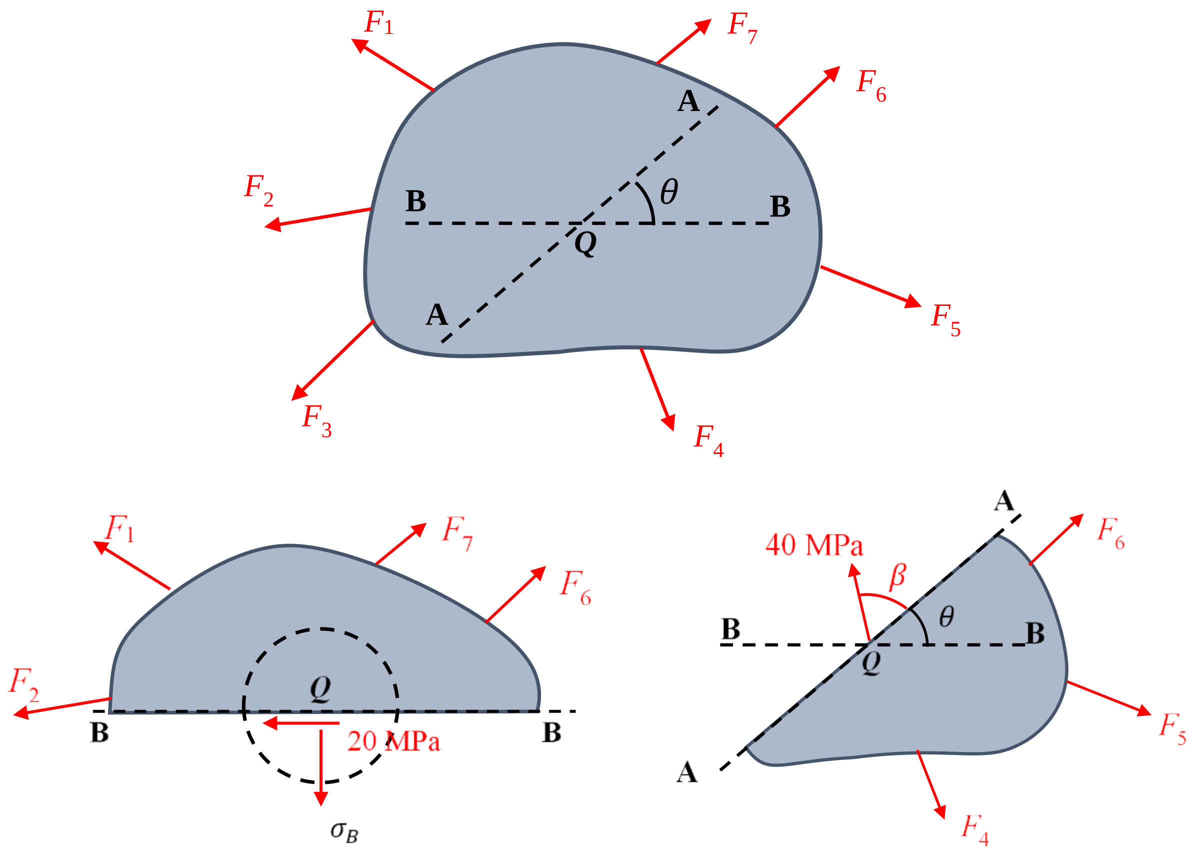
a) O estado de tensões em um ponto qualquer <u>da superfície</u> do eixo, utilizando a base $b = (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ ligada ao sistema de coordenadas cilíndricas (indique o estado de tensões em um elemento 3D);

b) O tensor das tensões na base $b = (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ para o ponto descrito em (a);

c) As tensões principais associadas ao ponto.



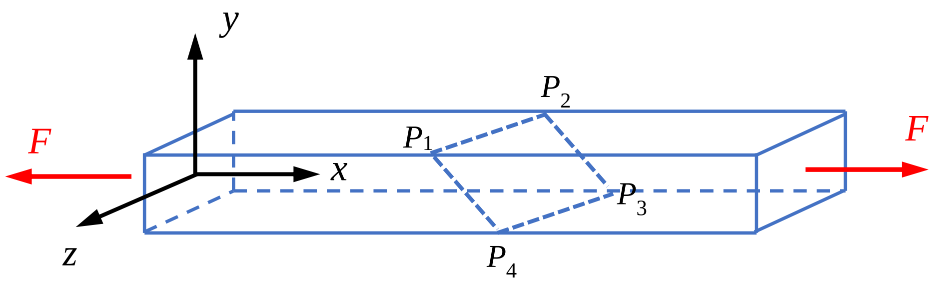
7) As tensões atuantes em dois planos (A-A e B-B) que passam por um dado ponto (Q) de uma chapa plana estão indicadas na figura a seguir. Determine o valor da tensão normal σ_B (que atua no plano B-B) bem como os valores das tensões principais no ponto Q. Considere que existam apenas tensões no plano da estrutura (estado plano de tensões). Dados: $\theta = 45^o$, $\beta = 60^o$.



8) A barra prismática indicada na figura tem seção transversal quadrada (lado a) e comprimento $L >> a$, sendo composta de duas partes que foram unidas com um adesivo através do plano definido pelos pontos P_1, P_2, P_3 e P_4. Por meio de ensaios realizados, sabe-se que o adesivo pode suportar uma tensão normal máxima de 4 MPa e uma tensão de cisalhamento máxima de 2 MPa. Sem considerar o efeito combinado entre a tensão normal e a tensão cisalhante na resistência do adesivo, determine, com base apenas nos valores admissíveis fornecidos, qual o máximo valor que a força de tração F pode ter para que o adesivo não falhe.

Dados: a = 40 mm, L = 1000 mm

Equação do plano de colagem segundo o sistema de coordenadas $Oxyz$: $2x + 2y + 2z = L$.

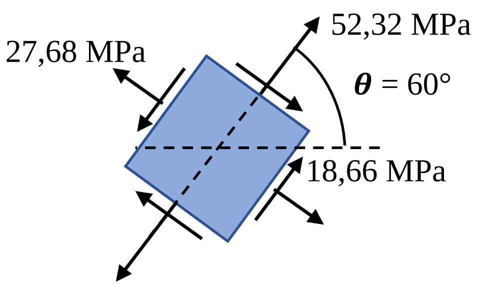


Respostas dos Exercícios Complementares

1) a) $[T]_b = \begin{bmatrix} 20 & -25 & 0 \\ -25 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ (MPa) b) $[T]_b = \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 54 \\ 0 & 54 & 0 \end{bmatrix}$ (MPa)

c) $[T]_b = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 0 \\ -6 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ (MPa) d) $[T]_b = \begin{bmatrix} 4{,}5 & 0 & -12 \\ 0 & 15 & 6 \\ -12 & 6 & -7 \end{bmatrix}$ (MPa)

2) O estado de tensões no elemento girado fica dado por:



3) Os tensores [T] de cada ponto, escritos com relação à base indicada, são:

a) no ponto P1: $[T]_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2{,}00 \end{bmatrix}$ b) no ponto P2: $[T]_b = \begin{bmatrix} 4{,}52 & 0 & 2{,}61 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2{,}61 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c) no ponto P3: $[T]_b = \begin{bmatrix} -4{,}52 & 0 & -2{,}61 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2{,}61 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ d) no ponto P4: $[T]_b = \begin{bmatrix} 13{,}9 & 0 & 2{,}61 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2{,}61 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

e) no ponto P5: $[T]_b = \begin{bmatrix} 0 & -3{,}37 & 0 \\ -3{,}37 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ f) no ponto P6: $[T]_b = \begin{bmatrix} 0 & 1{,}85 & 0 \\ 1{,}85 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Obs: todas as tensões estão em MPa.

4) As distribuições de tensões normais e cisalhantes são dadas por:

$$\vec{\sigma}_n = (\sigma_x.\text{sen}^2\,\theta).\vec{n}$$
$$\vec{\tau}_n = (\sigma_x.\text{sen}\theta.\cos\theta).\vec{t}$$

sendo, $\sigma_x = \dfrac{-12M.y}{b.h^3}$, $\vec{n} = (\text{sen}\theta,\ \cos\theta,\ 0)$ e $\vec{t} = (\cos\theta,\ \text{-sen}\theta,\ 0)$

Para θ = 45º virá: $\left\| \begin{array}{l} \vec{\sigma}_n = -\dfrac{3\sqrt{2}.M.y}{b.h^3}.\left(\vec{e}_x + \vec{e}_y\right) \\ \vec{\tau}_n = -\dfrac{3\sqrt{2}.M.y}{b.h^3}.\left(\vec{e}_x - \vec{e}_y\right) \end{array} \right.$, ou, em módulo: $\left\| \begin{array}{l} \|\vec{\sigma}_n\| = \dfrac{6.M.|y|}{b.h^3} \\ \|\vec{\tau}_n\| = \dfrac{6.M.|y|}{b.h^3} \end{array} \right.$

5) a) A seção mais crítica, neste caso, é a seção transversal próxima ao engaste (seção C). Os esforços nesta seção são:

$$\left\| \begin{array}{lll} \vec{V}_y = -8{,}5\ \ kN.m\ \ (\vec{e}_y) & \text{(f. cortante)} \\ \vec{M}_f = -20\ \ kN.m\ \ (\vec{e}_z) & \text{(mom. fletor)} \\ \vec{M}_t = \ 7{,}5\ \ kN.m\ \ (\vec{e}_x) & \text{(mom. torçor)} \end{array} \right.$$

b) Os pontos mais solicitados desta seção são os pontos mais afastados do eixo neutro, cujas coordenadas são dadas por: $\left(0\ ,\ \dfrac{d_i + 2t}{2}\ ,\ 0\right)$ e $\left(0\ ,\ \dfrac{-(d_i + 2t)}{2}\ ,\ 0\right)$

O tensor das tensões, escrito com relação à base indicada, no ponto $\left(0\ ,\ \dfrac{d_i + 2t}{2}\ ,\ 0\right)$ é:

$$[T]_b = \begin{bmatrix} 13{,}9 & 0 & 2{,}61 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2{,}61 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{(MPa)}$$

E o tensor das tensões para o ponto $\left(0\ ,\ \dfrac{-(d_i + 2t)}{2}\ ,\ 0\right)$ é dado por:

$$[T]_b = \begin{bmatrix} -13{,}9 & 0 & -2{,}61 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2{,}61 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{(MPa)}$$

c) As tensões principais e direções principais de tensão serão:

i) para o ponto $\left(0\ ,\ \dfrac{d_i+2t}{2}\ ,\ 0\right)$:

$$\left\|\begin{array}{ll}\sigma_1 = 14{,}374MPa & \vec{n}_1 = (0{,}983911;\ \ 0;\ \ 0{,}178657) \\ \sigma_2 = 0 & \vec{n}_2 = (0\,;\ 1;\ 0) \\ \sigma_3 = -0{,}474MPa & \vec{n}_3 = (-0{,}178657;\ \ 0;\ \ 0{,}983911)\end{array}\right.$$

ii) para o ponto $\left(0\ ,\ \dfrac{-(d_i+2t)}{2}\ ,\ 0\right)$:

$$\left\|\begin{array}{ll}\sigma_1 = 0{,}474MPa & \vec{n}_1 = (0{,}178657;\ \ 0;\ -0{,}983911) \\ \sigma_2 = 0 & \vec{n}_2 = (0\,;\ 1;\ 0) \\ \sigma_3 = -14{,}374MPa & \vec{n}_3 = (0{,}983911;\ \ 0;\ \ 0{,}178657)\end{array}\right.$$

6) a) A única tensão que existirá, segundo a base de versores $b = (\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$, é a tensão de cisalhamento $\tau_{z\theta}$ (bem como sua complementar $\tau_{\theta z}$), dada em módulo por:

$$|\tau_{z\theta}| = \frac{M_t}{I_p}.\frac{d}{2} = \frac{16M_t}{\pi d^3}$$

b) O tensor das tensões na base indicada será:

$$[T]_b = \begin{bmatrix}\sigma_r & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{\theta r} & \sigma_\theta & \tau_{\theta z} \\ \tau_{zr} & \tau_{z\theta} & \sigma_z\end{bmatrix} = \frac{16.M_t}{\pi.d^3}.\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

c) As tensões principais no ponto serão:

$$\left\|\begin{array}{l}\sigma_1 = \dfrac{16.M_t}{\pi.d^3} \\ \sigma_2 = 0 \\ \sigma_3 = -\dfrac{16.M_t}{\pi.d^3}\end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \tau_{máx} = \frac{16.M_t}{\pi.d^3}$$

Obs: Tal estado de tensões é chamado estado de cisalhamento puro.

7) a) σ_b = 74,641 MPa

b) Tensões principais no ponto:

$$\left\|\begin{array}{l}\sigma_1 = 82{,}925 \\ \sigma_2 = 26{,}357\ \ (\text{MPa}) \\ \sigma_3 = 0\end{array}\right.$$

8) $F_{máx}$ = 6788 N (caso a força exceda este valor, haverá falha por cisalhamento no plano).