
PME 3211 – Mecânica dos Sólidos II

**Introdução ao Estudo das Energias
de Deformação e Complementar**

Prof. Dr. Clóvis de Arruda Martins

Janeiro de 2021

1 Apresentação

A presente apostila apresenta a terceira parte das notas de aula da disciplina Mecânica dos Sólidos II, que corresponde a uma introdução ao estudo das energias de deformação e complementar. O conteúdo aqui presente é baseado no curso que venho ministrando há vários anos em parceria com o Prof. Dr. Roberto Ramos Jr. Boa parte do conteúdo desta apostila se baseia em notas de aulas ministradas pelo Prof. Ramos. Os exercícios aqui apresentados são questões de provas aplicadas nas disciplinas de Mecânica dos Sólidos, alguns de minha autoria, os outros de autoria do Prof. Ramos.

2 Trabalho e Trabalho Complementar

Consideremos a barra engastada da Figura 1. Se a esta barra for aplicada uma força axial N , a sua extremidade livre sofrerá um deslocamento δ , na mesma direção de N , conforme indicado.

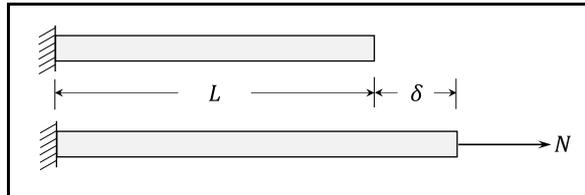


Figura 1 – Barra submetida a uma força axial.

Se a força N variar de 0 a um certo valor \bar{N} , o deslocamento δ vai variar de 0 a um valor $\bar{\delta}$. Podemos construir um gráfico como o da Figura 2 que apresenta uma curva relacionando o valor da força com o valor do deslocamento em cada instante. A forma da curva obtida depende do tipo de material considerado. Se o material for um material de comportamento *elástico*, se a força for reduzida de \bar{N} para 0, o deslocamento será reduzido de $\bar{\delta}$ a 0 seguindo a mesma curva de forma inversa.

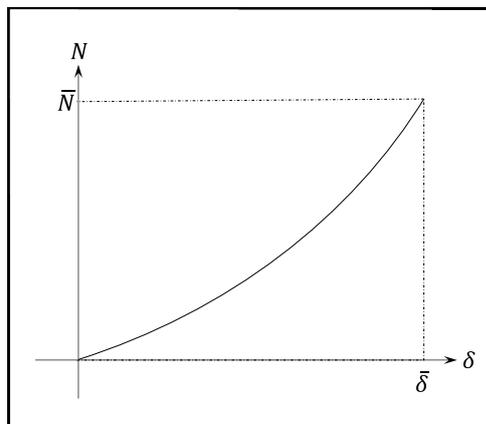


Figura 2 – Deslocamento em função da força aplicada.

O *trabalho* realizado pela força, quando ela varia de 0 a \bar{N} , é, por definição, a área compreendida entre a curva do gráfico e o eixo dos δ , conforme a Figura 3. Usaremos a letra W para representar o trabalho. Usando a Figura 4 como referência, podemos calcular o trabalho realizado pela força N . Nessa figura, a área hachurada contribui no trabalho com a parcela dW tal que

$$dW = N d\delta \quad (1)$$

e, portanto,

$$W = \int_0^{\bar{\delta}} N d\delta \quad (2)$$

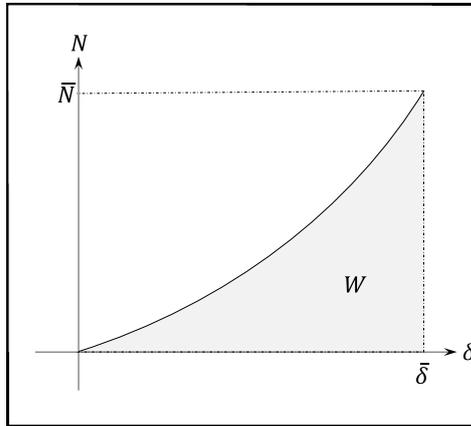


Figura 3 – Trabalho.

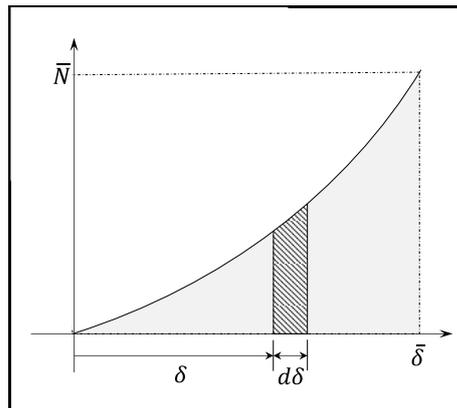


Figura 4 – Cálculo do trabalho.

Define-se o *trabalho complementar* como a área compreendida entre a curva força por deslocamento e o eixo dos N , conforme a Figura 5. Usaremos W^* para representar o trabalho complementar.

É uma conclusão imediata da definição que

$$W + W^* = \bar{N} \bar{\delta} \quad (3)$$

independentemente da forma da curva do material.

Com o auxílio da Figura 6, podemos montar a expressão para calcular o trabalho complementar:

$$W^* = \int_0^{\bar{N}} \delta dN \quad (4)$$

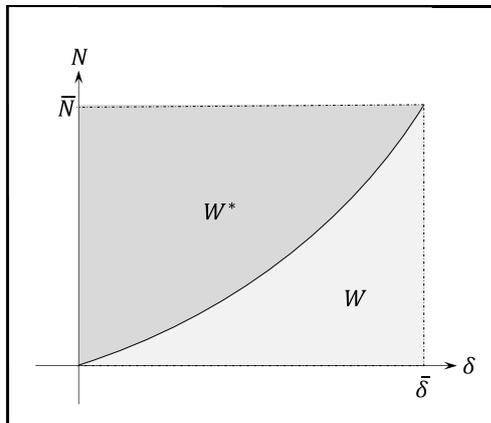


Figura 5 – Trabalho e trabalho complementar.

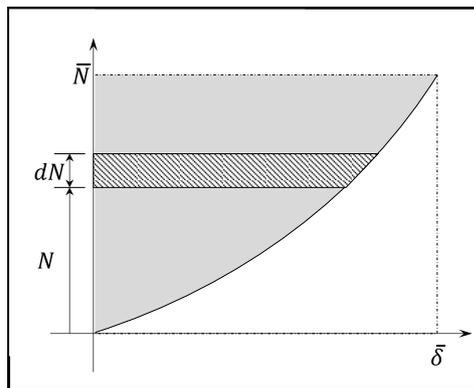


Figura 6 – Cálculo do trabalho complementar.

Consideremos, agora, que o material tenha comportamento *elástico linear*. A curva que relaciona força com deslocamento será uma reta, conforme esquematizado na Figura 7.

É imediato concluir que, para um material com comportamento elástico linear,

$$W = W^* = \frac{1}{2} \bar{N} \bar{\delta} \quad (5)$$

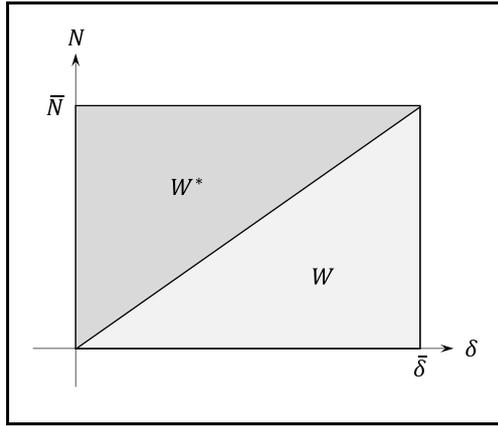


Figura 7 – Material com comportamento elástico linear.

3 Princípio do Trabalho e da Energia

O *Princípio do Trabalho e da Energia* afirma que o trabalho realizado por um esforço para deformar um corpo é armazenado sob a forma de *energia de deformação*. Se o material tem comportamento elástico, quando cessa a aplicação do esforço, cessa a deformação e essa energia é integralmente devolvida sob a forma de trabalho. Se o material não tem comportamento elástico, essa energia, ou parte dela, é absorvida para deformar permanentemente o corpo.

Se usarmos a letra U para representar a energia de deformação, o Princípio do Trabalho e da Energia é equivalente a

$$W = U \quad . \quad (6)$$

Definimos, também, a *energia complementar*, que pelo Princípio do Trabalho e da Energia é igual ao trabalho complementar. Se usarmos o símbolo U^* para representar a energia complementar, então,

$$W^* = U^* \quad . \quad (7)$$

Para um material de comportamento elástico linear, o Princípio do Trabalho e da Energia permite escrever, a partir de (6), (7) e (5),

$$U = W = W^* = U^* \quad . \quad (8)$$

Note que a energia complementar não tem um significado físico evidente, é uma definição matemática. Mas, normalmente, o seu cálculo é mais direto do que o da energia de deformação, como veremos mais adiante.

4 Barra sob Força Axial

4.1 Barra prismática

Uma *barra prismática* é uma barra que tem a seção transversal constante ao longo do seu comprimento.

Consideremos a barra reta prismática da Figura 8 que sofreu um aumento de comprimento δ quando foi submetida exclusivamente a uma força axial N . Suponhamos que o comprimento da barra não deformada seja L e a área de sua seção transversal seja A . Suponhamos, também que o seu material tenha comportamento elástico, com módulo de elasticidade E .

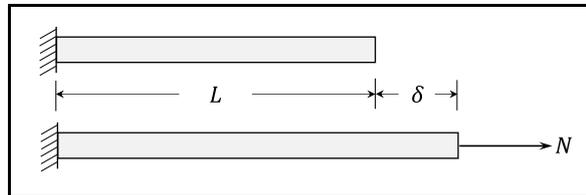


Figura 8 – Barra submetida a uma força axial.

Essa barra está submetida a uma tensão normal constante, na direção de seu eixo, igual a

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad , \quad (9)$$

o alongamento na direção do eixo da barra é

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} \quad (10)$$

e a Lei de Hooke diz que

$$\sigma = E\varepsilon \quad . \quad (11)$$

Juntando (9), (10) e (11), concluímos que

$$\delta = \frac{NL}{EA} \quad , \quad (12)$$

ou

$$N = \frac{EA}{L}\delta \quad . \quad (13)$$

As energias de deformação e complementar podem ser calculadas a partir da Figura 9 e das expressões (12) e (13).

Assim:

$$U = \frac{1}{2} \delta N = \frac{EA}{2L} \delta^2 \quad (14)$$

e

$$U^* = \frac{1}{2} N \delta = \frac{N^2 L}{2EA} \quad (15)$$

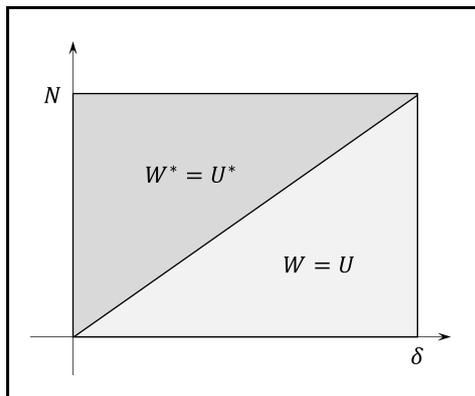
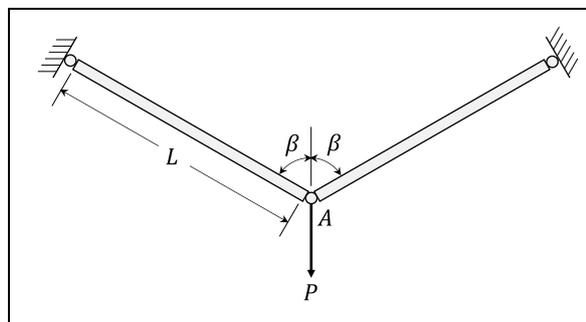


Figura 9 – Material elástico linear.

Note que, embora iguais, a energia de deformação é função do deslocamento δ e a energia complementar é função da força N . Normalmente conhecemos a força e não o deslocamento e, por isso fica mais direto usar a energia complementar do que a energia de deformação.

Exemplo 1

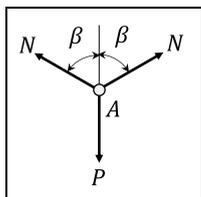
O suporte da figura é formado por duas barras iguais que têm o mesmo comprimento L e a mesma rigidez axial EA . Usando o Princípio do Trabalho e da Energia, determine o deslocamento vertical sofrido pelo ponto A com a aplicação da força P .



Resolução:

i) *cálculo da força em cada barra:*

Como as barras são biarticuladas, cada barra estará submetida apenas a uma força normal e, como a estrutura é simétrica, elas estarão submetidas à mesma força normal N . Essa força pode ser calculada estudando o equilíbrio do nó A :



$$2N \cos \beta = P \Rightarrow N = \frac{P}{2 \cos \beta}$$

ii) *cálculo da energia complementar:*

A energia complementar do conjunto é a soma da energia complementar das duas barras. Usando (15),

$$U^* = 2 \frac{N^2 L}{2EA} = \frac{P^2 L}{4EA \cos^2 \beta}$$

iii) *trabalho da força P:*

Usando (5):

$$W = \frac{1}{2} P \delta$$

iv) *Princípio do Trabalho e da Energia:*

Como o material é elástico linear:

$$W = U = U^* \Rightarrow \frac{1}{2} P \delta = \frac{P^2 L}{4EA \cos^2 \beta} \Rightarrow \delta = \frac{PL}{2EA \cos^2 \beta}$$

4.2 Barra escalonada

Uma *barra escalonada* é uma barra formada por trechos prismáticos, conforme esquematizado na Figura 10. Vamos supor que a barra tenha n trechos. Na figura está representado um trecho genérico de índice i . Esse trecho tem um comprimento L_i , a sua seção transversal tem área A_i e o seu material tem módulo de elasticidade E_i . Vamos supor que esse trecho esteja submetido a uma força normal N_i . Como o trecho é prismático, a energia complementar acumulada nele, U_i^* , pode ser calculada usando a expressão (15):

$$U_i^* = \frac{N_i^2 L_i}{2E_i A_i} \quad (16)$$

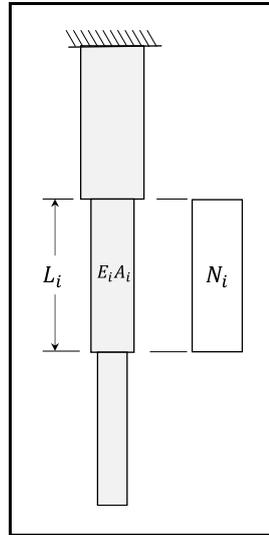


Figura 10 – Barra escalonada.

A energia complementar total da barra, será a soma da energia de todos os trechos:

$$U^* = \sum_{i=1}^n U_i^* \quad (17)$$

e, portanto,

$$U^* = \sum_{i=1}^n \frac{N_i^2 L_i}{2E_i A_i} \quad (18)$$

4.3 Barra Não-Uniforme

Neste item, vamos considerar o caso geral: a barra tem seção transversal que varia ao longo do seu comprimento de acordo com uma função $A(x)$, seu módulo de elasticidade varia com uma função $E(x)$ e ela está submetida a uma força normal que varia com uma função $N(x)$, conforme a Figura 11. Para calcular a energia complementar desta barra, basta considerar que um elemento de comprimento infinitesimal dx se comporta como uma barra prismática e vai colaborar na energia complementar com a parcela, calculada usando (15),

$$dU^* = \frac{N^2(x)}{2E(x)A(x)} dx \quad (19)$$

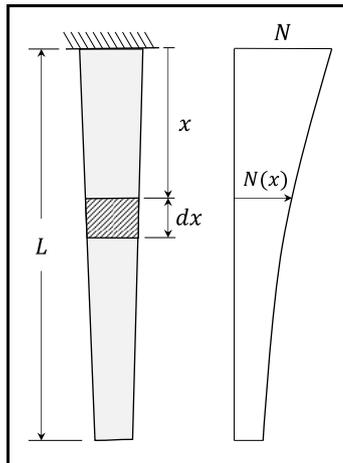


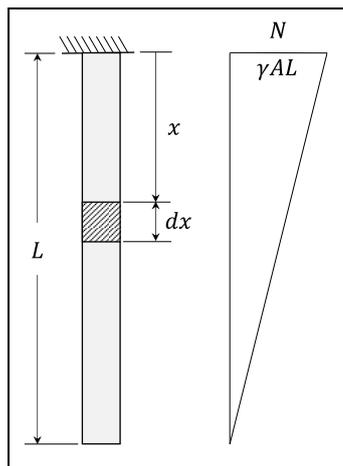
Figura 11 – Barra não uniforme.

Então, a energia complementar da barra será dada pela integral:

$$U^* = \int_0^L \frac{N^2(x)}{2E(x)A(x)} dx \quad (20)$$

Exemplo 2

A barra prismática da figura está suspensa pela extremidade superior e submetida apenas ao seu peso próprio. Sabendo que o módulo de elasticidade do material da barra é E , a área de sua seção transversal é A e o seu peso por unidade de volume é γ , calcular a energia complementar armazenada.



Resolução:

A barra é prismática, a rigidez axial EA é constante, mas a força normal varia ao longo de x . Neste caso, a expressão (20) pode ser colocada como:

$$U^* = \frac{1}{2EA} \int_0^L N^2(x) dx$$

A força normal, que é devida ao peso próprio, pode ser escrita como:

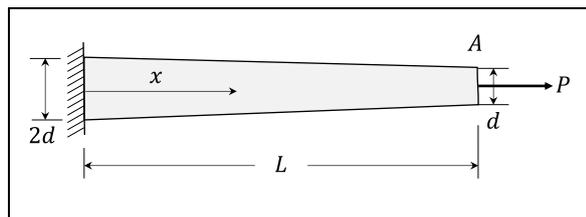
$$N(x) = \gamma A(L - x)$$

Portanto,

$$U^* = \frac{\gamma^2 A}{2E} \int_0^L (L - x)^2 dx \Rightarrow U^* = \frac{\gamma^2 AL^3}{6E}$$

Exemplo 3

A barra da figura tem a forma de um tronco de cone cujo diâmetro varia linearmente ao longo do eixo. O módulo de elasticidade do material da barra é E . Pede-se calcular o deslocamento δ sofrido pela extremidade A com a aplicação da força P .



Resolução:

Neste caso temos uma barra não prismática onde a área da seção transversal varia com x , mas o módulo de elasticidade E é constante e a força normal é constante e igual a P . Neste caso, a expressão (20) pode ser escrita como

$$U^* = \frac{P^2}{2E} \int_0^L \frac{dx}{A(x)}$$

Para resolver o problema precisamos, primeiro, escrever a expressão da área em função de x para, em seguida, calcular a energia complementar. Precisamos, depois, calcular o trabalho da força P para, usando o Princípio do Trabalho e da Energia, calcular o deslocamento horizontal δ pedido.

i) *cálculo da área:*

Como o diâmetro varia linearmente com x , podemos escrever:

$$d(x) = d \left(2 - \frac{x}{L} \right)$$

Então a área será

$$A(x) = \frac{\pi}{4} d^2(x) = \frac{\pi d^2}{4} \left(2 - \frac{x}{L} \right)^2$$

ii) cálculo da energia complementar:

$$U^* = \frac{2P^2}{\pi d^2 E} \int_0^L \frac{dx}{\left(2 - \frac{x}{L} \right)^2} = \frac{P^2 L}{\pi d^2 E}$$

iii) cálculo do trabalho:

$$W = \frac{1}{2} P \delta$$

iv) cálculo do deslocamento:

Pelo Princípio do Trabalho e da Energia:

$$W = U = U^* \Rightarrow \frac{1}{2} P \delta = \frac{P^2 L}{\pi d^2 E} \Rightarrow \delta = \frac{2PL}{\pi d^2 E}$$

5 Eixo sob Torção

5.1 Eixo prismático

Consideremos o eixo prismático da Figura 12, cujo momento polar é I_p . Se for a ele aplicado um torque T , a sua extremidade sofrerá um giro ϕ . Se o material do eixo tiver comportamento elástico linear, com módulo ao cisalhamento G , a relação entre o torque e o giro será linear:

$$\phi = \frac{TL}{GI_p} \quad , \quad (21)$$

ou,

$$T = \frac{GI_p}{L} \phi \quad . \quad (22)$$

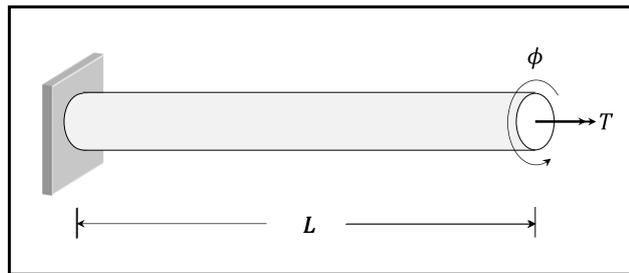


Figura 12 – Eixo prismático sob torção.

A energia de deformação e a energia complementar armazenadas no eixo podem ser calculadas com o auxílio da Figura 13.

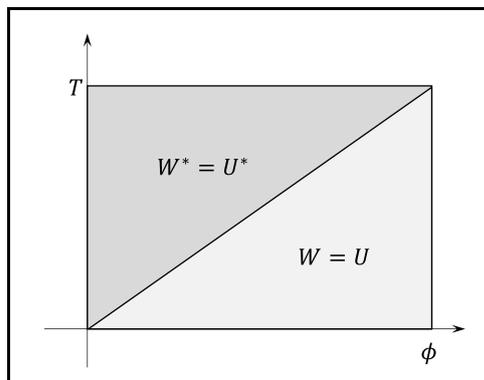


Figura 13 – Energia de deformação e energia complementar na torção uniforme.

Assim,

$$U = \frac{1}{2} \phi T = \frac{GI_p}{2L} \phi^2 \quad (23)$$

e

$$U^* = \frac{1}{2} \phi T = \frac{T^2 L}{2GI_p} \quad (24)$$

5.2 Eixo escalonado

A Figura 14 apresenta um *eixo escalonado*, que é um eixo formado por trechos prismáticos. Consideremos que o eixo possui n trechos e seja um trecho genérico representado pelo índice i . Esse trecho possui um comprimento L_i , seu momento polar é $I_{p,i}$ e seu material possui módulo de cisalhamento G_i . Se o trecho estiver submetido a um momento de torção constante T_i , ele estará armazenando uma energia complementar U_i^* que pode ser calculada pela expressão (24),

$$U_i^* = \frac{T_i^2 L_i}{2G_i I_{p,i}} \quad (25)$$

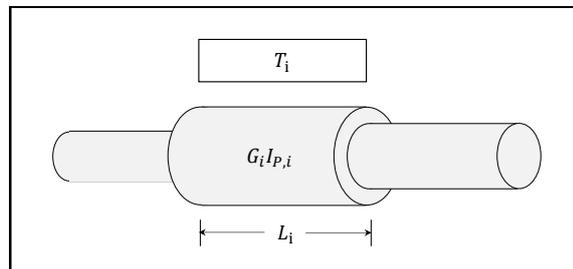


Figura 14 – Eixo escalonado.

A energia complementar total armazenada no eixo será a soma das parcelas armazenadas em cada um dos trechos, ou seja,

$$U^* = \sum_{i=1}^n U_i^* \quad (26)$$

e, portanto,

$$U^* = \sum_{i=1}^n \frac{T_i^2 L_i}{2G_i I_{p,i}} \quad (27)$$

5.3 Eixo não-uniforme

Consideremos, agora, um caso mais geral, esquematizado na (16): o eixo tem seção transversal que varia ao longo do seu comprimento e portanto o seu momento polar varia com a posição, segundo uma função $I_p(x)$. Podemos considerar, também, que o módulo de cisalhamento varia com a posição, segundo uma função $G(x)$ e que o eixo está submetido a um momento de torção descrito por uma função $T(x)$.

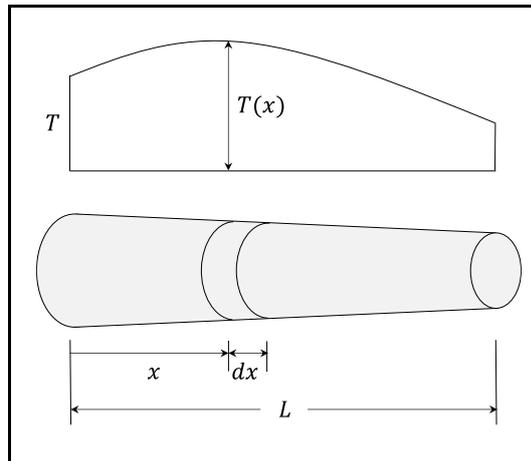


Figura 15 – Eixo não-uniforme.

Para calcular a energia complementar do eixo, basta considerar que um elemento de comprimento infinitesimal dx se comporta como um eixo prismático e vai colaborar na energia complementar com a parcela, calculada usando (24),

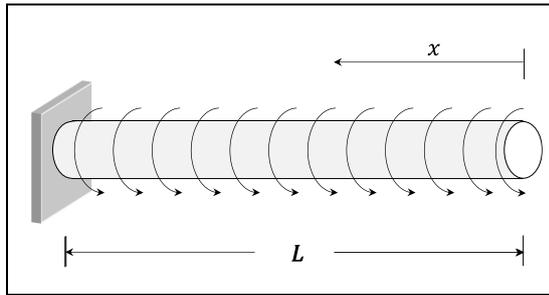
$$dU^* = \frac{T^2(x)}{2G(x)I_p(x)} dx \quad (28)$$

Então, a energia complementar da barra será dada pela integral:

$$U^* = \int_0^L \frac{T^2(x)}{2G(x)I_p(x)} dx \quad (29)$$

Exemplo 4

O eixo prismático da figura tem comprimento L , momento polar I_p e seu material tem módulo ao cisalhamento G . Se o eixo estiver submetido a um torque por unidade de comprimento t constante, qual será a energia complementar armazenada?



Resolução:

O eixo é prismático, sua rigidez à torção GI_P é constante, mas o momento de torção varia ao longo de x . Neste caso, a expressão (29) pode ser colocada como:

$$U^* = \frac{1}{2GI_P} \int_0^L T^2(x) dx$$

O momento de torção ao longo do eixo será:

$$T(x) = t x$$

Portanto,

$$U^* = \frac{1}{2GI_P} \int_0^L (t x)^2 dx \Rightarrow U^* = \frac{t^2 L^3}{6GI_P}$$

6 Barra sob Flexão

6.1 Flexão uniforme

Flexão uniforme é a flexão de uma barra prismática submetida a um momento fletor constante. Consideremos a barra prismática reta biapoiada da Figura 16. Se a ela for aplicado um momento fletor constante, teremos a flexão esquematizada na Figura 17.

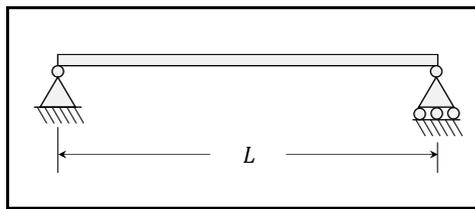


Figura 16 – Barra biapoiada.

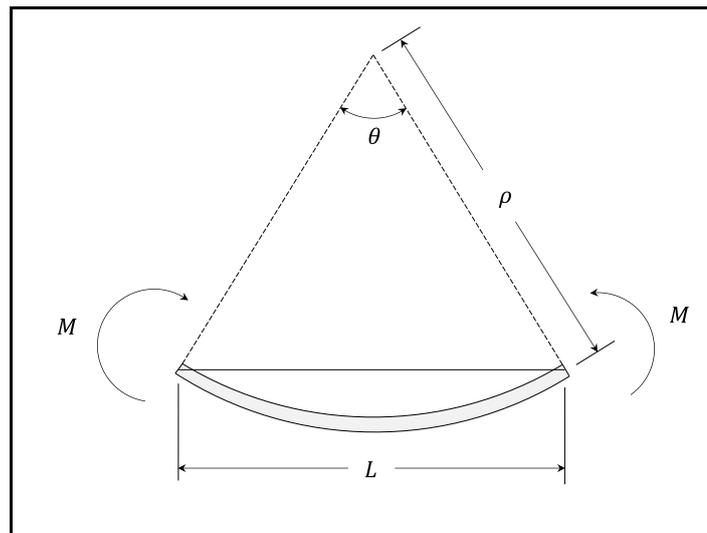


Figura 17 – Barra sob flexão uniforme.

Se o material for de comportamento elástico linear, a curvatura κ será proporcional ao momento fletor aplicado:

$$\kappa = \frac{M}{EI} \quad , \quad (30)$$

onde E é o módulo de elasticidade e I é o momento de inércia. Como a curvatura κ é o inverso do raio de curvatura ρ também podemos escrever:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (31)$$

Como os ângulos são pequenos, o comprimento de arco se confunde com a corda na Figura 17 e, então,

$$\rho \theta = L \quad (32)$$

Assim, podemos escrever

$$\theta = \frac{ML}{EI} \quad (33)$$

ou,

$$M = \frac{EI}{L} \theta \quad (34)$$

Note que a relação entre o momento M e o ângulo θ é linear. Podemos, então, montar o gráfico da Figura 18.

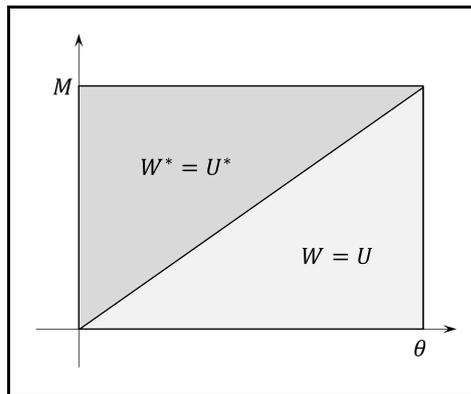


Figura 18 – Energias de deformação e complementar na flexão uniforme.

Por meio dessa figura e das equações (33) e (34) podemos montar a expressão da energia de deformação:

$$U = \frac{1}{2} M \theta = \frac{EI}{2L} \theta^2 \quad (35)$$

e da energia complementar:

$$U^* = \frac{1}{2} M \theta = \frac{M^2 L}{2EI} \quad (36)$$

6.2 Flexão não-uniforme

Vamos imaginar, agora, que temos uma barra não-prismática, de comprimento L , em que a seção transversal varia ao longo do seu comprimento. Assim, o momento de inércia vai variar com a posição segundo uma função $I(x)$. Vamos supor, também, que o módulo de elasticidade varia ao longo do comprimento com uma função $E(x)$ e que a barra esteja submetida a um momento fletor $M(x)$. Para calcular a energia complementar acumulada nessa barra, podemos isolar um elemento de comprimento infinitesimal dx , conforme a Figura 19, e aplicar a ele a expressão (36). Assim, a energia complementar acumulada no elemento será

$$dU = \frac{M^2(x)}{2E(x)I(x)} dx \quad (37)$$

E, então, a energia complementar acumulada na barra inteira será

$$U^* = \int_0^L \frac{M^2(x)}{2E(x)I(x)} dx \quad (38)$$

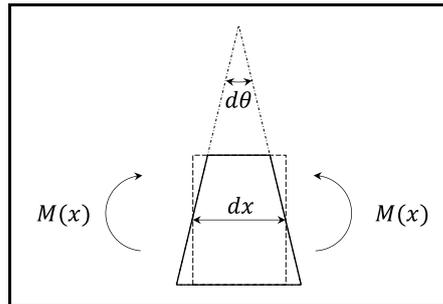
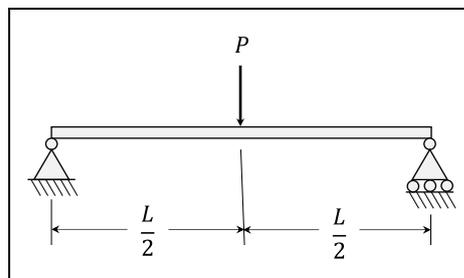


Figura 19 – Elemento de comprimento infinitesimal.

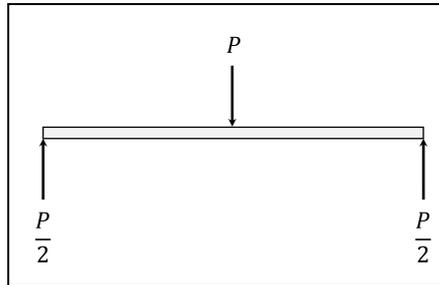
Exemplo 5

A viga prismática biapoiada da figura tem comprimento L e rigidez flexional constante EI . Determine o deslocamento vertical sofrido pelo ponto médio da barra, quando a ele é aplicada uma força vertical P .

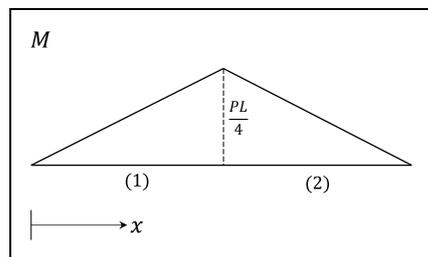


Resolução:

i) *diagrama de corpo livre da barra:*



ii) *diagrama de momento fletor:*



iii) *cálculo da energia complementar:*

Como o diagrama de momento fletor tem um “bico”, não conseguimos escrever uma expressão $M(x)$ que sirva para a barra inteira. Mas podemos dividir a barra em dois trechos, (1) e (2), colocando a energia complementar total como a soma das energias complementares armazenadas em cada um dos trechos:

$$U^* = U_{(1)}^* + U_{(2)}^*$$

Mas, como o diagrama de momentos fletores é simétrico, as energias armazenadas em cada um deles são iguais, assim

$$U^* = 2 U_{(1)}^*$$

Usando a expressão (38) podemos, então, escrever:

$$U^* = \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{L}{2}} M_{(1)}^2(x) dx$$

onde $M_{(1)}(x)$ é a expressão do momento fletor no trecho (1), a saber,

$$M_{(1)} = \frac{P}{2} x$$

Assim,

$$U^* = \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{L}{2}} \left(\frac{P}{2}x\right)^2 dx \Rightarrow U^* = \frac{P^2 L^3}{96EI}$$

iv) *trabalho da força P:*

Se δ for o deslocamento vertical do ponto de aplicação de P , então o trabalho realizado por essa força é:

$$W = \frac{1}{2} P \delta$$

v) *cálculo do deslocamento:*

Usando o Princípio do Trabalho e da Energia:

$$W = U = U^* \Rightarrow \frac{1}{2} P \delta = \frac{P^2 L^3}{96EI} \Rightarrow \delta = \frac{PL^3}{48EI}$$

7 Barra sob Força Cortante

Se compararmos as expressões (20), (29) e (38) podemos, imaginar, por analogia, uma expressão para o cálculo da energia complementar devida à força cortante em uma barra:

$$U^* = \int_0^L \frac{V^2(x)}{2G(x)A(x)} dx \quad (39)$$

Esta expressão estaria dimensionalmente correta, mas não estaria completa. A energia complementar devida à força cortante depende da forma da seção e deve ser adicionado à expressão (39) um fator f_c , adimensional, que leva em conta a forma da seção transversal. A expressão correta da energia complementar é

$$U^* = \int_0^L f_c(x) \frac{V^2(x)}{2G(x)A(x)} dx \quad (40)$$

Se a barra for prismática, o fator de forma independe da posição x :

$$U^* = f_c \int_0^L \frac{V^2(x)}{2GA} dx \quad (41)$$

A Tabela 1 traz os fatores de forma para alguns dos principais tipos de seções transversais. Não entraremos, aqui, em detalhe a respeito de como são calculados esses fatores de forma, mas esse assunto pode ser encontrado, com detalhe, nos livros de Mecânica dos Sólidos.

Tabela 1 – Fator de forma.

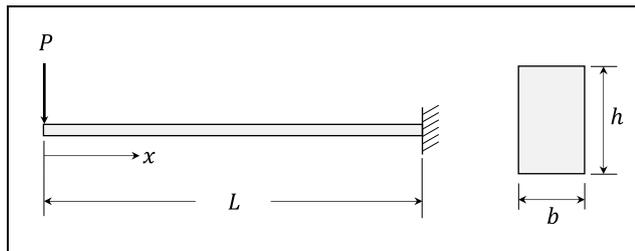
Forma da Seção	Fator de Forma f_c
Retangular cheia	6/5
Circular cheia	10/9
Tubo de parede fina	2
Perfil caixa ou I	A/A_{alma}

A existência de uma força cortante V está relacionada com a existência de flexão, pois a força cortante é a derivada do momento fletor M . Assim, em uma barra sob flexão, haverá energia complementar acumulada pelo momento fletor e energia complementar acumulada por força cortante. Mas, em uma barra, a energia

complementar devida à força cortante normalmente é desprezada porque é muito menor que a energia complementar devida ao momento fletor. O exemplo a seguir mostra esse fato.

Exemplo 6

A barra prismática da figura está engastada em uma das suas extremidades e submetida a uma força vertical P na outra. A seção transversal da barra é retangular, como indicado na figura. Calcule a energia complementar devida ao momento fletor e a energia complementar devida à força cortante. Compare os dois valores.



Resolução:

i) energia complementar devida ao momento fletor:

$$U_M^* = \frac{1}{2EI} \int_0^L M^2(x) dx = \frac{1}{2EI} \int_0^L (-Px)^2 dx = \frac{P^2 L^3}{6EI}$$

$$I = \frac{bh^3}{12} \Rightarrow U_M^* = \frac{2P^2 L^3}{Ebh^3}$$

ii) energia complementar devida à força cortante:

$$U_V^* = \frac{f_c}{2GA} \int_0^L V^2(x) dx = \frac{3}{5GA} \int_0^L (-P)^2 dx = \frac{3P^2 L}{5GA}$$

$$A = bh \Rightarrow U_V^* = \frac{3P^2 L}{5Gbh}$$

iii) comparação das energias:

$$\frac{U_V^*}{U_M^*} = \frac{3P^2 L Ebh^3}{5Gbh 2P^2 L^3} = \frac{3}{10} \frac{E}{G} \left(\frac{h}{L}\right)^2$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \Rightarrow 2 \leq \frac{E}{G} \leq 3$$

$$\frac{U_V^*}{U_M^*} \sim \left(\frac{h}{L}\right)^2 \ll 1$$

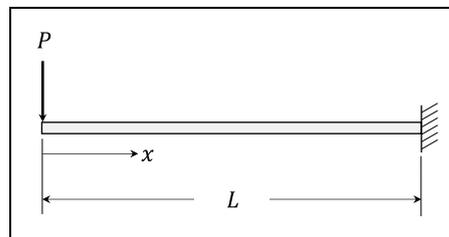
8 Composição de Esforços

Se olharmos as expressões para a energia complementar, (20), (29),(38) e (41), podemos verificar que elas *não são lineares nos esforços*, mas sim *quadráticas*. Assim, se tivermos mais de um esforço aplicado sobre a barra, *não vale a superposição de esforços*, ou seja, temos que aplicar todos eles *antes* de calcular a energia complementar. Vamos verificar isso por meio do exemplo a seguir.

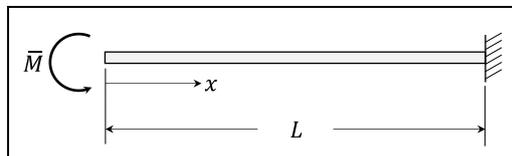
Exemplo 7

Calcular a energia complementar armazenada por uma viga em balanço quando submetida a três tipos de carregamentos diferentes:

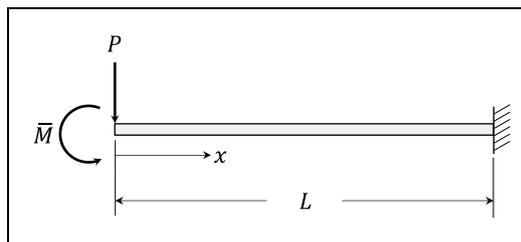
i) uma força vertical P aplicada à sua extremidade livre:



ii) um binário \bar{M} aplicado à sua extremidade livre:



iii) uma força vertical P e um binário \bar{M} aplicados à sua extremidade livre.



Vamos desprezar o efeito da força cortante.

Resolução:

i) *força vertical aplicada:*

$$U_i^* = \frac{1}{2EI} \int_0^L M^2(x) dx = \frac{1}{2EI} \int_0^L (-Px)^2 dx = \frac{P^2 L^3}{6EI}$$

ii) *binário aplicado:*

$$U_{ii}^* = \frac{1}{2EI} \int_0^L M^2(x) dx = \frac{1}{2EI} \int_0^L (-\bar{M})^2 dx = \frac{\bar{M}^2 L}{2EI}$$

iii) *carregamento combinado aplicado:*

$$U_{iii}^* = \frac{1}{2EI} \int_0^L M^2(x) dx = \frac{1}{2EI} \int_0^L (-\bar{M} - Px)^2 dx$$
$$\Rightarrow U_{iii}^* = \frac{P^2 L^3}{6EI} + \frac{P\bar{M}L^2}{2EI} + \frac{\bar{M}^2 L}{2EI}$$

Note que

$$U_{iii}^* \neq U_i^* + U_{ii}^*$$

pois em U_{iii}^* aparece uma parcela devida ao efeito combinado de P e \bar{M} .

9 Teoremas da Energia

Até aqui, usamos o Princípio do Trabalho e da Energia para calcular deslocamentos. Mas você deve ter notado que há limitações, veja os problemas em que ele foi aplicado. Em primeiro lugar, o Princípio do Trabalho e da Energia fornece apenas uma equação, ou seja, permite o cálculo de uma única incógnita. Em segundo lugar, essa incógnita não pode ser qualquer uma, é sempre o deslocamento na direção do esforço considerado, que é o único que pode realizar trabalho para se poder aplicar o princípio.

Mas a energia complementar pode fornecer muito mais informação do que conseguimos com o Princípio do Trabalho e da Energia, surgem os Teoremas da Energia, que veremos a seguir, que estendem muito as aplicações para a energia complementar.

9.1 Teorema de Crotti-Engesser

Suponhamos que um conjunto de cargas (P_1, P_2, \dots, P_n) tenha sido aplicado inicialmente a um corpo e que $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ sejam os deslocamento dos pontos de aplicação dessas cargas, respectivamente, na direção das mesmas. A energia complementar armazenada pode ser escrita como uma função dessas cargas:

$$U^* = U^*(P_1, P_2, \dots, P_n) \quad . \quad (42)$$

Suponhamos, agora, que exclusivamente a carga P_i tenha sofrido um acréscimo dP_i . Haverá, então, um acréscimo na energia complementar dU^* que pode ser escrito como:

$$dU^* = \frac{\partial U^*}{\partial P_i} dP_i \quad . \quad (43)$$

Por outro lado, se δ_i for o deslocamento do ponto de aplicação de P_i na direção de P_i , o trabalho complementar realizado pelo acréscimo de força foi

$$dW^* = \delta_i dP_i \quad . \quad (44)$$

Mas, esse trabalho complementar realizado deve igualar o acréscimo da energia complementar

$$dW^* = dU^* \quad . \quad (45)$$

e, portanto,

$$\delta_i = \frac{\partial U^*}{\partial P_i} \quad . \quad (46)$$

Este é o Teorema de Crotti-Engesser.

9.2 Primeiro Teorema de Castigliano

Suponhamos que um conjunto de cargas (P_1, P_2, \dots, P_n) tenha sido aplicado inicialmente a um corpo e que $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ sejam os deslocamentos dos pontos de aplicação dessas cargas, respectivamente, na direção das mesmas. A energia de deformação armazenada pode ser escrita como uma função desses deslocamentos:

$$U = U(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) \quad . \quad (47)$$

Suponhamos, agora, que exclusivamente o deslocamento δ_i tenha sofrido um acréscimo $d\delta_i$. Haverá, então, um acréscimo na energia de deformação dU que pode ser escrito como:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial \delta_i} d\delta_i \quad . \quad (48)$$

Por outro lado, se P_i for a carga correspondente ao deslocamento δ_i , o trabalho adicional correspondente ao acréscimo de deslocamento foi

$$dW = P_i d\delta_i \quad . \quad (49)$$

Mas, esse trabalho adicional deve igualar o acréscimo da energia de deformação

$$dW = dU \quad . \quad (50)$$

e, portanto,

$$P_i = \frac{\partial U}{\partial \delta_i} \quad . \quad (51)$$

Este é o Primeiro Teorema de Castigliano.

9.3 Segundo Teorema de Castigliano

O Segundo Teorema de Castigliano diz que, para uma estrutura de comportamento elástico linear, submetida a cargas (P_1, P_2, \dots, P_n) que causem deslocamentos $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$ nas direções respectivas,

$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i} \quad . \quad (52)$$

Note que este teorema é equivalente ao de Crotti-Engesser, porque já vimos que, para estruturas de comportamento, elástico linear $U = U^*$.

9.4 Teorema de Castigliano Modificado

Consideremos uma barra prismática submetida a força normal. Usando a expressão da energia complementar(20) em (46) vem

$$\delta_i = \frac{\partial U^*}{\partial P_i} = \frac{1}{2EA} \frac{\partial}{\partial P_i} \left(\int_0^L N^2(x) dx \right) \quad (53)$$

A forma modificada do Teorema de Castigliano consiste em trocar a ordem da derivada com a integral:

$$\delta_i = \frac{\partial U^*}{\partial P_i} = \frac{1}{EA} \int_0^L N(x) \frac{\partial N}{\partial P_i} dx \quad (54)$$

Essa troca torna a solução dos problemas algebricamente mais simples.

Da mesma forma, podemos montar a forma modificada do Teorema de Castigliano para torção, a partir de (29) e (46),

$$\delta_i = \frac{\partial U^*}{\partial P_i} = \frac{1}{GI_p} \int_0^L T(x) \frac{\partial T}{\partial P_i} dx \quad (55)$$

e para flexão, a partir de (38) e (46),

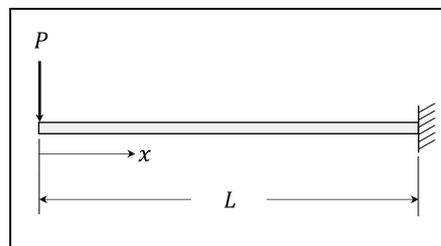
$$\delta_i = \frac{\partial U^*}{\partial P_i} = \frac{1}{EI} \int_0^L M(x) \frac{\partial M}{\partial P_i} dx \quad (56)$$

Exemplo 8

A viga prismática, em balanço, da figura, tem comprimento L , rigidez flexional EI . Na sua extremidade livre está aplicada uma força vertical P . Pedem-se:

- a) o deslocamento vertical δ da extremidade livre devido a P ;
- b) a rotação θ da extremidade livre devida a P .

(Despreze a energia complementar devida à força cortante)



Resolução:

a) *cálculo do deslocamento δ :*

Do Teorema de Castigliano Modificado, com δ tem a direção de P ,

$$\delta = \frac{\partial U^*}{\partial P} = \frac{1}{EI} \int_0^L M(x) \frac{\partial M}{\partial P} dx$$

Mas,

$$M(x) = -Px$$

$$\frac{\partial M}{\partial P} = -x$$

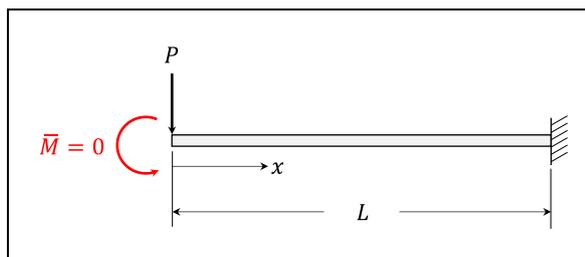
$$\Rightarrow \delta = \frac{1}{EI} \int_0^L Px^2 dx \Rightarrow \delta = \frac{PL^3}{3EI}$$

O sinal positivo indica que o deslocamento tem o mesmo sentido da força P .

Note que este item poderia ter sido resolvido usando o Princípio do Trabalho e da Energia.

b) *Cálculo da rotação θ :*

Como podemos aplicar o Teorema de Castigliano Modificado para calcular a rotação, uma vez que não temos um esforço na direção da rotação? A resposta é muito simples! Um esforço que tem a direção de uma rotação é um binário. Basta aplicar um binário fictício de intensidade nula no ponto em que queremos calcular a rotação, conforme a figura:



Como \bar{M} é nulo, ele não vai influir no resultado. Assim,

$$\theta = \left(\frac{\partial U^*}{\partial \bar{M}} \right)_{\bar{M}=0}$$

Note que devemos anular \bar{M} depois de derivar.

Na forma modificada do Teorema de Castigliano podemos escrever:

$$\theta = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(M(x) \frac{\partial M}{\partial \bar{M}} \right)_{\bar{M}=0} dx$$

Como

$$M(x) = -\bar{M} - Px$$

$$\frac{\partial M}{\partial \bar{M}} = -1$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{1}{EI} \int_0^L (\bar{M} + Px)_{\bar{M}=0} dx = \frac{1}{EI} \int_0^L Px dx \Rightarrow \theta = \frac{PL^2}{2EI}$$

Note que o momento fictício foi fundamental para aplicar o Teorema de Castigliano. Mágica? É como a *pedra da sopa de pedra*; sem a pedra não existe a sopa, mas no final a pedra não influi no sabor da sopa! (Quem não conhece a lenda da sopa de pedra é só buscar no Google)

Note, também, que este item não poderia ser calculado usando o Princípio do Trabalho e da Energia.

10 Princípio da Energia Complementar Mínima

O Princípio da Energia Complementar Mínima é uma consequência direta do Teorema de Crotti-Engesser, que é muito útil para resolver estruturas hiperestáticas.

Antes de formulá-lo, vamos recapitular o conceito de *grau de hiperestaticidade*. Se existem n equações de equilíbrio disponíveis e m reações vinculares, definimos o grau de hiperestaticidade g como a diferença entre o número de incógnitas e o número de equações:

$$g = m - n \quad . \quad (57)$$

Podemos escrever a energia complementar como função das reações vinculares independentes R_i , ou seja,

$$U^* = U^*(R_1, R_2, \dots, R_g) \quad . \quad (58)$$

Note que o número de reações vinculares independentes coincide, sempre, com o grau de hiperestaticidade g . Chamamos a essas reações vinculares independentes de *incógnitas hiperestáticas*. Conhecidas as incógnitas hiperestáticas, podemos calcular as outras reações vinculares usando as equações de equilíbrio.

Os deslocamentos δ_i associados aos vínculos perfeitos são nulos. Assim, pelo Teorema de Crotti-Engesser,

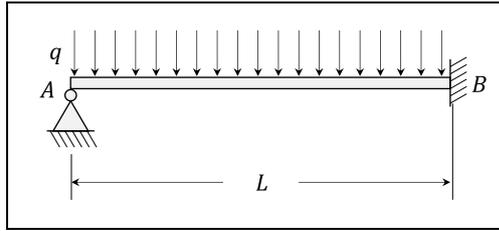
$$\frac{\partial U^*}{\partial R_i} = 0 \quad , \quad (59)$$

para i variando de 1 até g . Esta condição diz que a energia complementar é estacionária na posição de equilíbrio. Pode-se mostrar que, se o equilíbrio for *estável*, a energia complementar será mínima na posição de equilíbrio.

Exemplo 9

A barra prismática da figura está apoiada em A e engastada em B. Ela tem rigidez flexional EI , comprimento L e está submetida a uma força uniformemente distribuída de magnitude q . Pedem-se:

- Calcular as reações vinculares;
- Calcular a rotação no ponto A.

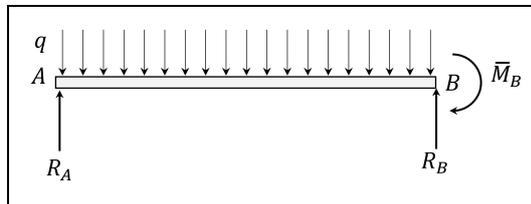


Resolução:

Note que este problema deve ser resolvido na ordem dos itens do enunciado: as reações vinculares devem ser calculadas antes da rotação.

a) *cálculo das reações vinculares*

Começamos desenhando o diagrama de corpo livre:



em seguida montamos as equações de equilíbrio:

$$\sum F_V = 0 \Rightarrow R_A + R_B = qL$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow R_A L + \bar{M}_B = \frac{qL^2}{2}$$

São duas equações de equilíbrio e três reações vinculares, R_A , R_B e \bar{M}_B , ou seja,

$$g = 1$$

Então, temos que escolher apenas uma das reações como incógnita hiperestática. Neste problema podemos escolher qualquer uma delas uma vez que tendo uma podemos calcular as outras usando as equações de equilíbrio.

Escolhamos R_A como incógnita hiperestática. Na energia complementar será a única que pode aparecer. Como temos um só grau de hiperestaticidade, o Princípio da Energia Complementar Mínima fornecerá apenas uma equação:

$$\frac{\partial U^*}{\partial R_A} = 0$$

Desprezando a energia complementar devida à força cortante, teremos apenas energia de flexão. Portanto, a equação do Princípio da Energia Complementar Mínima pode ser escrita na forma modificada:

$$\int_0^L M(x) \frac{\partial M}{\partial R_A} dx = 0$$

O momento fletor, em função de R_A pode ser escrito como:

$$M(x) = R_A x - \frac{qx^2}{2}$$

e, portanto,

$$\frac{\partial M}{\partial R_A} = x$$

Substituindo na expressão do Princípio da Energia Complementar Mínima apresentado anteriormente, teremos:

$$\int_0^L \left(R_A x - \frac{qx^2}{2} \right) x dx = 0 \Rightarrow R_A = \frac{3}{8} qL$$

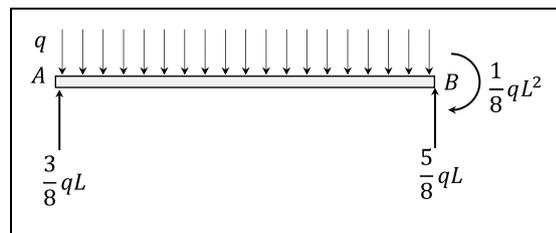
Voltando às equações de equilíbrio, calculamos as outras duas reações:

$$R_B = \frac{5}{8} qL$$

e

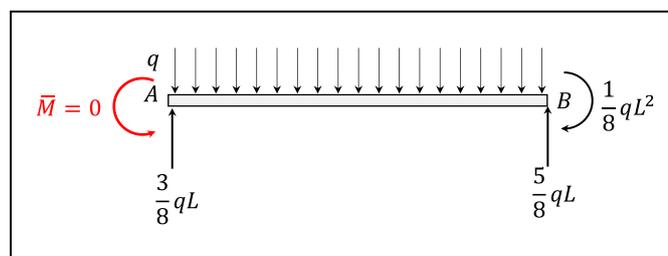
$$\bar{M}_B = \frac{1}{8} qL^2$$

Após o cálculo das reações, podemos montar o seguinte diagrama de corpo livre:



b) cálculo da rotação:

Para calcular a rotação, colocamos um momento fictício \bar{M} nulo em A:



Assim,

$$\theta = \left(\frac{\partial U^*}{\partial \bar{M}} \right)_{\bar{M}=0}$$

Na forma modificada do Teorema de Castigliano podemos escrever:

$$\theta = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(M(x) \frac{\partial M}{\partial \bar{M}} \right)_{\bar{M}=0} dx$$

Como

$$M(x) = -\bar{M} + \frac{3ql}{8}x - \frac{qx^2}{2}$$

$$\frac{\partial M}{\partial \bar{M}} = -1$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(\bar{M} - \frac{3ql}{8}x + \frac{qx^2}{2} \right)_{\bar{M}=0} dx \Rightarrow \theta = -\frac{qL^3}{48EI}$$

11 Estruturas Simétricas

Neste capítulo vamos estudar as *estruturas simétricas*. Uma estrutura é simétrica quando pode ser dividida por um plano em duas partes, sendo cada uma das partes uma *imagem especular* da outra. Esse plano que divide a estrutura em duas partes é o *plano de simetria* da estrutura.

O fato de uma estrutura ser simétrica pode ser aproveitado para a solução de problemas. Para isso vamos enunciar três propriedades:

Propriedade 1:

Um carregamento simétrico produz sobre uma estrutura simétrica um efeito simétrico.

Entenda-se aqui “efeito” como deslocamentos e reações vinculares.

Como consequência dessa propriedade, se uma estrutura simétrica está sob um carregamento simétrico, então, *para um ponto que pertence ao plano de simetria*:

- os deslocamentos perpendiculares ao plano de simetria são nulos;
- as rotações paralelas ao plano de simetria são nulas.

Propriedade 2:

Um carregamento antissimétrico produz sobre uma estrutura simétrica um efeito antissimétrico.

Como consequência dessa propriedade, se uma estrutura simétrica está sob um carregamento antissimétrico, então, *para um ponto que pertence ao plano de simetria*:

- os deslocamentos paralelos ao plano de simetria são nulos;
- as rotações perpendiculares ao plano de simetria são nulas.

Propriedade 3:

Todo carregamento pode ser decomposto na soma de um carregamento simétrico com um antissimétrico.

Para ilustrar essa última propriedade veja os exemplos da Figura 20 até a Figura 26.

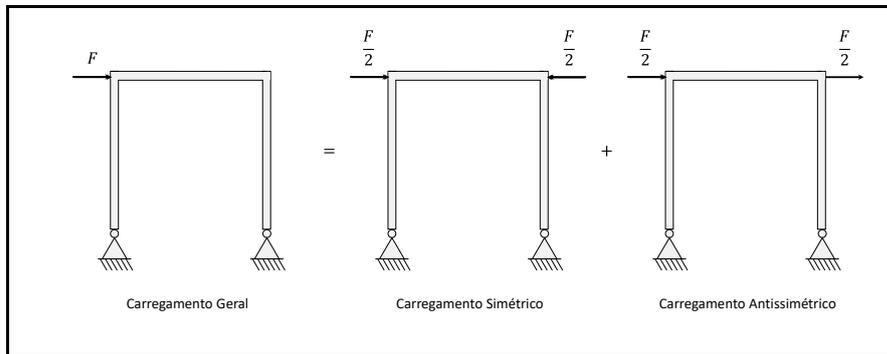


Figura 20 – Decomposição de um carregamento geral em um carregamento simétrico e outro antissimétrico.

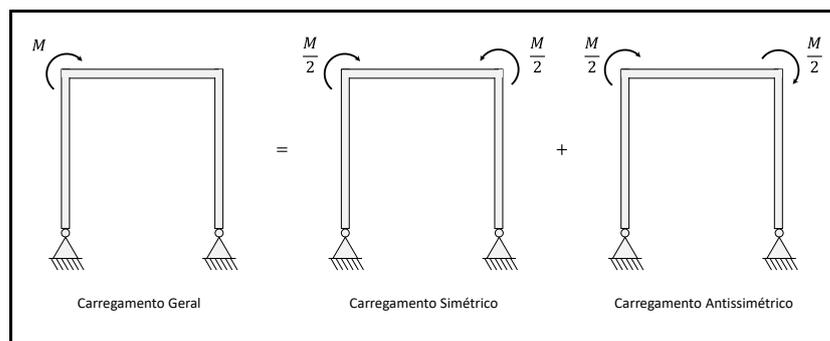


Figura 21 – Decomposição de um carregamento geral em um carregamento simétrico e outro antissimétrico.

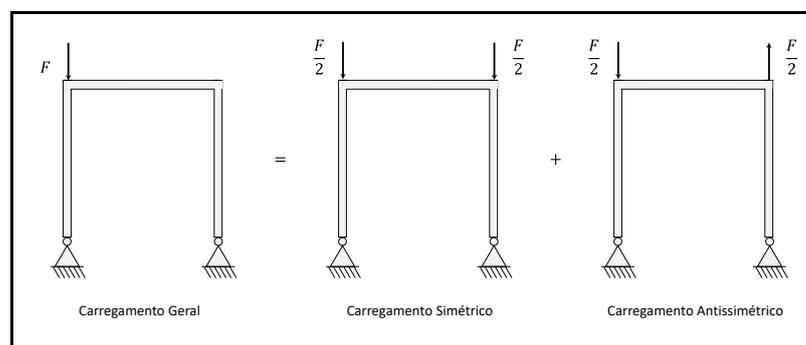


Figura 22 – Decomposição de um carregamento geral em um carregamento simétrico e outro antissimétrico.

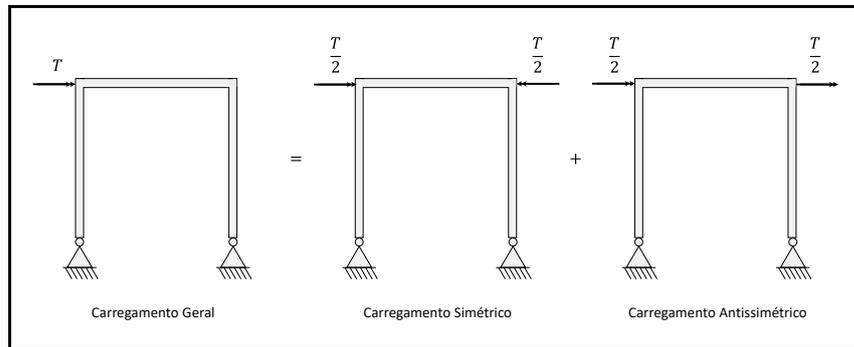


Figura 23 – Decomposição de um carregamento geral em um carregamento simétrico e outro antissimétrico.

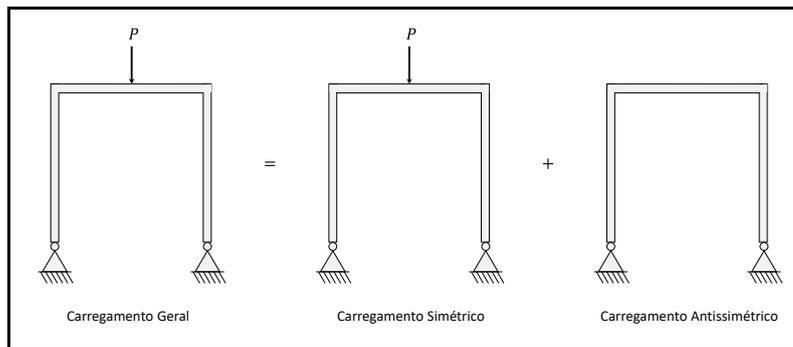


Figura 24 – Decomposição de um carregamento geral em um carregamento simétrico e outro antissimétrico.

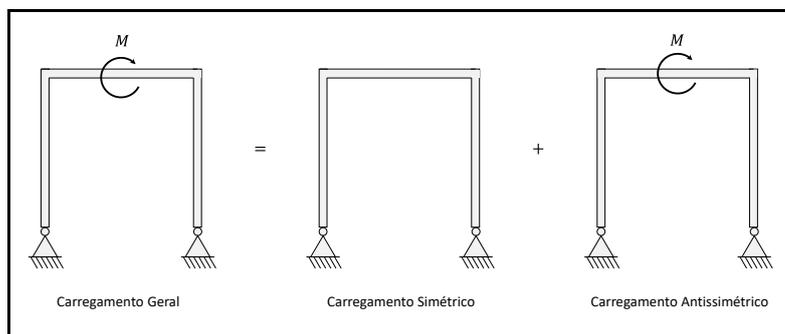


Figura 25 – Decomposição de um carregamento geral em um carregamento simétrico e outro antissimétrico.

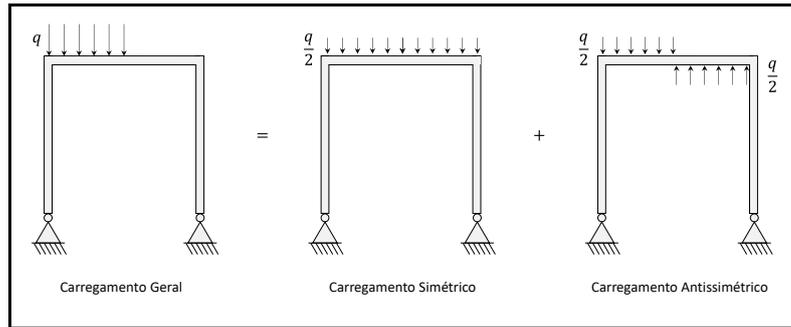


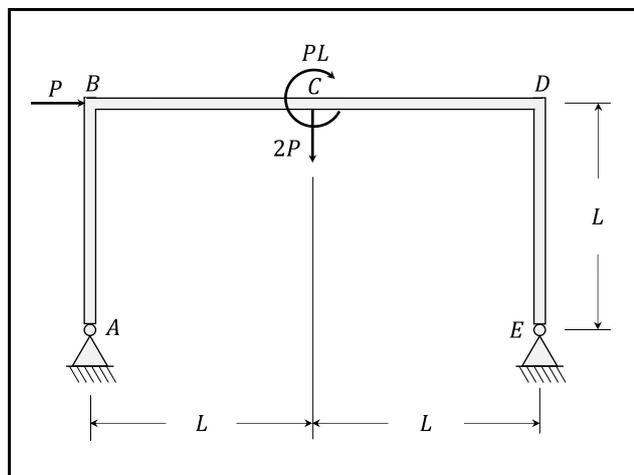
Figura 26 – Decomposição de um carregamento geral em um carregamento simétrico e outro antissimétrico.

Usando as três propriedades podemos cortar uma estrutura simétrica no plano de simetria e resolver apenas metade dela, como será visto no exemplo a seguir.

Exemplo 10

O pórtico da figura é formado por barras prismáticas de mesma rigidez flexional EI . Desprezando as energias complementares devidas às forças normais e às forças cortantes, determine:

- a) o deslocamento vertical da seção C ;
- b) a rotação da seção C .

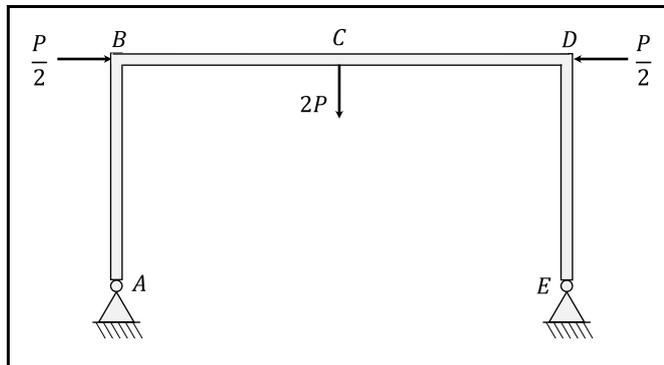


Resolução:

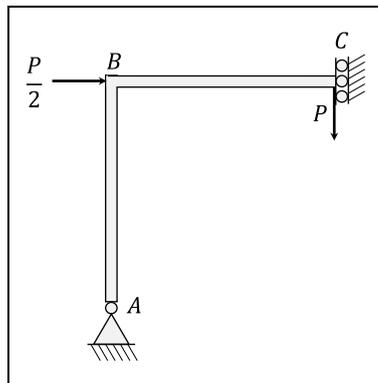
Pelas propriedades apresentadas anteriormente podemos concluir que apenas a parte simétrica do carregamento produz deslocamento vertical em C e apenas a parte antissimétrica do carregamento produz rotação em C . Assim, se separarmos o carregamento em uma parte simétrica e outra antissimétrica, podemos resolver os itens a e b de forma separada.

a) Cálculo do deslocamento vertical em C , δ_C :

A figura a seguir apresenta apenas a parte simétrica do carregamento:

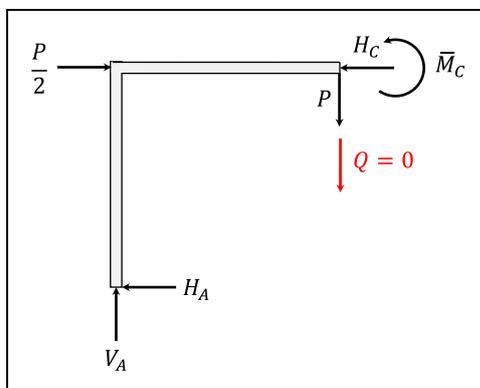


Para resolver o problema, podemos cortar a estrutura pela metade e analisar apenas o lado esquerdo. Ao cortar a estrutura em C , temos que representar o efeito da parte que estamos cortando por vínculos adequados.



Note que em C foi colocada só metade da força $2P$, a outra metade fica no lado direito da estrutura. O vínculo que foi colocado em C é um *engaste deslizante*, que permite deslocamento vertical, mas não permite nem rotação, nem deslocamento horizontal, para respeitar as propriedades de simetria.

O diagrama de corpo livre da meia estrutura está representado na figura a seguir:



Note que foi adicionada uma força vertical fictícia Q , nula, que será usada no cálculo do deslocamento vertical em C .

A partir do diagrama de corpo livre podemos montar as equações de equilíbrio:

$$\sum F_H = 0 \Rightarrow H_A + H_C = \frac{P}{2}$$

$$\sum F_V = 0 \Rightarrow V_A = P + Q$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \bar{M}_C + H_C L - PL - \frac{P}{2}L - QL = 0$$

Temos quatro reações, H_A , V_A , H_C e \bar{M}_C , e três equações. Assim:

$$g = 1$$

e, portanto, temos que escolher uma das reações como incógnita hiperestática. Note que V_A não pode ser escolhida, porque o seu valor já está definido na equação de equilíbrio de forças verticais. Vamos escolher \bar{M}_C . Mas poderia ser, também, H_A ou H_C .

Para calcular a energia complementar, vamos dividir a estrutura em dois trechos AB e BC :

$$U^* = U_{AB}^* + U_{BC}^*$$

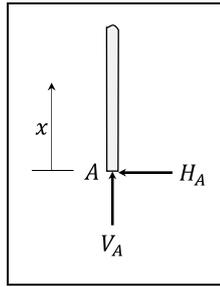
e, portanto, o Princípio da Energia Complementar, na forma modificada, pode ser colocado como:

$$\int_0^L M_{AB}(x) \frac{\partial M_{AB}}{\partial \bar{M}_C} dx + \int_0^L M_{BC}(x) \frac{\partial M_{BC}}{\partial \bar{M}_C} dx = 0$$

Lembre que nas expressões de M_{AB} e M_{BC} a única reação que pode aparecer é a incógnita hiperestática escolhida, \bar{M}_C . Para eliminar as outras reações devem ser utilizadas as equações de equilíbrio:

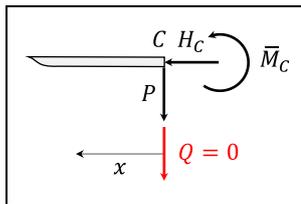
$$H_C = \frac{3P}{2} - \frac{\bar{M}_C}{L} + Q$$

$$H_A = -P + \frac{\bar{M}_C}{L} - Q$$



$$M_{AB}(x) = H_A x = -Px + \frac{\bar{M}_C}{L} x - Qx$$

$$\frac{\partial M_{AB}}{\partial \bar{M}_C} = \frac{x}{L}$$



$$M_{BC}(x) = \bar{M}_C - Px - Qx$$

$$\frac{\partial M_{BC}}{\partial \bar{M}_C} = 1$$

Lembrando que Q é nula, o Princípio da Energia Complementar Mínima implica que

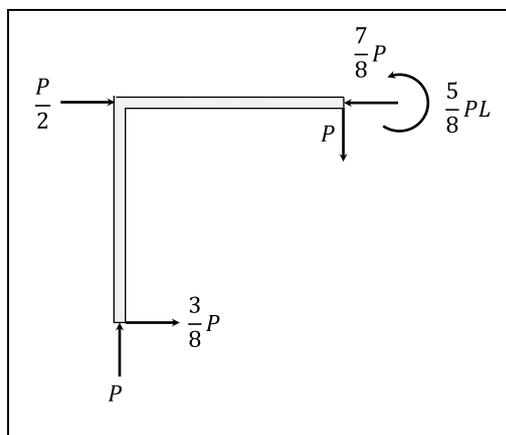
$$\int_0^L \left(-Px + \frac{\bar{M}_C}{L} x \right) \frac{x}{L} dx + \int_0^L (\bar{M}_C - Px) dx = 0$$

$$\Rightarrow \bar{M}_C = \frac{5}{8} PL$$

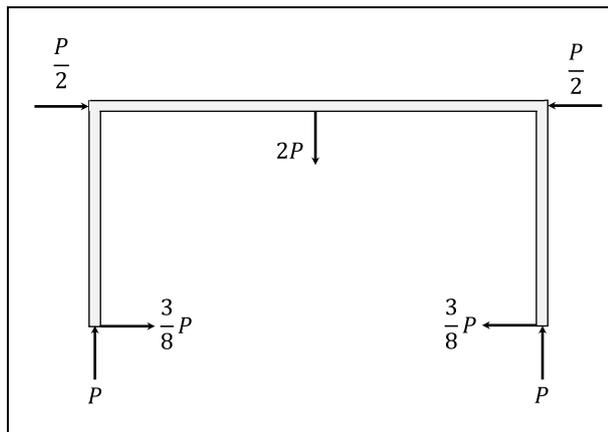
$$\Rightarrow H_C = \frac{7}{8} P$$

$$\Rightarrow H_A = -\frac{3}{8} P$$

Depois de calcular as forças vinculares, o DCL da meia estrutura ficou:



E da estrutura inteira, para a parte simétrica do carregamento:



Pelo Teorema de Crotti-Engesser, o deslocamento vertical do ponto C será dado por:

$$\delta_C = \left(\frac{\partial U^*}{\partial Q} \right)_{Q=0}$$

Dividindo a estrutura nos mesmos dois trechos anteriores, podemos escrever, na forma modificada,

$$\delta_C = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(M_{AB}(x) \frac{\partial M_{AB}}{\partial Q} \right)_{Q=0} dx + \frac{1}{EI} \int_0^L \left(M_{BC}(x) \frac{\partial M_{BC}}{\partial Q} \right)_{Q=0} dx$$

Para o cálculo de $M_{AB}(x)$ e $M_{BC}(x)$, podem ser usadas as mesmas expressões anteriores, substituindo o valor das reações que já foram calculadas. Assim:

$$M_{AB}(x) = -\frac{3}{8}Px - Qx$$

$$\frac{\partial M_{AB}}{\partial Q} = -x$$

$$M_{BC}(x) = \frac{5}{8}PL - Px - Qx$$

$$\frac{\partial M_{BC}}{\partial Q} = -x$$

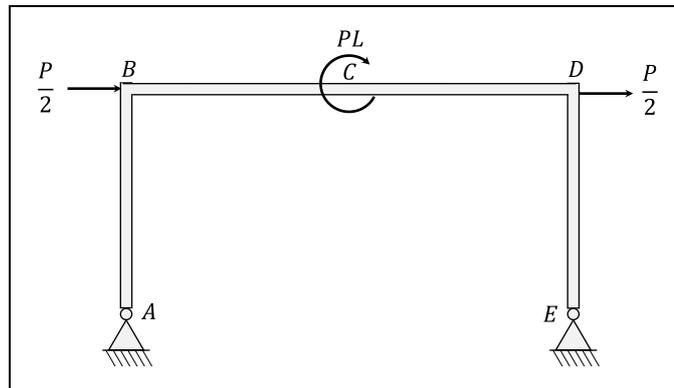
Assim,

$$\delta_C = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(-\frac{3}{8}Px \right) (-x) dx + \frac{1}{EI} \int_0^L \left(\frac{5}{8}PL - Px \right) (-x) dx$$

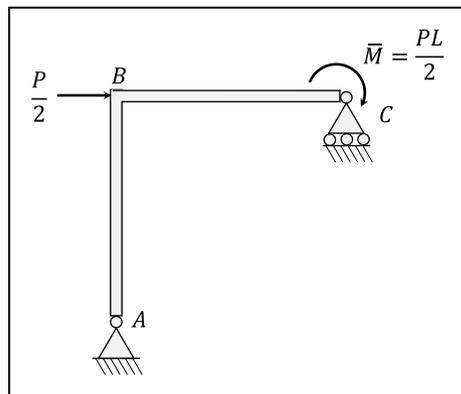
$$\Rightarrow \delta_C = \frac{7}{48} \frac{PL^3}{EI}$$

b) Cálculo da rotação da seção transversal C , $\delta\theta_C$:

A figura a seguir apresenta apenas a parte antissimétrica do carregamento:

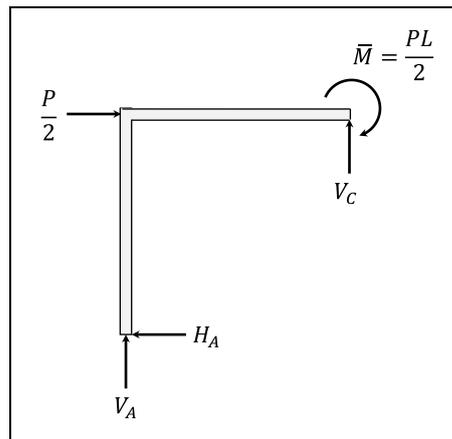


Para resolver o problema, podemos cortar a estrutura pela metade e analisar apenas o lado esquerdo. Ao cortar a estrutura em C , temos que representar o efeito da parte que estamos cortando por vínculos adequados.



Note que o vínculo colocado em C é um apoio simples, porque o único movimento que não acontece no caso antissimétrico é o deslocamento vertical. Note, também, que foi introduzida a variável \bar{M} que torna o cálculo da rotação conceitualmente mais simples.

O diagrama de corpo livre da meia estrutura está representado na figura a seguir:



A partir do diagrama de corpo livre podemos montar as equações de equilíbrio:

$$\sum F_H = 0 \Rightarrow H_A = \frac{P}{2}$$

$$\sum F_V = 0 \Rightarrow V_A + V_C = 0$$

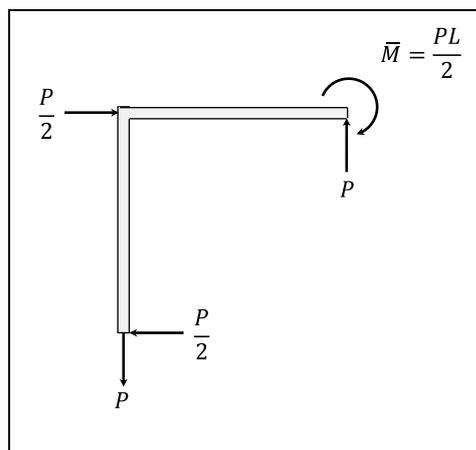
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -\bar{M} + V_C L - \frac{P}{2} L = 0$$

Temos três equações e três reações, H_A , V_A e V_C . O caso antissimétrico é isostático e as reações podem ser calculadas apenas pelas equações de equilíbrio. Assim:

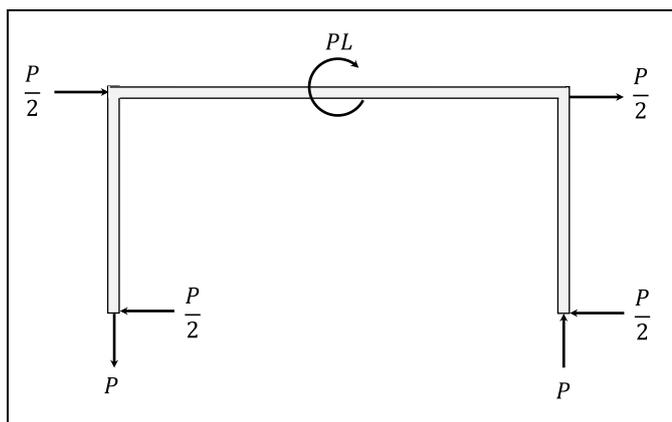
$$V_C = \frac{\bar{M}}{L} + \frac{P}{2} \Rightarrow V_C = P$$

$$V_A = -\frac{\bar{M}}{L} - \frac{P}{2} \Rightarrow V_A = -P$$

Após o cálculo das reações vinculares, o DCL da meia estrutura ficou:



E da estrutura inteira, para a parte anitssimétrica do carregamento:

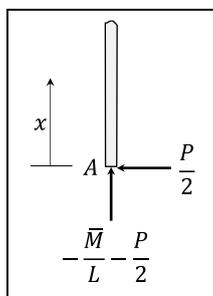


Pelo Teorema de Crotti-Engesser, a rotação da seção C será dada por:

$$\theta_C = \left(\frac{\partial U^*}{\partial \bar{M}} \right)_{\bar{M}=\frac{PL}{2}}$$

Dividindo a estrutura nos mesmos dois trechos anteriores, podemos escrever, na forma modificada,

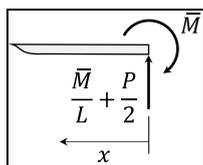
$$\theta_C = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(M_{AB}(x) \frac{\partial M_{AB}}{\partial Q} \right)_{\bar{M}=\frac{PL}{2}} dx + \frac{1}{EI} \int_0^L \left(M_{BC}(x) \frac{\partial M_{BC}}{\partial Q} \right)_{\bar{M}=\frac{PL}{2}} dx$$



$$M_{AB}(x) = \frac{P}{2} x$$

$$\frac{\partial M_{AB}}{\partial \bar{M}} = 0$$

(este trecho não vai colaborar para o cálculo da rotação)



$$M_{BC}(x) = -\bar{M} + \left(\frac{\bar{M}}{L} + \frac{P}{2} \right) x$$

$$\frac{\partial M_{BC}}{\partial \bar{M}} = -1 + \frac{x}{L}$$

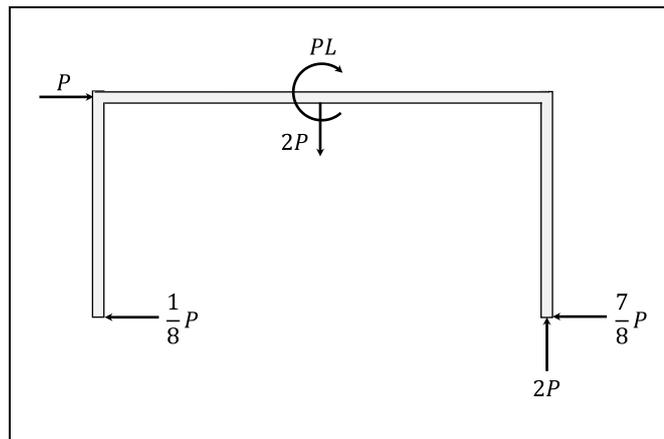
Portanto,

$$\theta_c = \frac{1}{EI} \int_0^L \left[\left(-\bar{M} + \left(\frac{\bar{M}}{L} + \frac{P}{2} \right) x \right) \left(-1 + \frac{x}{L} \right) \right]_{\bar{M}=\frac{PL}{2}} dx$$

$$\Rightarrow \theta_c = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(-\frac{PL}{2} + Px \right) \left(-1 + \frac{x}{L} \right) dx$$

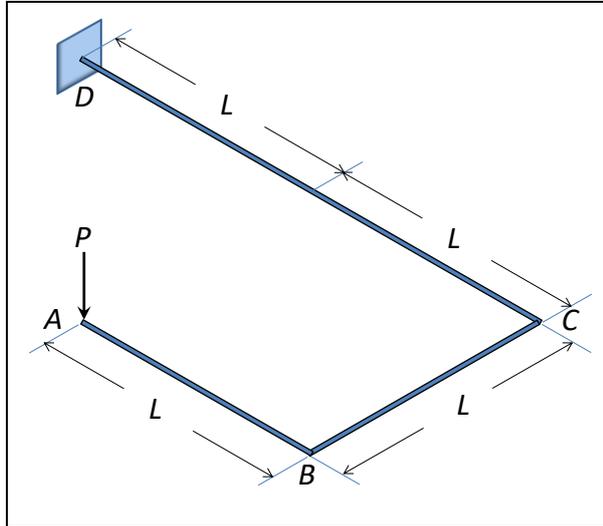
$$\Rightarrow \theta_c = \frac{PL^2}{12EI}$$

Por último, se quisermos montar o diagrama de corpo livre da estrutura completa basta somar os dos casos simétrico e antissimétrico:



12 Exercícios Resolvidos

Exercício 1:

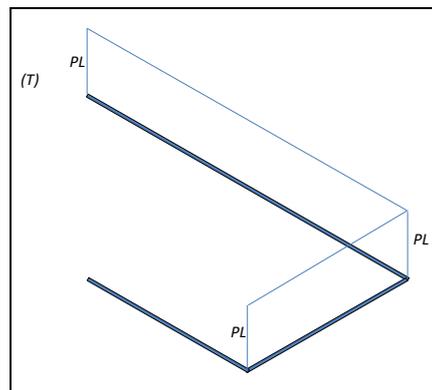
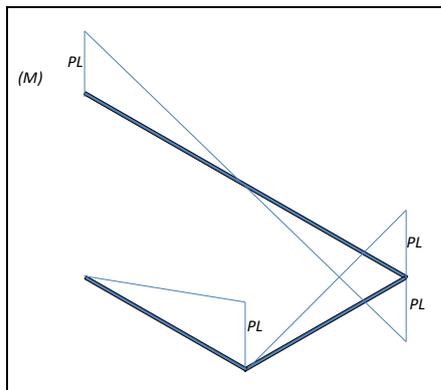


A estrutura horizontal da figura é formada por um arame de peso desprezível, dobrado em ângulos de 90° , e está engastada na sua extremidade D. Usando o Princípio do Trabalho e da Energia, pede-se calcular o deslocamento vertical sofrido pela extremidade A quando nela é aplicada uma força P, desprezando a energia devida às forças cortantes.

São dados: E e I

Fazer: $G = E/3$ e $I_p = 2I$

Resolução:



Desprezando a parcela devida à força cortante, a energia complementar total será a soma da energia complementar devida ao momento fletor U_M^* com a energia devida ao momento de torção U_T^* :

$$U^* = U_M^* + U_T^*$$

Mas:

$$U_M^* = 4 \left(\frac{1}{2EI} \int_0^L (Px)^2 dx \right)$$

$$\Rightarrow U_M^* = \frac{2 P^2 L^3}{3 EI}$$

e

$$U_T^* = 3 \left(\frac{1}{2GI_p} \int_0^L (PL)^2 dx \right) = \frac{3 P^2 L^3}{2 GI_p}$$

$$\Rightarrow U_T^* = \frac{9 P^2 L^3}{4 EI}$$

$$\Rightarrow U^* = \frac{35 P^2 L^3}{12 EI}$$

Pelo Princípio do Trabalho e da Energia $W = U$ e, como o material é elástico linear, $U = U^*$. Então

$$W = U^*$$

A única força que realiza trabalho é P e seu trabalho é:

$$W = \frac{1}{2} P \delta_A$$

onde δ_A é o deslocamento vertical do ponto A . Então:

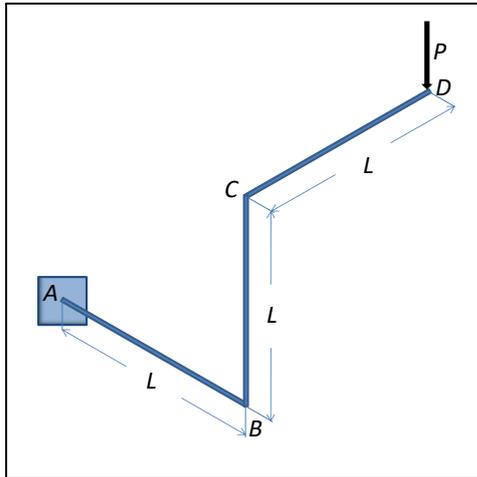
$$\frac{1}{2} P \delta_A = \frac{35 P^2 L^3}{12 EI}$$

$$\Rightarrow \delta_A = \frac{35 PL^3}{6 EI}$$

Exercício 2:

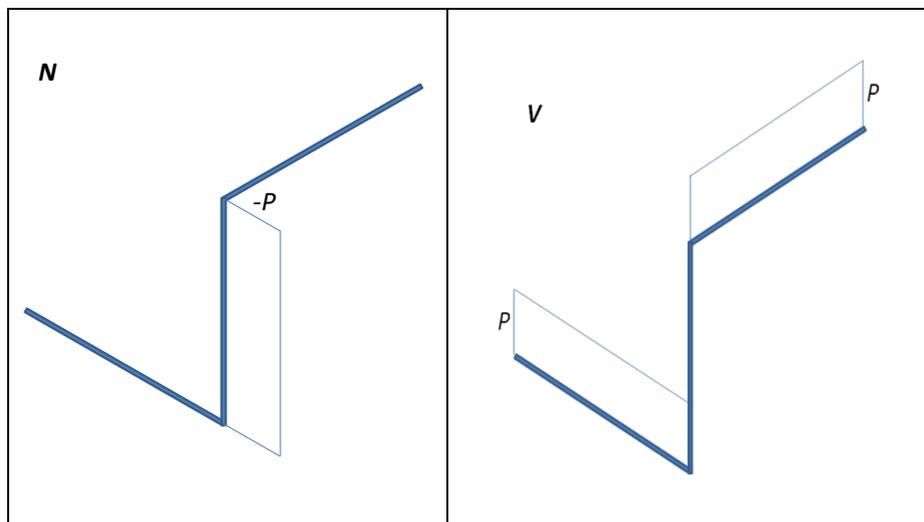
A estrutura da figura é formada pelo arame ABCD, de seção circular e comprimento $3L$, dobrado em ângulos retos e engastado no ponto A . Em D está aplicada uma força P vertical. São dadas: a rigidez axial EA , a rigidez à flexão EI e a rigidez à torção GI_p do arame. Pede-se:

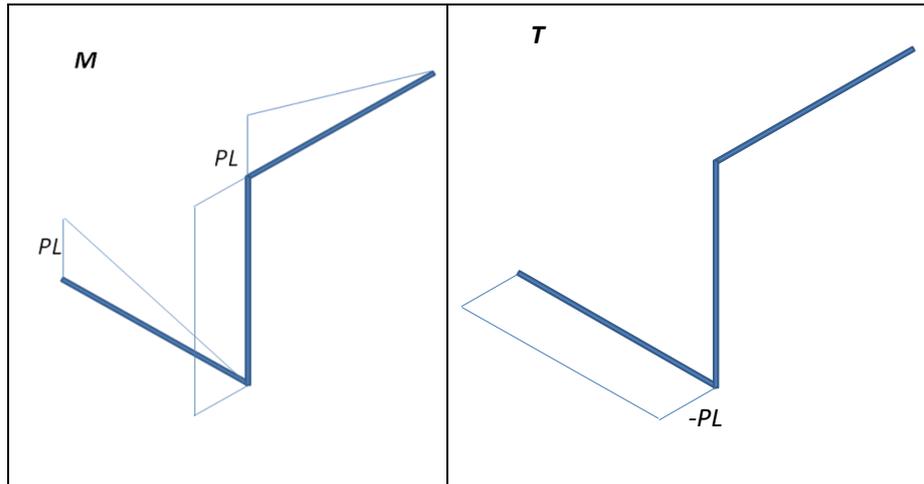
- a) desenhe os diagramas de esforços solicitantes;
- b) calcule a energia complementar devida à força P , desprezando o efeito da força cortante;
- c) usando o Princípio do Trabalho e da Energia, calcule o deslocamento vertical do ponto D devido à força P ;
- d) justifique a importância da energia complementar devida à força normal no cálculo do deslocamento vertical em D .



Resolução:

- a) Diagramas de esforços solicitantes:





b)

i) Energia complementar devida à força normal:

$$U_N^* = U_{BC}^* = \frac{P^2 L}{2EA}$$

ii) Energia complementar devida ao momento fletor:

$$U_M^* = U_{AB}^* + U_{BC}^* + U_{CD}^* = 2U_{AB}^* + U_{BC}^*$$

$$U_{AB}^* = \int_0^L \frac{M^2(x)}{2EI} dx = \int_0^L \frac{(Px)^2}{2EI} dx = \frac{P^2 L^3}{6EI}$$

$$U_{BC}^* = \frac{M^2 L}{2EI} = \frac{P^2 L^3}{2EI}$$

$$\Rightarrow U_M^* = \frac{5P^2 L^3}{6EI}$$

iii) Energia complementar devida ao momento de torção:

$$U_T^* = U_{AB}^* = \frac{T^2 L}{2GI_p} = \frac{P^2 L^3}{2GI_p}$$

iv) Energia complementar total:

$$U^* = U_N^* + U_M^* + U_T^*$$

$$\Rightarrow U^* = \frac{P^2 L}{2EA} + \frac{5P^2 L^3}{6EI} + \frac{P^2 L^3}{2GI_p}$$

c) Princípio do Trabalho e da Energia:

$$W = U = U^*$$

$$W = \frac{1}{2} P \delta$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{P^2 L}{EA} + \frac{5P^2 L^3}{3EI} + \frac{P^2 L^3}{GJ}$$

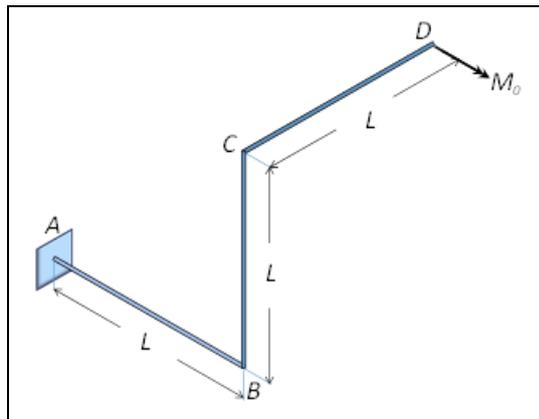
d) A energia complementar devida à força normal não é importante pois, sendo R o raio das barras,

$$\frac{U_N^*}{U_M^*} \approx \left(\frac{R}{L}\right)^2 \ll 1$$

Exercício 3:

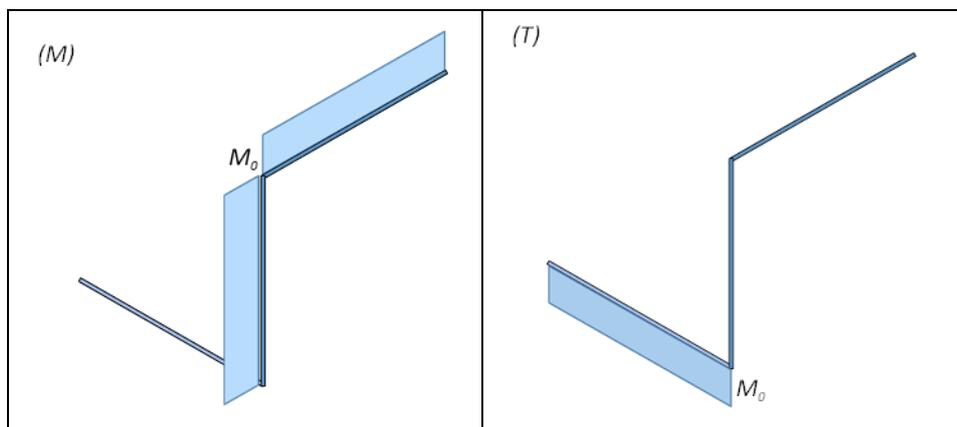
A estrutura da figura é formada pelo arame ABCD, de seção circular e comprimento $3L$, dobrado em ângulos retos e engastado no ponto A. Em D está aplicado um binário de magnitude M_0 . São dadas: a rigidez à flexão EI e a rigidez à torção GI_P do arame. Pedem-se:

- os diagramas de esforços solicitantes;
- a energia complementar devida a M_0 ;
- a rotação no ponto D devida a M_0 , usando o Princípio do Trabalho e da Energia.



Resolução:

a)



b)

$$U^* = U_{flexão}^* + U_{torção}^*$$

$$U_{flexão}^* = 2 \frac{M_0^2 L}{2EI}; \quad U_{torção}^* = \frac{M_0^2 L}{2GI_p}$$

$$\Rightarrow U^* = M_0^2 L \left(\frac{1}{EI} + \frac{1}{2GI_p} \right)$$

c)

$$W = U; \quad W = \frac{1}{2} M_0 \theta_0$$

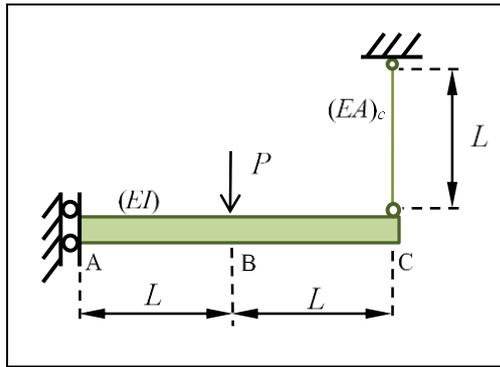
$$\Rightarrow \theta_0 = M_0 L \left(\frac{2}{EI} + \frac{1}{GI_p} \right)$$

Exercício 4:

A estrutura da figura é formada por uma viga uniforme ABC, de comprimento total $2L$, seção transversal retangular ($b \times h$), feita com material de módulo de elasticidade E , e é submetida a um único esforço vertical de intensidade P , aplicado no meio do vão. Considerando que a extremidade C esteja ligada a um cabo de rigidez axial $(EA)_c$ e comprimento L , pede-se determinar o deslocamento vertical em B (expressão literal e valor numérico), após a aplicação da carga, utilizando o Princípio do Trabalho e da Energia.

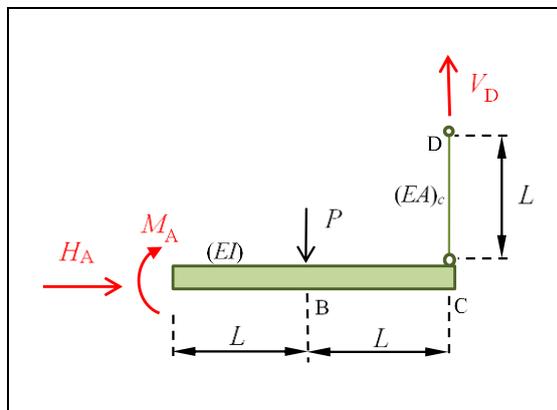
Dados:

$$P = 2 \text{ kN}, \quad L = 1,0 \text{ m}, \quad b = 5 \text{ cm}, \quad (h/L) = 0,1, \quad E = 200 \text{ GPa}, \quad (EA)_c = 1000 \text{ kN}$$



Resolução:

A figura ilustra o diagrama de corpo livre da estrutura fornecida:



A estrutura é isostática e, portanto, todas as reações vinculares podem ser obtidas a partir das equações de equilíbrio estático, a saber:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_D = P$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_D \cdot 2L = PL + M_A \Rightarrow M_A = PL$$

A aplicação do Princípio do Trabalho e da Energia para a determinação do deslocamento vertical em B fornece (para estruturas com comportamento elástico-linear):

$$U = U^* = W^* = W$$

onde:

$$W^* = W = \frac{P \delta_{v,B}}{2}$$

e (desprezando a contribuição das forças cortantes no cálculo da energia complementar da viga):

$$U^* = \left(\sum \int \frac{M^2}{2EI} ds \right) \Big|_{viga} + \left(\int \frac{N^2}{2(EA)_c} ds \right) \Big|_{cabo}$$

$$U^* = \int_0^L \frac{(Ps)^2}{2EI} ds + \int_0^L \frac{(PL)^2}{2EI} ds + \int_0^L \frac{(P)^2}{2(EA)_c} ds$$

$$U^* = \frac{P^2 L^3}{6EI} + \frac{P^2 L^3}{2EI} + \frac{P^2 L}{2(EA)_c} = \frac{2P^2 L^3}{3EI} + \frac{P^2 L}{2(EA)_c}$$

Da igualdade entre as quantidades indicadas virá:

$$\frac{P \delta_{v,B}}{2} = \frac{2P^2 L^3}{3EI} + \frac{P^2 L}{2(EA)_c}$$

ou seja:

$$\delta_{v,B} = \frac{4PL^3}{3EI} + \frac{PL}{(EA)_c}$$

Como a seção transversal da viga é retangular, virá:

$$\delta_{v,B} = 16 \frac{P}{Eb} \cdot \left(\frac{L}{h} \right)^3 + \frac{PL}{(EA)_c}$$

Substituindo os valores numéricos dados (para $\delta_{v,B}$ expresso em mm):

$$\delta_{v,B} = \left[16 \frac{2 \cdot 10^3}{200 \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 10^{-2}} \cdot (10)^3 + \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 1}{10^6} \right] \cdot 10^3 mm$$

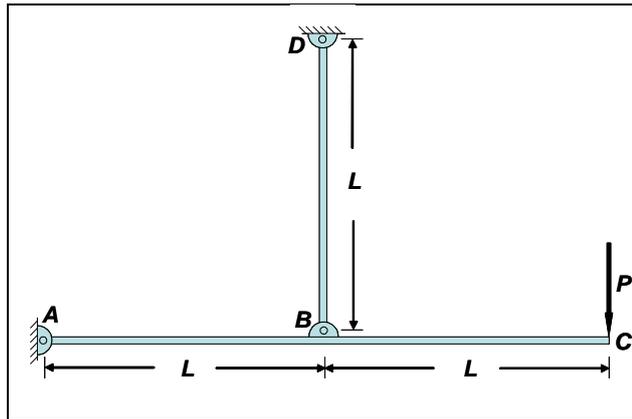
Resultando:

$$\delta_{v,B} = [3,2 + 2] mm$$

$$\delta_{v,B} = 5,2 mm$$

Exercício 5:

A viga ABC da figura está articulada em A e é suportada por um tirante em B. O comprimento da viga é 2L e a sua rigidez flexional é EI. O comprimento do tirante é L e sua rigidez axial é EA. Pedese determinar, usando o Princípio do Trabalho e da Energia, o deslocamento vertical δ que sofre a extremidade livre C da viga quando nela é aplicada uma força vertical P.



Resolução:

a) Força normal no tirante DB:

$$N = 2P$$

b) Energia complementar armazenada no tirante DB:

$$U_{DB}^* = \frac{N^2 L}{2EA} = \frac{2P^2 L}{EA}$$

c) Energia complementar armazenada na barra AC:

$$U_{AC}^* = 2 \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx$$

$$M(x) = -Px$$

$$U_{AC}^* = \frac{P^2 L^3}{3EI}$$

d) Energia complementar total:

$$U^* = U_{AC}^* + U_{DB}^*$$

$$\Rightarrow U^* = \frac{P^2 L^3}{3EI} + \frac{2P^2 L}{EA}$$

e) Trabalho realizado pela força aplicada:

$$W = \frac{P\delta}{2}$$

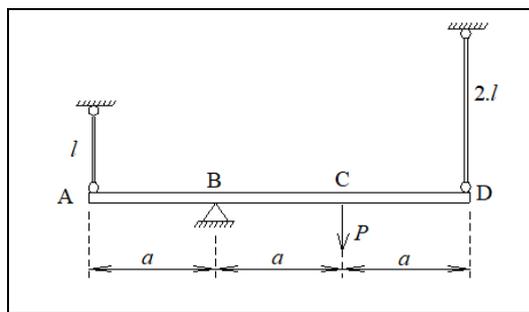
f) Princípio do Trabalho e da Energia

$$\frac{P\delta}{2} = \frac{P^2 L^3}{3EI} + \frac{2P^2 L}{EA}$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{2PL^3}{3EI} + \frac{4PL}{EA}$$

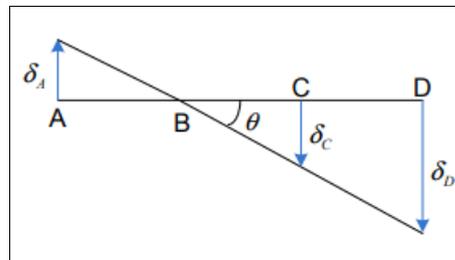
Exercício 6:

A estrutura abaixo é formada por duas hastes verticais, de mesma rigidez axial EA , e uma barra horizontal rígida (indeformável) $ABCD$. As hastes possuem comprimentos l e $2l$, conforme indicado na figura, e estão articuladas à barra horizontal, que se encontra simplesmente apoiada em B . Considerando que uma única força vertical de intensidade P seja aplicada em C , determine o ângulo de rotação (θ) da barra horizontal, utilizando, entre outras relações, o Princípio do Trabalho e Energia. Admita que o material das hastes tenha comportamento elástico-linear e considere a hipótese de linearidade geométrica (pequenas deformações e pequenos deslocamentos).



Resolução:

Consideremos que a estrutura sofreu uma rotação θ . Podemos montar a figura:



a) Trabalho realizado pela força P :

$$W = \frac{P\delta_C}{2} = \frac{P\theta a}{2}$$

b) Energia de deformação:

$$U = U^{(1)} + U^{(2)}$$

onde

$$U^{(1)} = \frac{EA}{l} \frac{\delta_A^2}{2} = \frac{EA}{l} \frac{\theta^2 a^2}{2}$$

e

$$U^{(2)} = \frac{EA \delta_D^2}{2l} = \frac{EA \theta^2 4a^2}{l} = \frac{EA}{l} \theta^2 a^2$$

e, portanto,

$$U = \frac{EA \theta^2 a^2}{l} + \frac{EA}{l} \theta^2 a^2 \Rightarrow U = \frac{3EA}{2l} \theta^2 a^2$$

c) Princípio do Trabalho e da Energia:

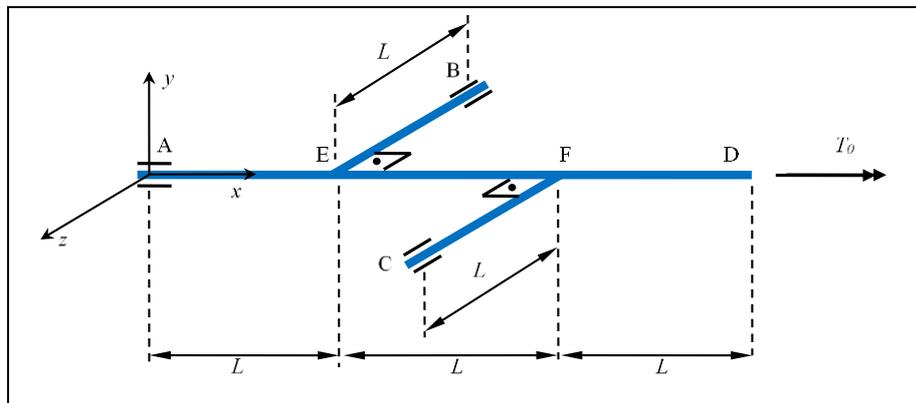
$$W = U \Rightarrow \frac{P\theta a}{2} = \frac{3EA}{2l} \theta^2 a^2 \Rightarrow \theta = \frac{1}{3} \frac{P}{EA} \frac{l}{a}$$

Comentário: Este é um dos raros problemas em que é mais imediato usar a energia de deformação. Mas pode ser resolvido, também, usando a energia complementar.

Exercício 7:

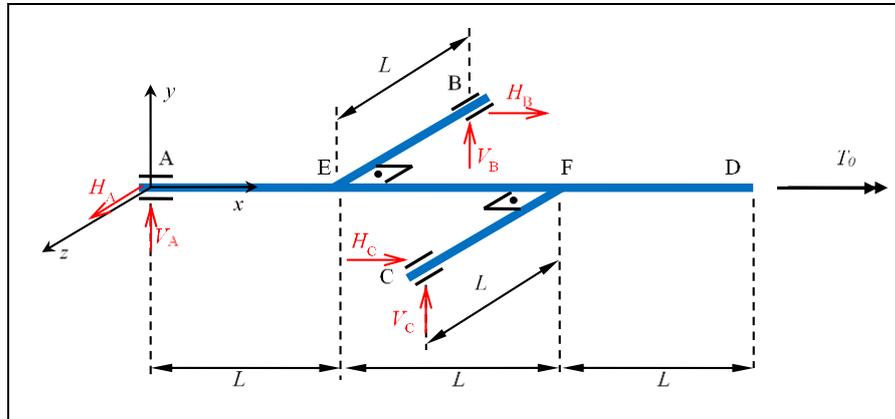
A estrutura indicada na figura é formada por barras de seção transversal circular cheia sendo dados: EI , GI_p , GA e seu fator de forma f_c . Todas as barras estão dispostas no plano horizontal xz e todas as ligações entre elas são rígidas, sendo seus comprimentos: $m(AD) = 3L$ e $m(BE) = m(CF) = L$. Os únicos vínculos, nos pontos A, B e C, são constituídos por anéis que podem fornecer duas componentes de força em direções ortogonais ao eixo da barra em que se encontram. O único esforço aplicado à estrutura é um momento de torção de magnitude T_0 . Pedem-se:

- o diagrama de corpo livre final da estrutura com todos os esforços vinculares (em função de T_0) indicados e os diagramas de esforços solicitantes (V , M , e T) finais;
- as parcelas de energia complementar devidas às forças cortantes (U_V^*), aos momentos fletores (U_M^*) e aos momentos de torção (U_T^*);
- o ângulo de giro da seção D.



Resolução:

- a) O diagrama de corpo livre da estrutura, com as reações vinculares a serem determinadas, fica:



Do equilíbrio de forças nas três direções, temos:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_B + H_C = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_A + V_B + V_C = 0$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

Do equilíbrio de momentos (tomando A como pólo) em relação aos três eixos, temos:

$$\sum M_{Ax} = 0 \Rightarrow T_0 + V_B \cdot L - V_C \cdot L = 0$$

$$\sum M_{Ay} = 0 \Rightarrow H_C \cdot L - H_B \cdot L = 0$$

$$\sum M_{Az} = 0 \Rightarrow V_B \cdot L + V_C \cdot 2L = 0$$

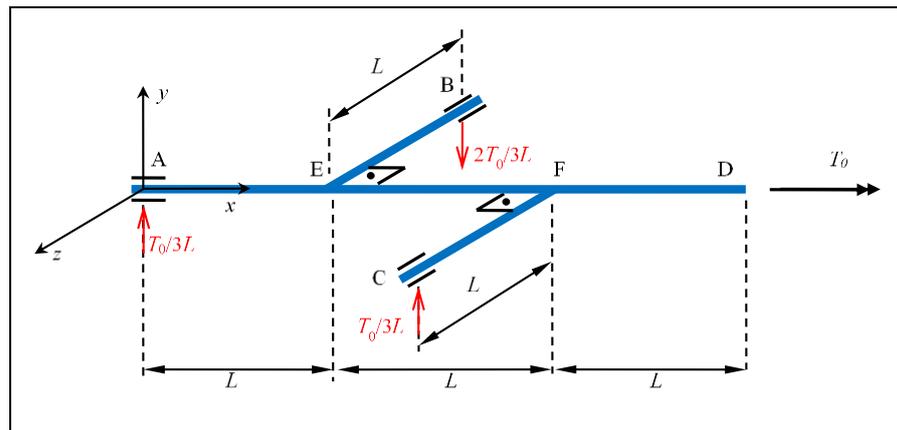
Da solução do sistema de equações lineares, resulta:

$$H_A = H_B = H_C = 0$$

e

$$V_A = \frac{T_0}{3L}, \quad V_B = -\frac{2T_0}{3L}, \quad V_C = \frac{T_0}{3L}$$

Assim, o diagrama de corpo livre final fica:



e os diagramas de esforços solicitantes ficam:

Diagrama de Forças Cortantes (V):

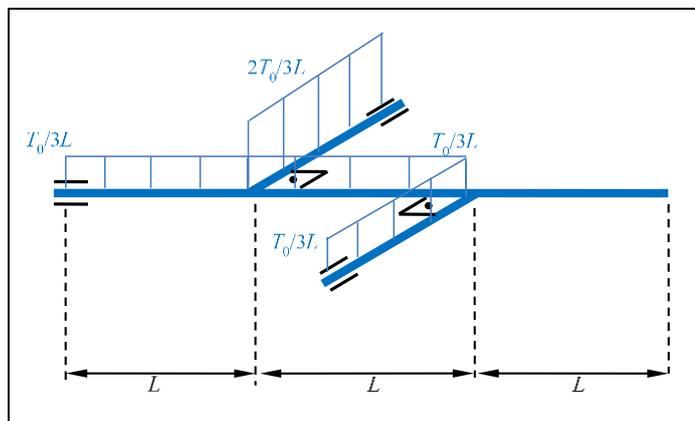


Diagrama de Momentos Fletores (M):

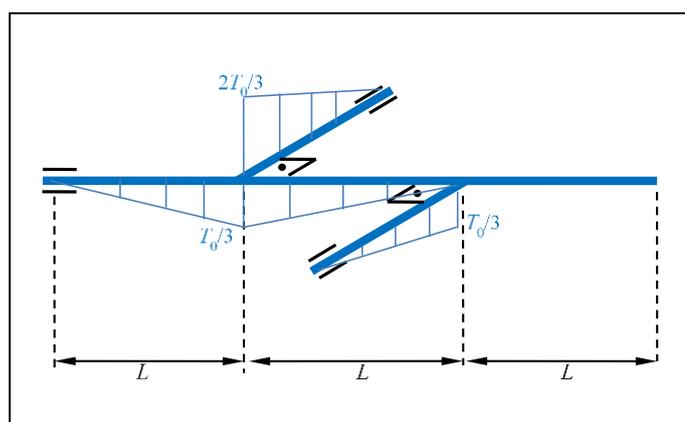
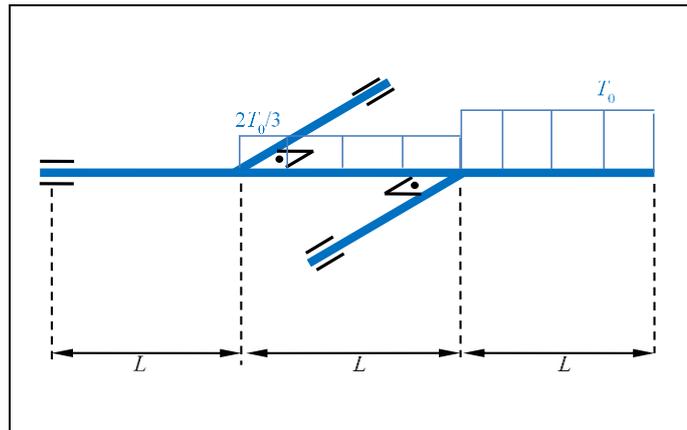


Diagrama de Momentos de Torção (T):



b) As parcelas de energia complementar devidas às forças cortantes (U_V^*), aos momentos fletores (U_M^*) e aos momentos de torção (U_T^*) ficam dadas por:

$$U_V^* = \sum \int_0^l \frac{f_c V_i^2}{2GA} ds = \frac{3f_c}{2GA} \int_0^l \left(\frac{T_0}{3L}\right)^2 ds + \frac{f_c}{2GA} \int_0^l \left(\frac{2T_0}{3L}\right)^2 ds = \frac{7}{18} \frac{f_c T_0^2}{GAL}$$

$$U_M^* = \sum \int_0^l \frac{M_i^2}{2EI} ds = \frac{3}{2EI} \int_0^l \left(\frac{T_0 s}{3L}\right)^2 ds + \frac{1}{2EI} \int_0^l \left(\frac{2T_0 s}{3L}\right)^2 ds = \frac{7}{54} \frac{T_0^2 L}{EI}$$

$$U_T^* = \sum \int_0^l \frac{T_i^2}{2GJ} ds = \frac{1}{2GJ} \int_0^l (T_0)^2 ds + \frac{1}{2GJ} \int_0^l \left(\frac{2T_0}{3}\right)^2 ds = \frac{13}{18} \frac{T_0^2 L}{GJ}$$

c) Pelo Princípio do Trabalho e Energia resulta para materiais com comportamento elástico-linear e isotrópos:

$$U = U^* = W^* = W \Rightarrow \frac{T_0 \cdot \theta_D}{2} = \frac{7}{18} \frac{f_c T_0^2}{GAL} + \frac{7}{54} \frac{T_0^2 L}{EI} + \frac{13}{18} \frac{T_0^2 L}{GJ}$$

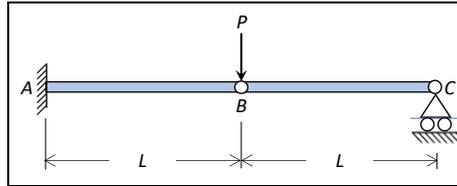
Levando a:

$$\theta_D = \left(\frac{7}{9} \frac{f_c}{GAL} + \frac{7}{27} \frac{L}{EI} + \frac{13}{9} \frac{L}{GJ} \right) T_0$$

Exercício 8:

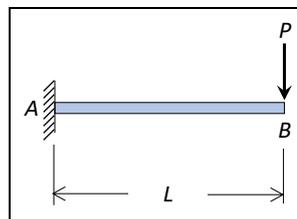
A estrutura da figura é formada por duas barras iguais, AB e BC, de comprimento L e rigidez flexional EI . A barra AB está engastada em A e articulada em B. A barra BC, por sua vez, está articulada em B e simplesmente apoiada em C. Há uma força vertical P aplicada na articulação B, conforme a figura. Pede-se:

- calcular a rotação da extremidade B da barra AB;
- calcular a rotação da extremidade B da barra BC.



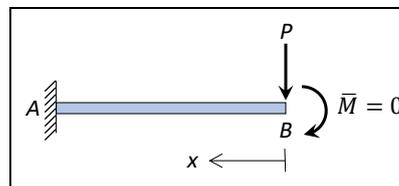
Resolução:

- i) A barra BC é uma barra biarticulada, sem força intermediária aplicada, como a barra de uma treliça. Portanto a barra BC só poderia estar sujeita a uma força normal. Como o vínculo em C é um apoio simples, essa força é nula e, portanto, a barra BC não está sujeita a nenhuma tipo de esforço, não se deforma e funciona como um corpo rígido. Assim, para calcular a rotação em B da barra AB basta isolar essa barra conforme o diagrama:



Note que a estrutura resultante é **isostática**.

- ii) Para calcular a rotação em B da barra AB, adicionamos um momento fictício em B:



Pelo teorema de Crotti-Engesser, chamando de θ_B^- a rotação à esquerda de B, temos:

$$\theta_B^- = \left(\frac{\partial U^*}{\partial \bar{M}} \right)_{\bar{M}=0} = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(M(x) \frac{\partial M}{\partial \bar{M}} \right)_{\bar{M}=0} dx$$

Mas:

$$M(x) = -(\bar{M} + Px)$$

e, portanto,

$$\frac{\partial M}{\partial \bar{M}} = -1$$

Assim:

$$\theta_B^- = \frac{1}{EI} \int_0^L P x dx = \frac{PL^2}{2EI}$$

Note que o sinal positivo indica que a rotação tem o mesmo sentido do momento fictício adotado (horário).

iii) Como a barra BC tem um movimento de corpo rígido, a rotação da extremidade B dessa barra, que indicaremos por θ_B^+ , será dada por:

$$\theta_B^+ = \frac{y_B}{L}$$

onde y_B é o deslocamento vertical do ponto B , que pode ser obtido usando o teorema de Crotti-Engesser:

$$y_B = \frac{\partial U^*}{\partial P} = \frac{1}{EI} \int_0^L M(x) \frac{\partial M}{\partial P} dx$$

Mas,

$$M(x) = -Px$$

e, portanto,

$$\frac{\partial M}{\partial P} = -x$$

Assim:

$$y_B = \frac{1}{EI} \int_0^L P x^2 dx = \frac{PL^3}{3EI}$$

e, portanto,

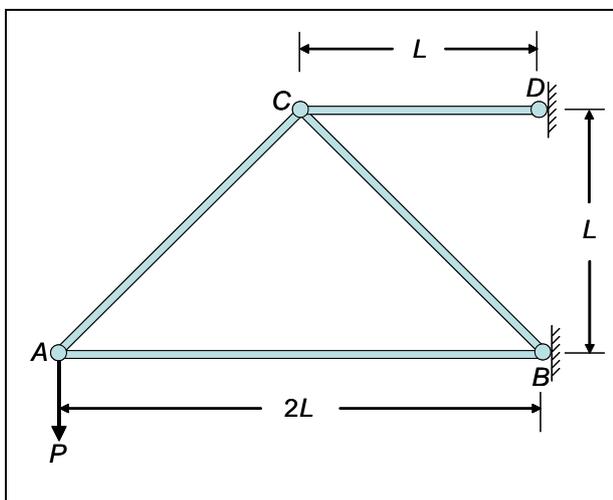
$$\theta_B^+ = \frac{pL^2}{3EI}$$

O sinal positivo de y_B corresponde a um deslocamento no mesmo sentido de P . Portanto θ_B^+ tem o sentido anti-horário.

Exercício 9:

A treliça da figura é formada por barras com rigidez axial EA e com rigidez flexional EI dadas e está contida em um plano vertical. Sabendo que ela está submetida a uma força P aplicada ao seu nó A , pede-se:

- a) determinar as forças que atuam em cada barra;
 b) calcular a energia complementar armazenada na treliça;
 c) determinar o deslocamento vertical do nó A;
 d) determinar o deslocamento horizontal do nó A.



Resolução:

- a) As forças nas barras podem ser obtidas pelo método dos nós, resultando:

$$F_{AC} = P\sqrt{2}; F_{AB} = -P; F_{BC} = -P\sqrt{2} \text{ e } F_{CD} = 2P,$$

- b) Como a estrutura é uma treliça, só haverá energia complementar devida à força normal aplicada em cada barra:

$$U^* = \sum_{i=1}^n \frac{N_i^2 l_i}{2EA} = \frac{1}{2EA} [P^2 2L + 2P^2 L\sqrt{2} + 2P^2 L\sqrt{2} + 4P^2 L]$$

$$\Rightarrow U^* = \frac{P^2 L}{EA} [3 + 2\sqrt{2}]$$

- b) Sendo δ_V o deslocamento vertical do nó A, teremos, pelo Princípio do Trabalho e da Energia,

$$W = U = U^* \Rightarrow \frac{P\delta_V}{2} = \frac{P^2 L}{EA} [3 + 2\sqrt{2}]$$

$$\Rightarrow \delta_V = \frac{2PL}{EA} [3 + 2\sqrt{2}]$$

(para baixo)

-
- c) Se considerarmos uma força fictícia H aplicada ao nó A , da esquerda para a direita, ela se transmitirá integralmente à barra AB e, portanto, só influirá na parcela da energia complementar correspondente a essa barra. Assim, sendo U_{AB}^* essa parcela teremos, considerando a existência da força fictícia,

d)

$$U_{AB}^* = \frac{(P + H)^2 2L}{2EA}$$

Pelo 2º. Teorema de Castigliano, sendo δ_H o deslocamento horizontal do nó A , teremos:

$$\delta_H = \left(\frac{\partial U_{AB}^*}{\partial H} \right)_{H=0}$$

e, portanto,

$$\delta_H = \left(\frac{2(P + H)L}{EA} \right)_{H=0} \Rightarrow \delta_H = \frac{2PL}{EA}$$

(da esquerda para a direita)

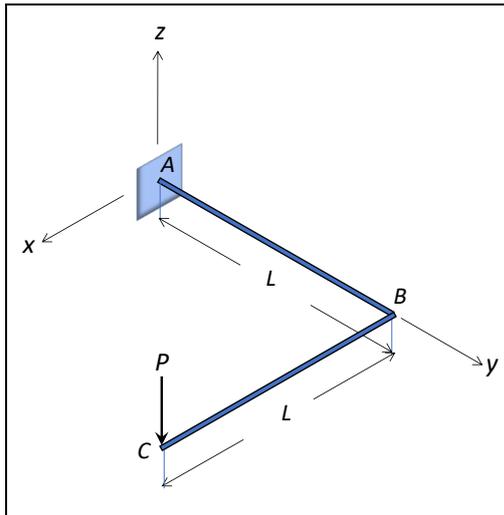
Exercício 10:

A estrutura ABC da figura está contida em um plano horizontal. Ela é formada por uma barra de seção circular cheia, de raio R , dobrada em ângulo de 90° , e engastada no ponto A . A estrutura está submetida apenas à força vertical P aplicada ao ponto C . É dada a rigidez flexional da viga EI . Pedem-se:

- a) o deslocamento vertical do ponto C ;*
- b) a rotação do ponto C em torno da direção x ;*
- c) a rotação do ponto C em torno da direção y .*

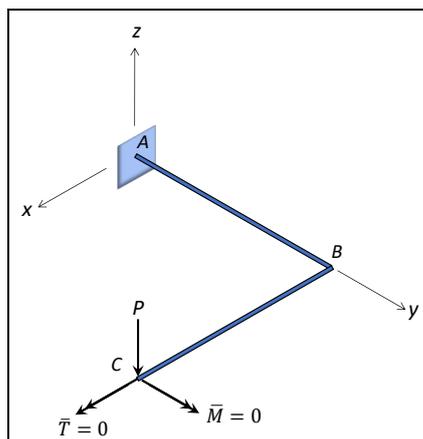
Notas:

- 1) Desprezar a contribuição das forças cortantes à energia complementar.*
- 2) Usar $GI_p = \frac{4}{5}EI$.*



Resolução:

A questão é resolvida com o auxílio dos momentos fictícios \bar{M} e \bar{T} indicados na figura:



Assim, o deslocamento vertical do nó C será:

$$\delta = \frac{\partial U^*}{\partial P}$$

a rotação de C em torno da direção x será:

$$\phi = \left(\frac{\partial U^*}{\partial \bar{T}} \right)_{\bar{T}=0}$$

e a rotação de C em torno da direção y será:

$$\theta = \left(\frac{\partial U^*}{\partial \bar{M}} \right)_{\bar{M}=0}$$

Desprezando o efeito da força cortante, a energia complementar será a soma das parcelas devidas à flexão e à torção. Usando o índice 1 para representar o trecho CB e 2 para representar o trecho BA podemos montar a tabela para auxiliar o cálculo:

$M_1(x) = -(\bar{M} + Px)$	$\frac{\partial M_1}{\partial P} = -x$	$\frac{\partial M_1}{\partial \bar{M}} = -1$	$\frac{\partial M_1}{\partial \bar{T}} = 0$
$M_2(x) = \bar{T} - Px$	$\frac{\partial M_2}{\partial P} = -x$	$\frac{\partial M_2}{\partial \bar{M}} = 0$	$\frac{\partial M_2}{\partial \bar{T}} = 1$
$T_1(x) = \bar{T}$	$\frac{\partial T_1}{\partial P} = 0$	$\frac{\partial T_1}{\partial \bar{M}} = 0$	$\frac{\partial T_1}{\partial \bar{T}} = 1$
$T_2(x) = \bar{M} + PL$	$\frac{\partial T_2}{\partial P} = L$	$\frac{\partial T_2}{\partial \bar{M}} = 1$	$\frac{\partial T_2}{\partial \bar{T}} = 0$

O deslocamento vertical do nó C será:

$$\delta = \frac{1}{EI} \int_0^L M_1 \frac{\partial M_1}{\partial P} dx + \frac{1}{EI} \int_0^L M_2 \frac{\partial M_2}{\partial P} dx + \frac{5}{4EI} \int_0^L T_1 \frac{\partial T_1}{\partial P} dx + \frac{5}{4EI} \int_0^L T_2 \frac{\partial T_2}{\partial P} dx$$

Usando os dados da tabela e efetuando os cálculos resultará:

$$\delta = \frac{23 PL^3}{12 EI}$$

A rotação do ponto C em torno da direção x será:

$$\phi = \left(\frac{1}{EI} \int_0^L M_1 \frac{\partial M_1}{\partial \bar{T}} dx + \frac{1}{EI} \int_0^L M_2 \frac{\partial M_2}{\partial \bar{T}} dx + \frac{5}{4EI} \int_0^L T_1 \frac{\partial T_1}{\partial \bar{T}} dx + \frac{5}{4EI} \int_0^L T_2 \frac{\partial T_2}{\partial \bar{T}} dx \right)_{\bar{T}=0}$$

Usando os dados da tabela e efetuando os cálculos resultará:

$$\phi = -\frac{PL^2}{2EI}$$

(o sinal negativo significa sentido contrário ao do momento fictício adotado)

A rotação do ponto C em torno da direção y será:

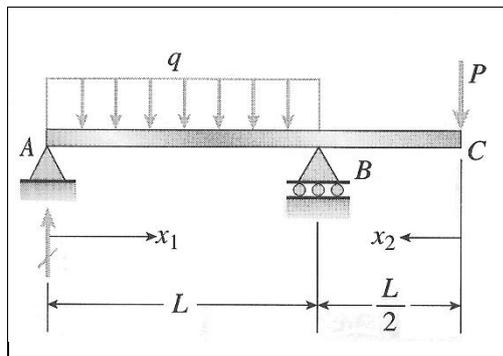
$$\theta = \left(\frac{1}{EI} \int_0^L M_1 \frac{\partial M_1}{\partial \bar{M}} dx + \frac{1}{EI} \int_0^L M_2 \frac{\partial M_2}{\partial \bar{M}} dx + \frac{5}{4EI} \int_0^L T_1 \frac{\partial T_1}{\partial \bar{M}} dx + \frac{5}{4EI} \int_0^L T_2 \frac{\partial T_2}{\partial \bar{M}} dx \right)_{\bar{M}=0}$$

Usando os dados da tabela e efetuando os cálculos resultará:

$$\theta = \frac{7 PL^2}{4 EI}$$

Exercício 11:

A viga da figura tem rigidez flexional EI e suporta um carregamento distribuído uniforme de intensidade q na extensão AB e uma força concentrada P na extremidade C do trecho em balanço. Determine a deflexão vertical e o ângulo de rotação no ponto C .



Resolução:

a) Cálculo da deflexão vertical:

Usando o teorema de Castigliano modificado:

$$\delta_c = \int_0^L \frac{M_{AB}}{EI} \frac{\partial M_{AB}}{\partial P} dx_1 + \int_0^{L/2} \frac{M_{BC}}{EI} \frac{\partial M_{BC}}{\partial P} dx_2$$

com

$$M_{AB} = \frac{qLx_1}{2} - \frac{Px_1}{2} - \frac{qx_1^2}{2}$$

$$M_{BC} = -Px_2$$

$$\Rightarrow \delta_c = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(\frac{qLx_1}{2} - \frac{Px_1}{2} - \frac{qx_1^2}{2} \right) \left(-\frac{x_1}{2} \right) dx_1$$

$$+ \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} (-Px_2)(-x_2) dx_2$$

$$\Rightarrow \delta_c = \frac{PL^3}{8EI} - \frac{qL^4}{48EI}$$

b) Cálculo da rotação:

Aplicando na extremidade C um momento fictício M_c no sentido horário, usando o teorema de Castigliano modificado:

$$\theta_c = \left(\int_0^L \frac{M_{AB}}{EI} \frac{\partial M_{AB}}{\partial M_c} dx_1 \right)_{M_c=0} + \left(\int_0^{L/2} \frac{M_{BC}}{EI} \frac{\partial M_{BC}}{\partial M_c} dx_2 \right)_{M_c=0}$$

com

$$M_{AB} = \frac{qLx_1}{2} - \frac{Px_1}{2} - \frac{qx_1^2}{2} - \frac{M_c x_1}{L}$$

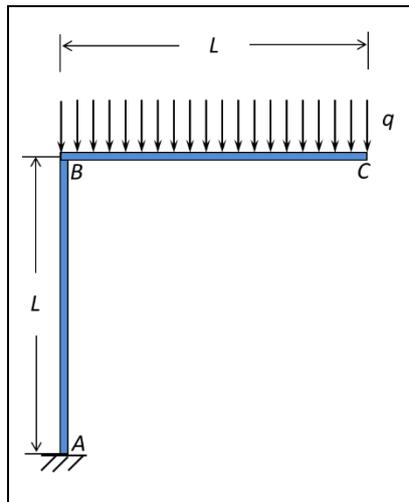
$$M_{BC} = -Px_2 - M_c$$

$$\Rightarrow \theta_c = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(\frac{qLx_1}{2} - \frac{Px_1}{2} - \frac{qx_1^2}{2} \right) \left(-\frac{x_1}{L} \right) dx_1$$

$$+ \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} (-Px_2)(-1) dx_2$$

$$\Rightarrow \theta_c = \frac{7PL^2}{24EI} - \frac{qL^3}{24EI}$$

Exercício 12:

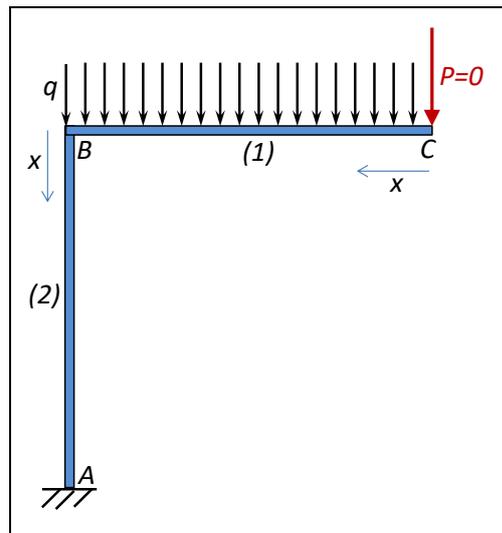


A estrutura ABC da figura é formada por dois segmentos prismáticos em ângulo reto, cada um com comprimento L e rigidez à flexão EI . Ela está engastada em A e submetida a uma carga distribuída uniforme q em seu trecho BC. Pede-se determinar, considerando apenas o efeito da flexão:

- a) o deslocamento vertical do ponto C;
- b) o deslocamento horizontal do ponto B;
- c) a rotação da seção C.

Resolução:

- a) Aplicamos uma força vertical fictícia $P=0$ no ponto B, conforme a figura:



Assim:

$$\delta_C = \left(\frac{\partial U^*}{\partial P} \right)_{P=0}$$

Dividindo-se o pórtico em dois trechos temos:

$$\delta_C = \left(\frac{\partial U_1^*}{\partial P} \right)_{P=0} + \left(\frac{\partial U_2^*}{\partial P} \right)_{P=0}$$

e, portanto,

$$\delta_c = \frac{1}{EI} \left[\int_0^L M_1 \frac{\partial M_1}{\partial P} dx + \int_0^L M_2 \frac{\partial M_2}{\partial P} dx \right]_{P=0}$$

onde:

$$M_1(x) = -Px - \frac{qx^2}{2}$$

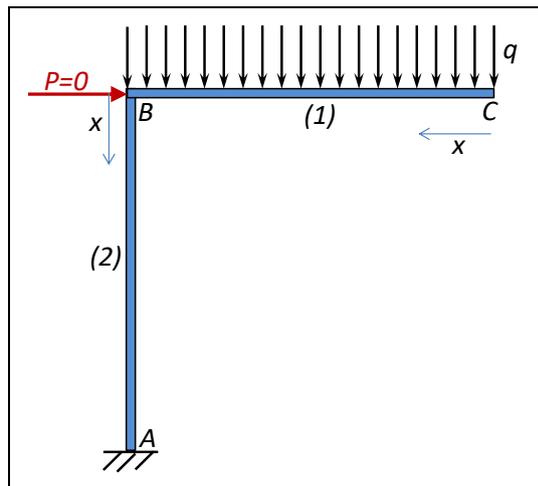
$$\frac{\partial M_1}{\partial P} = -x$$

$$M_2(x) = -PL - \frac{qL^2}{2}$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial P} = -L$$

$$\Rightarrow \delta_c = \frac{5qL^4}{8EI}$$

b) Aplicamos uma força horizontal fictícia $P=0$ no ponto B , conforme a figura:



Assim:

$$\delta_B = \left(\frac{\partial U^*}{\partial P} \right)_{P=0}$$

Dividindo-se o pórtico em dois trechos temos:

$$\delta_B = \left(\frac{\partial U_1^*}{\partial P} \right)_{P=0} + \left(\frac{\partial U_2^*}{\partial P} \right)_{P=0}$$

e, portanto,

$$\delta_B = \frac{1}{EI} \left[\int_0^L M_1 \frac{\partial M_1}{\partial P} dx + \int_0^L M_2 \frac{\partial M_2}{\partial P} dx \right]_{P=0}$$

onde:

$$M_1(x) = -\frac{qx^2}{2}$$

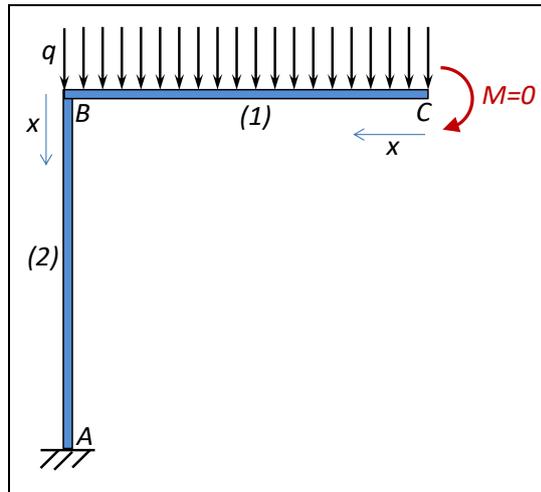
$$\frac{\partial M_1}{\partial P} = 0$$

$$M_2(x) = -Px - \frac{qL^2}{2}$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial P} = -x$$

$$\Rightarrow \delta_B = \frac{qL^4}{4EI}$$

c) Aplicamos um binário fictício $M=0$ no ponto C conforme a figura:



Assim:

$$\theta_C = \left(\frac{\partial U^*}{\partial M} \right)_{M=0}$$

Dividindo-se o pórtico em dois trechos temos:

$$\theta_C = \left(\frac{\partial U_1^*}{\partial M} \right)_{M=0} + \left(\frac{\partial U_2^*}{\partial M} \right)_{M=0}$$

e, portanto,

$$\theta_c = \frac{1}{EI} \left[\int_0^L M_1 \frac{\partial M_1}{\partial M} dx + \int_0^L M_2 \frac{\partial M_2}{\partial M} dx \right]_{M=0}$$

onde:

$$M_1(x) = -M - \frac{qx^2}{2}$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial M} = -1$$

$$M_2(x) = -M - \frac{qL^2}{2}$$

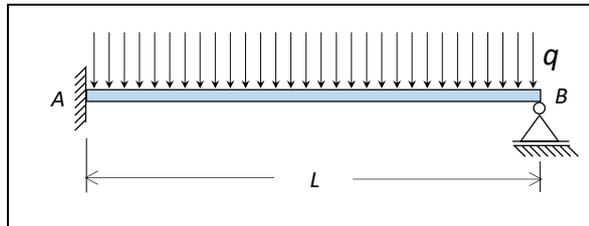
$$\frac{\partial M_2}{\partial M} = -1$$

$$\Rightarrow \theta_c = \frac{2qL^3}{3EI}$$

Exercício 13:

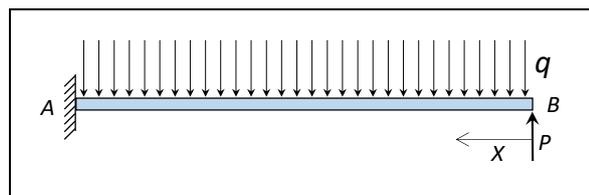
A viga prismática da figura está engastada na extremidade A e simplesmente apoiada na extremidade B. Ela tem comprimento L e rigidez flexional EI dados.

Pede-se determinar a rotação θ_B que acontece na sua extremidade B quando é aplicada a carga uniformemente distribuída q.



Resolução:

Essa estrutura tem grau de hiperestaticidade igual a 1. Podemos usar, como incógnita hiperestática a reação vertical em B. Assim, podemos considerar a estrutura isostática fundamental:



e usar o Princípio de Energia Complementar Mínima:

$$\frac{\partial U^*}{\partial P} = 0$$

$$M(x) = Px - \frac{qx^2}{2}$$

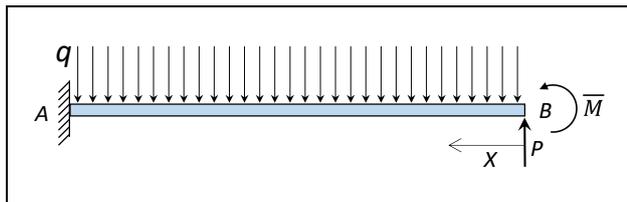
$$\frac{\partial M}{\partial P} = x$$

$$\frac{\partial U^*}{\partial P} = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(Px - \frac{qx^2}{2} \right) x dx$$

$$\Rightarrow P = \frac{3}{8} qL$$

Para calcular a rotação em B, aplicamos um momento fictício \bar{M} . Assim, pelo Segundo Teorema de Castigliano:

$$\theta_B = \left(\frac{\partial U^*}{\partial \bar{M}} \right)_{\bar{M}=0}$$



$$M(x) = \bar{M} + Px - \frac{qx^2}{2}$$

$$\frac{\partial M}{\partial \bar{M}} = 1$$

$$\theta_B = \left(\frac{\partial U^*}{\partial \bar{M}} \right)_{\bar{M}=0} = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(Px - \frac{qx^2}{2} \right) dx$$

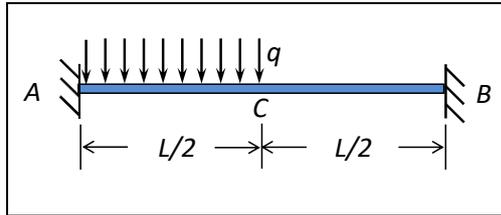
$$\Rightarrow \theta_B = \frac{1}{48} \frac{qL^3}{EI}$$

(sentido anti-horário)

Exercício 14:

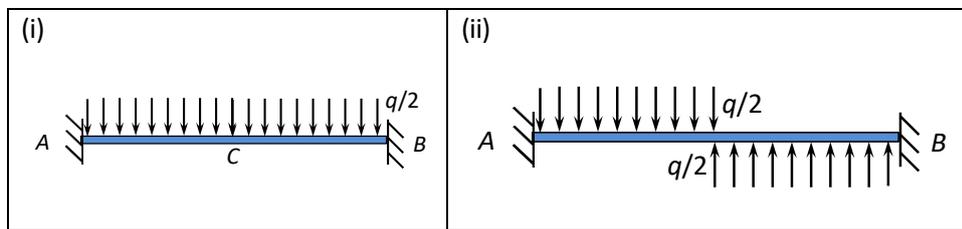
A barra AB está engastada em suas duas extremidades e está submetida à carga distribuída q, conforme a figura. Considerando apenas o efeito da flexão e usando as propriedades de simetria da estrutura, calcule:

- a) a rotação em C;
 b) o deslocamento vertical em C.

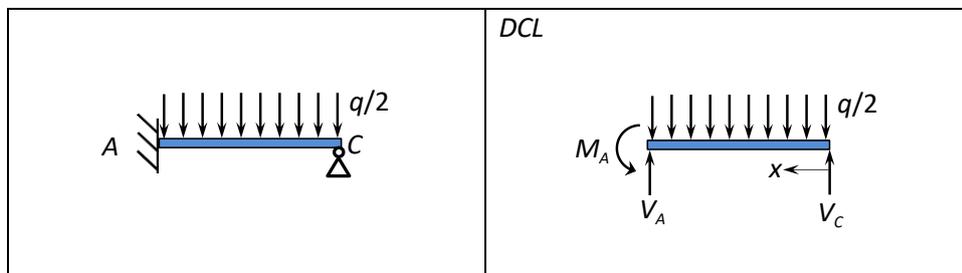


Resolução:

A carga distribuída q pode ser dividida na soma de uma parcela simétrica (i) com uma parcela antissimétrica (ii):



- a) apenas a parte antissimétrica do carregamento (ii) contribui para a rotação em C; pode-se estudar apenas metade da estrutura colocando vínculos adequados em C (apoio simples), conforme a figura:



O grau de hiperestaticidade resultante é 1. Adotando V_C como incógnita hiperestática, pelo Princípio da Energia Complementar Mínima:

$$\frac{\partial U^*}{\partial V_C} = 0 \Rightarrow \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{L}{2}} M(x) \frac{\partial M}{\partial V_C} dx = 0$$

onde:

$$M(x) = V_C x - \frac{qx^2}{4}$$

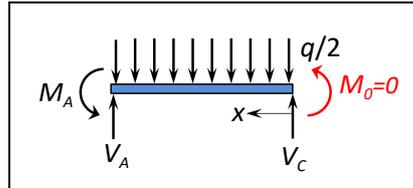
e

$$\frac{\partial M}{\partial V_C} = x$$

Então:

$$\int_0^{\frac{L}{2}} \left(V_C x - \frac{qx^2}{4} \right) x dx = 0 \Rightarrow \left(\frac{V_C x^3}{3} - \frac{qx^4}{16} \right)_0^{\frac{L}{2}} = 0 \Rightarrow V_C = \frac{3qL}{32}$$

Aplicando um momento fictício em C, conforme a figura:



a rotação em C é calculada por:

$$\theta_C = \left(\frac{\partial U^*}{\partial M_0} \right)_{M_0=0} = \frac{1}{EI} \left(\int_0^{\frac{L}{2}} M(x) \frac{\partial M}{\partial M_0} dx \right)_{M_0=0}$$

onde:

$$M(x) = \frac{3qL}{32} x - \frac{qx^2}{4} + M_0$$

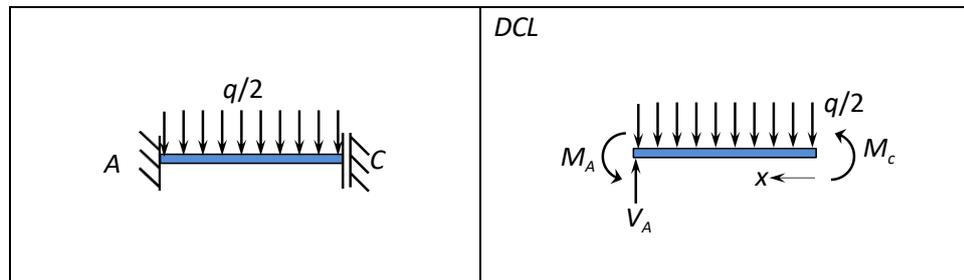
e

$$\frac{\partial M}{\partial M_0} = 1$$

Então:

$$\theta_C = \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{L}{2}} \left(\frac{3qL}{32} x - \frac{qx^2}{4} \right) dx = \frac{1}{EI} \left(\frac{3qLx^2}{64} - \frac{qx^3}{12} \right)_0^{\frac{L}{2}} \Rightarrow \theta_C = \frac{qL^3}{768EI}$$

- b) apenas a parte simétrica do carregamento (i) contribui para o deslocamento vertical em C; pode-se estudar apenas metade da estrutura colocando vínculos adequados em C (engaste deslizante), conforme a figura:



O grau de hiperestaticidade resultante novamente é 1. Adotando M_C como incógnita hiperestática, pelo Princípio da Energia Complementar Mínima:

$$\frac{\partial U^*}{\partial M_C} = 0 \Rightarrow \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{L}{2}} M(x) \frac{\partial M}{\partial M_C} dx = 0$$

onde:

$$M(x) = M_C - \frac{qx^2}{4}$$

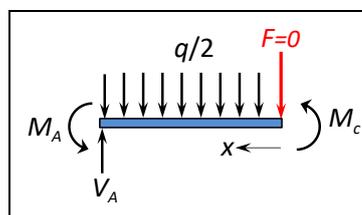
e

$$\frac{\partial M}{\partial M_C} = 1$$

Então:

$$\int_0^{\frac{L}{2}} \left(M_C - \frac{qx^2}{4} \right) dx = 0 \Rightarrow \left(M_C x - \frac{qx^3}{12} \right) \Big|_0^{\frac{L}{2}} = 0 \Rightarrow M_C = \frac{qL^2}{48}$$

Aplicando uma força vertical fictícia em C, conforme a figura:



O deslocamento vertical em C é calculado por:

$$\delta_C = \left(\frac{\partial U^*}{\partial F} \right)_{F=0} = \left(\frac{1}{EI} \int_0^{\frac{L}{2}} M(x) \frac{\partial M}{\partial F} dx \right)_{F=0}$$

onde:

$$M(x) = \frac{qL^2}{48} - Fx - \frac{qx^2}{4}$$

e

$$\frac{\partial M}{\partial F} = -x$$

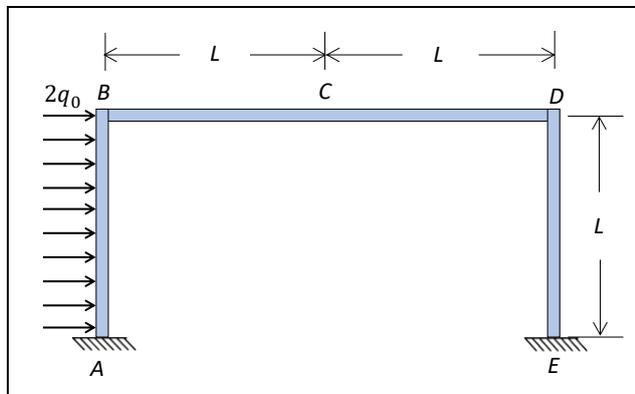
Então:

$$\delta_c = \frac{1}{EI} \int_0^{\frac{L}{2}} \left(-\frac{qL^2}{48} + \frac{qx^2}{4} \right) x dx = \frac{1}{EI} \left(-\frac{qL^2 x^2}{96} + \frac{qx^4}{16} \right) \Big|_0^{\frac{L}{2}}$$

$$\Rightarrow \delta_c = \frac{qL^4}{768EI}$$

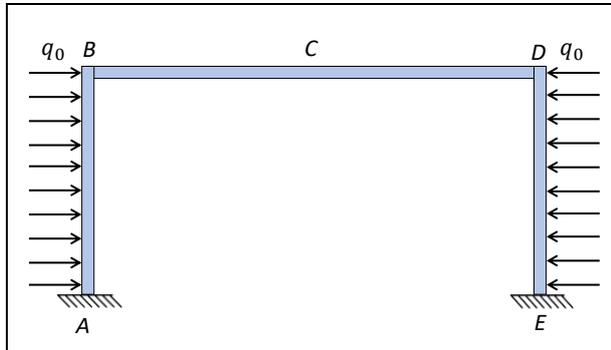
Exercício 15:

O pórtico plano ABCDE da figura está engastado em A e em E. Ele é formado por barras retas, de mesma rigidez flexional EI dada, soldadas em ângulos de 90° . Sobre a lateral AB está aplicada uma força distribuída uniforme, de magnitude $2q_0$. Desprezando os efeitos devidos à força normal e à força cortante, pede-se determinar a rotação no ponto C.

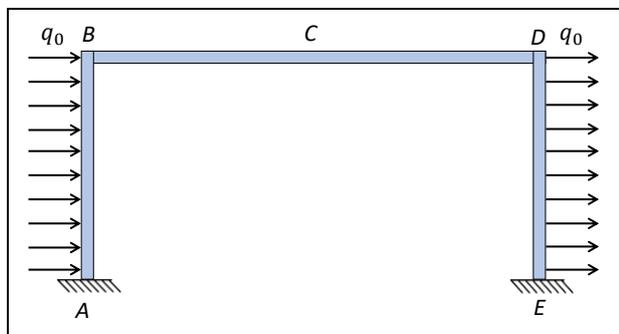


Resolução:

Como a estrutura é simétrica, o carregamento da estrutura pode ser decomposto em uma soma de um carregamento simétrico:

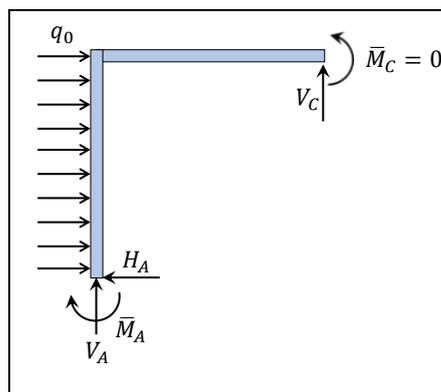


e um carregamento anti-simétrico:



Como o carregamento simétrico não causa rotação em C, basta analisar apenas o efeito do carregamento anti-simétrico.

Para tanto, podemos cortar a estrutura em C, colocando um vínculo adequado, que é um apoio simples. Para a metade esquerda da estrutura teremos, então, o seguinte DCL:

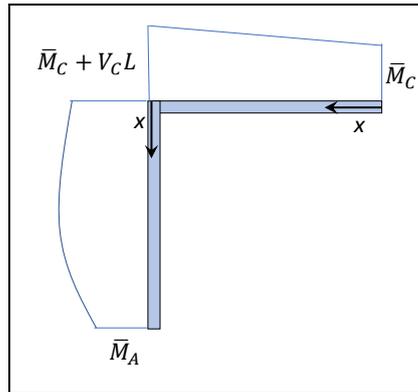


onde já foi adicionado o momento fictício \bar{M}_C que permitirá o cálculo da rotação em C. Note que a estrutura resultando é hiperestática, com grau de hiperestaticidade 1.

Vamos, então, adotar V_C como incógnita hiperestática que pode ser calculada usando o princípio da energia complementar mínima:

$$\frac{\partial U^*}{\partial V_C} = 0$$

Desprezando os efeitos da força normal e da força cortante, como o problema é plano, só resta a energia complementar correspondente à flexão. Para calcular essa energia, é conveniente primeiro esboçar o diagrama de momentos fletores:



A estrutura pode ser dividida em dois trechos, AB e BC ; a energia complementar total será a soma das energias complementares correspondentes a esses trechos:

$$U^* = U_{AB}^* + U_{BC}^*$$

- Para o trecho AB temos, usando a coordenada x indicada na figura:

$$M_{AB}(x) = \bar{M}_C + V_C L - q_0 \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{\partial M_{AB}}{\partial V_C} = L$$

$$\frac{\partial M_{AB}}{\partial \bar{M}_C} = 1$$

- Para o trecho BC temos, usando a coordenada x indicada na figura:

$$M_{BC}(x) = \bar{M}_C + V_C x$$

$$\frac{\partial M_{BC}}{\partial V_C} = x$$

$$\frac{\partial M_{BC}}{\partial \bar{M}_C} = 1$$

Como

$$0 = \frac{\partial U^*}{\partial V_C} = \frac{\partial U_{AB}^*}{\partial V_C} + \frac{\partial U_{BC}^*}{\partial V_C}$$

Então:

$$0 = \frac{1}{EI} \int_0^L M_{AB} \frac{\partial M_{AB}}{\partial V_C} dx + \frac{1}{EI} \int_0^L M_{BC} \frac{\partial M_{BC}}{\partial V_C} dx$$

Assim, usando as expressões definidas anteriormente e zerando o momento fictício \bar{M}_C :

$$0 = \int_0^L \left(V_C L - q_0 \frac{x^2}{2} \right) L dx + \int_0^L V_C x^2 dx$$

e, portanto,

$$V_C = \frac{q_0 L}{8}$$

(o sinal positivo indica que a reação V_C tem o mesmo sentido que foi desenhado no diagrama de corpo livre)

A rotação do ponto B pode ser calculada pelo teorema de Crotti-Engesser, anulando o momento fictício:

$$\theta_C = \left(\frac{\partial U^*}{\partial \bar{M}_C} \right)_{\bar{M}_C=0}$$

ou seja,

$$\theta_C = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(M_{AB} \frac{\partial M_{AB}}{\partial \bar{M}_C} \right)_{\bar{M}_C=0} dx + \frac{1}{EI} \int_0^L \left(M_{BC} \frac{\partial M_{BC}}{\partial \bar{M}_C} \right)_{\bar{M}_C=0} dx$$

Assim,

$$\theta_C = \frac{1}{EI} \left[\int_0^L \left(V_C L - q_0 \frac{x^2}{2} \right) dx + \int_0^L V_C x dx \right]$$

e, portanto,

$$\theta_C = -\frac{1}{EI} \left[\frac{3}{2} V_C L^2 + \frac{1}{6} q_0 L^3 \right]$$

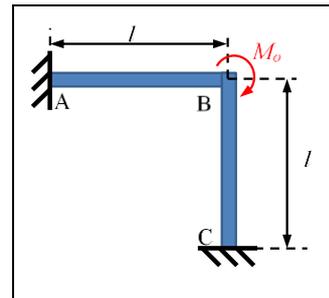
e, finalmente, usando o valor que foi calculado para V_C :

$$\theta_c = \frac{q_0 L^3}{48EI}$$

(o sinal positivo indica que o sentido da rotação é o mesmo do momento fictício adotado e, portanto, a rotação se dá no sentido anti-horário)

Exercício 16:

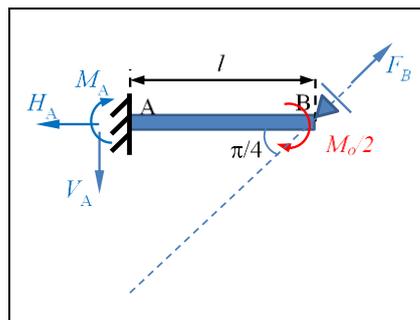
A estrutura ABC indicada na figura é formada pelas barras AB e BC, de mesmo comprimento (l) e mesma rigidez flexional (EI), engastada nas seções A e C e rigidamente ligadas em B. Sobre a seção B é aplicado um binário de intensidade M_0 no sentido indicado. Pede-se:



- o DCL final da estrutura com as indicações corretas dos valores e dos sentidos das reações de apoio em A e em C;
- a rotação em B, em função dos dados fornecidos.

Resolução:

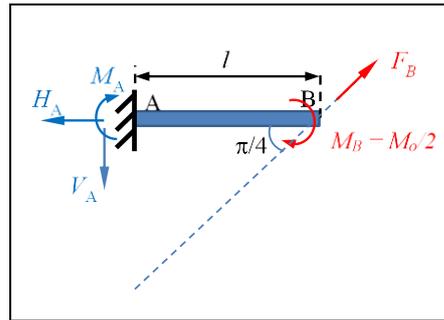
- Trata-se de uma estrutura simétrica sob carregamento antissimétrico, de tal modo que os esforços de natureza simétrica são nulos no plano de simetria da estrutura, restando apenas uma força de natureza antissimétrica atuando no plano de simetria, conforme ilustra a figura a seguir:



O grau de hiperstaticidade estrutural após a simplificação decorrente da aplicação dos conceitos de simetria é dado por:

$$g = 4 \text{ (reações)} - 3 \text{ (equações de equilíbrio)} = 1$$

Tomando a reação F_B como incógnita hiperestática teremos a seguinte EIF (estrutura isostática fundamental):



Para determinarmos a incógnita hiperestática, basta aplicarmos o Princípio da Energia Complementar Mínima. Desprezando as parcelas da energia complementar devidas às forças cortantes e forças normais (que são pequenas frente à parcela da energia complementar devida à flexão), teremos:

$$\frac{\partial U^*}{\partial F_B} = 0 \Rightarrow \int_0^l \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial F_B} dx = 0 \Rightarrow \frac{1}{EI} \int_0^l \left(\frac{\sqrt{2}}{2} F_B x - \frac{M_0}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} x \right) dx = 0$$

Ou seja:

$$F_B = \frac{3\sqrt{2}}{4} \frac{M_0}{l}$$

Das equações de equilíbrio estático, resultam diretamente:

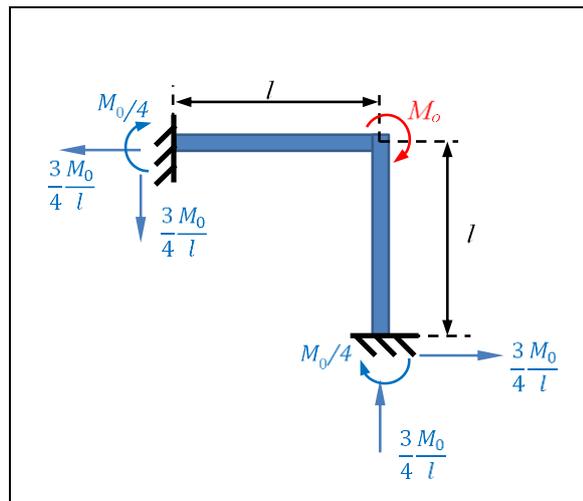
$$H_A = \frac{\sqrt{2}}{2} F_B = \frac{3}{4} \frac{M_0}{l}$$

$$V_A = \frac{\sqrt{2}}{2} F_B = \frac{3}{4} \frac{M_0}{l}$$

$$M_A = \frac{\sqrt{2}}{2} F_B l - \frac{M_0}{2} = \frac{M_0}{4}$$

Obs.: Os sinais positivos indicam que os sentidos indicados na figura estão todos corretos.

Segue, portanto, o D.C.L. final (note que as reações também são antissimétricas):



- b) Para a determinação da rotação em B, basta aplicar o Teorema de Crotti-Engesser à EIF ilustrada na página anterior:

$$\theta_B = \frac{\partial U^*}{\partial M_B} = \int_0^l \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M_B} dx = \frac{1}{EI} \int_0^l \left(\frac{\sqrt{2}}{2} F_B x - M_B \right) (-1) dx$$

$$\theta_B = \frac{M_B l}{EI} - \frac{\sqrt{2} F_B l^2}{4 EI}$$

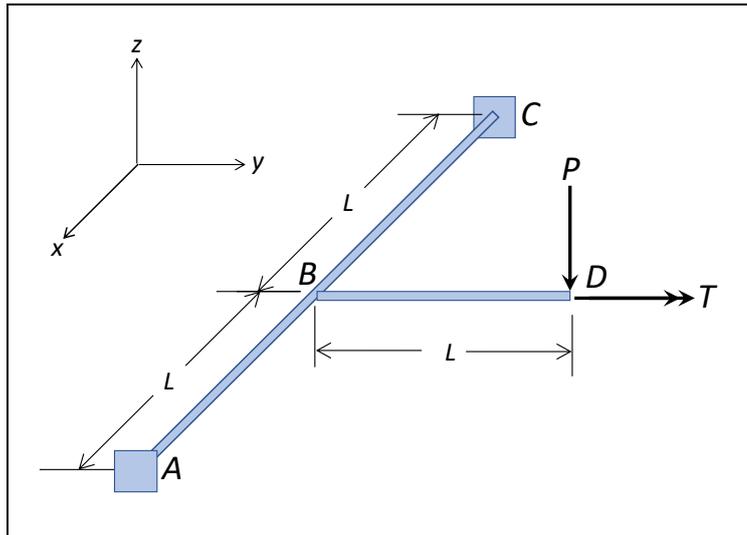
Como $M_B = M_0/2$ e $F_B = 3\sqrt{2}M_0/4l$, virá:

$$\theta_B = \frac{1}{8} \frac{M_0 l}{EI}$$

Exercício 17:

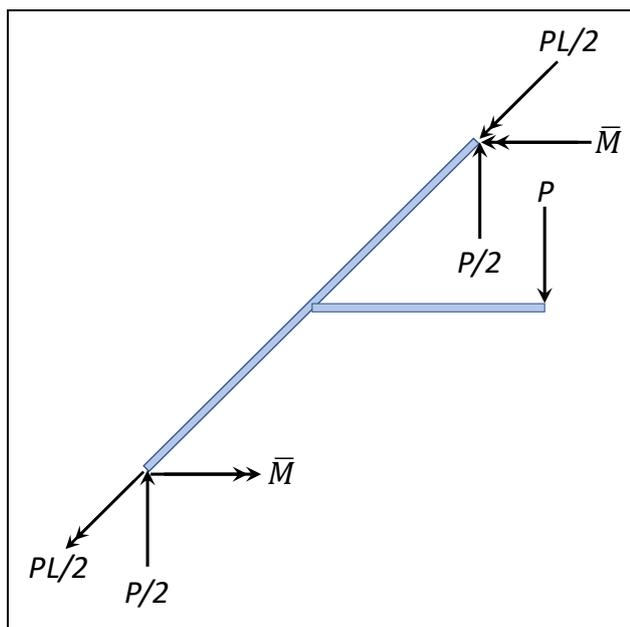
A estrutura ABCD da figura é horizontal. A barra BD está soldada em B à barra ABC e forma com ela um ângulo reto. A estrutura está engastada nos pontos A e C. Em D estão aplicados uma força vertical P e um torque T. As barras têm mesma rigidez flexional EI e mesma rigidez à torção $GI_P = \frac{4}{5}EI$. Sabendo que a energia complementar devida à força cortante é desprezível, podem-se:

- o deslocamento vertical do ponto D;
- a rotação do ponto D em torno da direção y.

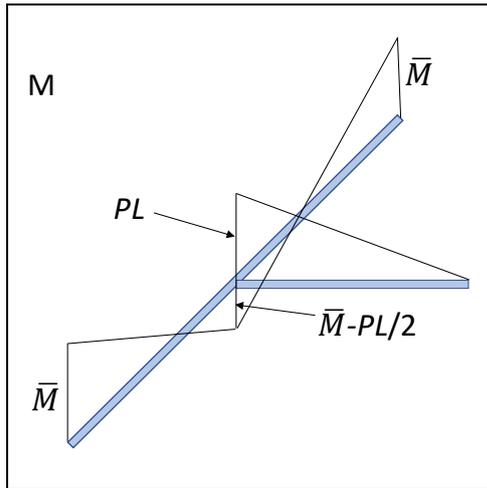


Resolução:

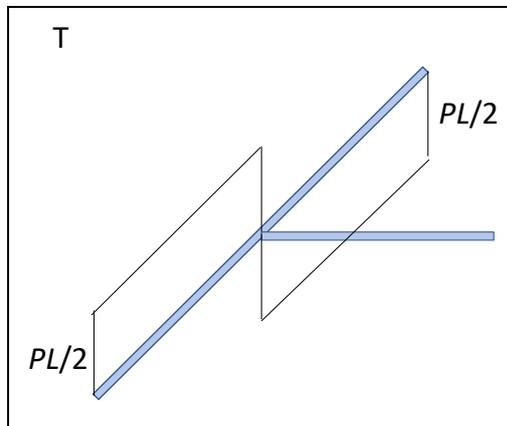
- a) Como a estrutura é simétrica em relação ao plano vertical que passa por BD , apenas o carregamento simétrico (P) colabora para o deslocamento vertical de D . Usando essa simetria, podemos montar o seguinte DCL :



A estrutura é hiperestática com $g = 1$ e a incógnita hiperestática é \bar{M} . Os correspondentes diagramas de momento fletor e momento de torção são:



e



Pelo princípio da energia complementar mínima:

$$\frac{\partial U^*}{\partial \bar{M}} = 0$$

ou, somando as energias de flexão e torção de todas as barras e considerando a forma modificada:

$$\frac{1}{EI} \int_0^L M_{AB} \frac{\partial M_{AB}}{\partial \bar{M}} dx + \frac{1}{EI} \int_0^L M_{BC} \frac{\partial M_{BC}}{\partial \bar{M}} dx + \frac{1}{EI} \int_0^L M_{BD} \frac{\partial M_{BD}}{\partial \bar{M}} dx +$$

$$\frac{1}{GI_P} \int_0^L T_{AB} \frac{\partial T_{AB}}{\partial \bar{M}} dx + \frac{1}{GI_P} \int_0^L T_{BC} \frac{\partial T_{BC}}{\partial \bar{M}} dx + \frac{1}{EI} \int_0^L T_{BD} \frac{\partial T_{BD}}{\partial \bar{M}} dx = 0$$

Mas nota-se que várias dessas parcelas são nulas, resultando, somente,

$$\frac{1}{EI} \int_0^L M_{AB} \frac{\partial M_{AB}}{\partial \bar{M}} dx + \frac{1}{EI} \int_0^L M_{BC} \frac{\partial M_{BC}}{\partial \bar{M}} dx = \frac{2}{EI} \int_0^L M_{AB} \frac{\partial M_{AB}}{\partial \bar{M}} dx = 0$$

Como:

$$M_{AB} = \bar{M} - \frac{P}{2}x$$

$$\frac{\partial M_{AB}}{\partial \bar{M}} = 1$$

$$\Rightarrow \int_0^L \left(\bar{M} - \frac{P}{2}x \right) dx = 0 \Rightarrow \bar{M}L - \frac{PL^2}{4} = 0 \Rightarrow \bar{M} = \frac{PL}{4}$$

Conhecido o valor de \bar{M} , podemos substituí-lo nos diagramas de esforços e calcular o deslocamento vertical δ com

$$\delta = \frac{\partial U^*}{\partial P}$$

Somando a energia complementar de flexão e de torção de todas as barras e considerando a forma modificada do Teorema de Castigliano:

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{1}{EI} \int_0^L M_{AB} \frac{\partial M_{AB}}{\partial P} dx + \frac{1}{EI} \int_0^L M_{BC} \frac{\partial M_{BC}}{\partial P} dx \\ &+ \frac{1}{EI} \int_0^L M_{BD} \frac{\partial M_{BD}}{\partial P} dx + \frac{1}{GI_P} \int_0^L T_{AB} \frac{\partial T_{AB}}{\partial P} dx \\ &+ \frac{1}{GI_P} \int_0^L T_{BC} \frac{\partial T_{BC}}{\partial P} dx + \frac{1}{GI_P} \int_0^L T_{BD} \frac{\partial T_{BD}}{\partial P} dx \end{aligned}$$

Eliminado as parcelas nulas e considerando as simetrias, resta:

$$\delta = \frac{2}{EI} \int_0^L M_{AB} \frac{\partial M_{AB}}{\partial P} dx + \frac{1}{EI} \int_0^L M_{BD} \frac{\partial M_{BD}}{\partial P} dx + \frac{2}{GI_P} \int_0^L T_{AB} \frac{\partial T_{AB}}{\partial P} dx$$

como

$$M_{AB} = \bar{M} - \frac{Px}{2} = \frac{P}{4}(L - 2x) \quad \frac{\partial M_{AB}}{\partial P} = \frac{1}{4}(L - 2x)$$

$$M_{BC} = Px \quad \frac{\partial M_{BC}}{\partial P} = x$$

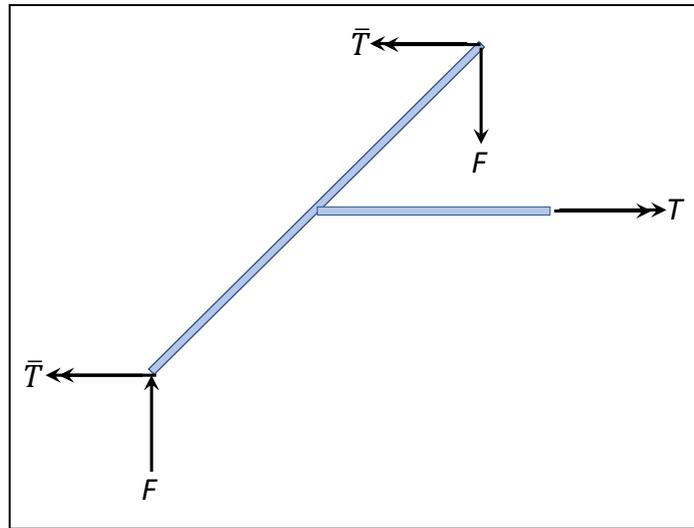
$$T_{AB} = \frac{PL}{2} \quad \frac{\partial T_{AB}}{\partial P} = \frac{L}{2}$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{P}{8EI} \int_0^L (L - 2x)^2 dx + \frac{P}{EI} \int_0^L x^2 dx + \frac{PL^2}{2GI_P} \int_0^L dx$$

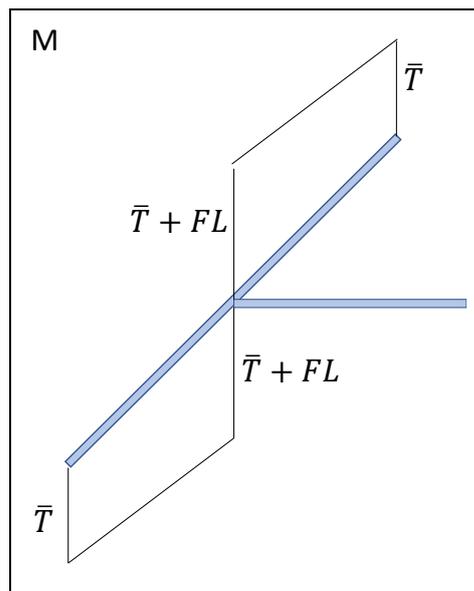
$$\Rightarrow \delta = \frac{PL^3}{24EI} + \frac{PL^3}{3EI} + \frac{PL^3}{2GI_P}$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{PL^3}{EI}$$

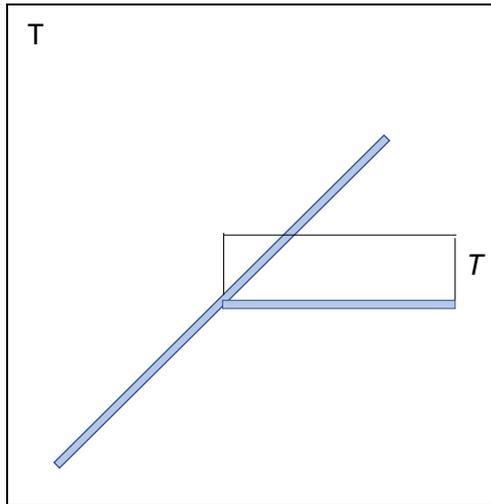
-
- b) Como a estrutura é simétrica em relação ao plano vertical que passa por BD , apenas o carregamento antissimétrico (T) colabora para em torno de y do ponto D . Usando essa simetria, podemos montar o seguinte DCL :



Os correspondentes diagramas de momento fletor e momento de torção são:



e



Os esforços \bar{T} e F estão relacionados pela equação de equilíbrio:

$$2FL + 2\bar{T} = T \Rightarrow \bar{T} = \frac{T}{2} - FL$$

Então a estrutura é hiperestática com $g = 1$ e a incógnita hiperestática pode ser \bar{T} ou F . Vamos adotar F .

Pelo princípio da energia complementar mínima:

$$\frac{\partial U^*}{\partial F} = 0$$

ou, somando as energias de flexão e torção de todas as barras e considerando a forma modificada:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{EI} \int_0^L M_{AB} \frac{\partial M_{AB}}{\partial F} dx + \frac{1}{EI} \int_0^L M_{BC} \frac{\partial M_{BC}}{\partial F} dx + \frac{1}{EI} \int_0^L M_{BD} \frac{\partial M_{BD}}{\partial F} dx \\ & + \frac{1}{GI_P} \int_0^L T_{AB} \frac{\partial T_{AB}}{\partial F} dx + \frac{1}{GI_P} \int_0^L T_{BC} \frac{\partial T_{BC}}{\partial F} dx + \frac{1}{EI} \int_0^L T_{BD} \frac{\partial T_{BD}}{\partial F} dx = 0 \end{aligned}$$

Mas nota-se que várias dessas parcelas são nulas, resultando, somente,

$$\frac{1}{EI} \int_0^L M_{AB} \frac{\partial M_{AB}}{\partial F} dx + \frac{1}{EI} \int_0^L M_{BC} \frac{\partial M_{BC}}{\partial F} dx = \frac{2}{EI} \int_0^L M_{AB} \frac{\partial M_{AB}}{\partial F} dx = 0$$

Como:

$$M_{AB} = \bar{T} + Fx = \frac{T}{2} + F(x - L)$$

$$\frac{\partial M_{AB}}{\partial F} = (x - L)$$

$$\Rightarrow \int_0^L \left(\frac{T}{2} + F(x-L) \right) (x-L) dx = 0 \Rightarrow -\frac{TL^2}{4} + \frac{FL^3}{3} = 0$$

$$\Rightarrow F = \frac{3T}{4L} \Rightarrow \bar{T} = -\frac{T}{4}$$

Conhecido o valor de F e \bar{T} , podemos substituí-los nos diagramas de esforços e calcular a rotação θ com

$$\theta = \frac{\partial U^*}{\partial T}$$

Somando a energia complementar de flexão e de torção de todas as barras e considerando a forma modificada do Teorema de Castigliano:

$$\theta = \frac{1}{EI} \int_0^L M_{AB} \frac{\partial M_{AB}}{\partial T} dx + \frac{1}{EI} \int_0^L M_{BC} \frac{\partial M_{BC}}{\partial T} dx + \frac{1}{EI} \int_0^L M_{BD} \frac{\partial M_{BD}}{\partial T} dx$$

$$+ \frac{1}{GI_P} \int_0^L T_{AB} \frac{\partial T_{AB}}{\partial T} dx + \frac{1}{GI_P} \int_0^L T_{BC} \frac{\partial T_{BC}}{\partial T} dx + \frac{1}{GI_P} \int_0^L T_{BD} \frac{\partial T_{BD}}{\partial T} dx$$

Eliminado as parcelas nulas e considerando as simetrias, resta:

$$\theta = \frac{2}{EI} \int_0^L M_{AB} \frac{\partial M_{AB}}{\partial T} dx + \frac{1}{GI_P} \int_0^L T_{BD} \frac{\partial T_{BD}}{\partial T} dx$$

como

$$M_{AB} = \bar{T} + Fx = \frac{T}{4} \left(\frac{3x}{L} - 1 \right) \quad \frac{\partial M_{AB}}{\partial T} = \frac{1}{4} \left(\frac{3x}{L} - 1 \right)$$

$$T_{BD} = T \quad \frac{\partial T_{BD}}{\partial T} = 1$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{T}{8EI} \int_0^L \left(\frac{3x}{L} - 1 \right)^2 dx + \frac{T}{GI_P} \int_0^L dx$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{TL}{8EI} + \frac{TL}{GI_P}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{11TL}{8EI}$$

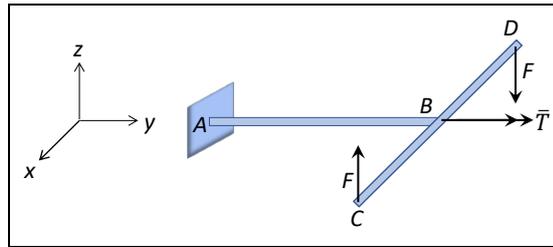
Exercício 18:

A estrutura ABCD esquematizada na figura é formada por duas barras iguais, de comprimento L , rigidez flexional EI e rigidez à torção GI_P , que estão soldadas no ponto B. Essa estrutura está presa em C e D a duas molas iguais, de rigidez k . No ponto B há uma força vertical P e um torque \bar{T} aplicados. Pedese determinar o ângulo de giro da barra AB em B.

Dados: $GI_p = \frac{4}{5}EI$ e $k = \frac{12EI}{L^3}$

Resolução:

Só o carregamento anti-simétrico contribue para o giro da barra AB, ou seja, a carga P pode ser retirada do problema, restando apenas \bar{T} . Como um carregamento anti-simétrico provoca reações vinculares anti-simétricas, as forças nas molas são iguais em módulo e têm sentidos opostos. Assim, basta estudar o problema:



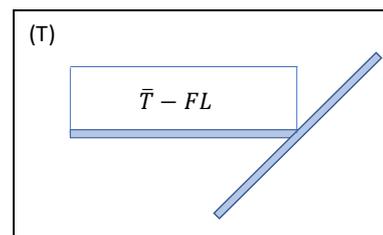
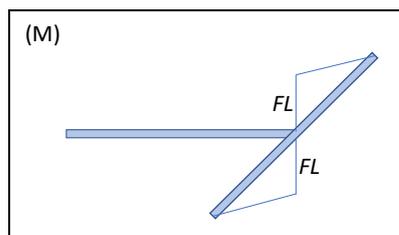
A estrutura resultante é hiperestática, com grau de hiperestaticidade 1. Podemos escolher F com ingónita hiperestática. Assim, pelo teorema da energia complementar mínima,

$$\frac{\partial U^*}{\partial F} = 0$$

Desprezando o efeito da força normal e da força cortante nas barras, a energia complementar da estrutura é a soma de três parcelas:

$$U^* = U_{flexão}^* + U_{torção}^* + U_{molas}^*$$

Para calcular, adequadamente, as parcelas devidas à flexão e à torção, devemos construir os diagramas de esforços solicitantes:



Assim, as parcelas da energia complementar são:

$$U_{flexão}^* = 2 \int_0^{L/2} \frac{(Fx)^2}{2EI} dx = \frac{FL^3}{24EI}$$

$$U_{torção}^* = \frac{(\bar{T} - FL)^2 L}{2GI_p} = \frac{5}{8} \frac{(\bar{T} - FL)^2 L}{EI}$$

$$U_{molas}^* = 2 \frac{F^2}{2k} = \frac{F^2 L^3}{12EI}$$

E, portanto,

$$U^* = \frac{L}{8EI} (5\bar{T}^2 - 10\bar{T}FL + 6F^2L^2)$$

Assim:

$$0 = \frac{\partial U^*}{\partial F} = \frac{L}{8EI} (-10\bar{T}L + 12FL^2)$$

Portanto,

$$F = \frac{5\bar{T}}{6L}$$

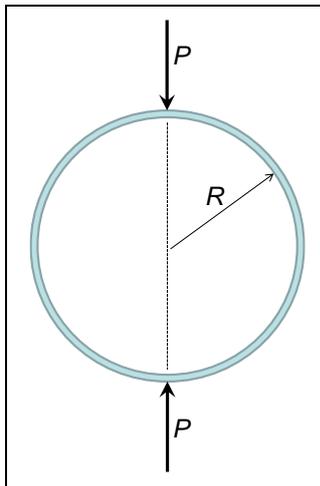
Substituindo esse valor na energia complementar:

$$U^* = \frac{5}{48} \frac{\bar{T}^2 L}{EI}$$

O giro do ponto B da barra AB pode ser obtido a partir do teorema de Crotti-Engesser:

$$\phi_B = \frac{\partial U^*}{\partial \bar{T}} \Rightarrow \phi_B = \frac{5}{24} \frac{\bar{T}L}{EI}$$

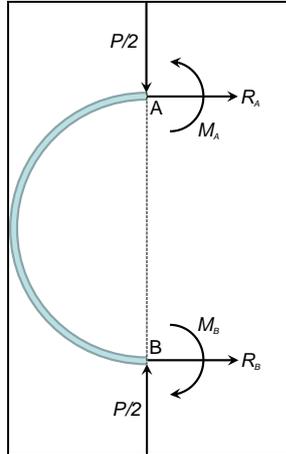
Exercício 19:



O anel da figura tem raio R e rigidez à flexão EI constante. A ele são aplicadas forças P diametralmente opostas, conforme esquematizado. Pede-se determinar a variação de diâmetro sofrida pelo anel com a aplicação das forças P . Usar a simetria do problema.

Resolução:

O anel é simétrico em relação ao seu diâmetro vertical e está submetido a esforços simétricos. Assim, podemos cortá-lo ao meio, colocando os esforços vinculares adequados:



Como o anel também tem uma simetria em relação ao seu diâmetro horizontal podemos concluir que:

$$M_A = M_B$$

e que

$$R_A = R_B$$

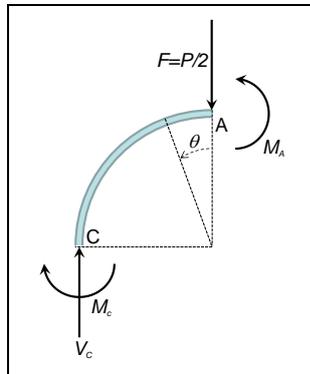
Do equilíbrio do anel

$$R_A + R_B = 0$$

e, portanto,

$$R_A = R_B = 0$$

Considerando a simetria horizontal, podemos dividi-lo mais uma vez, considerando os esforços vinculares adequados:



Equações de Equilíbrio:

$$V_C = F$$

$$M_A - M_C - FR = 0$$

Esta estrutura é hiperestática ($g=1$). Adotemos M_A como incógnita hiperestática.

Para calcular os esforços vinculares podemos utilizar o Princípio da Energia Complementar Mínima:

$$\frac{\partial U^*}{\partial M_A} = 0 \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi R}{4}} \frac{M(s)}{EI} \frac{\partial M}{\partial M_A} ds = 0 \Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{M(\theta)}{EI} \frac{\partial M}{\partial M_A} R d\theta$$

$$M(\theta) = M_A - FR \operatorname{sen} \theta$$

$$\frac{\partial M}{\partial M_A} = 1$$

$$\Rightarrow M_A = \frac{PR}{\pi}$$

A variação do diâmetro pode ser calculada pelo Segundo Teorema de Castigliano Modificado:

$$\delta = 2 \frac{\partial U}{\partial F} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M(\theta)}{EI} \frac{\partial M}{\partial F} R d\theta$$

$$M(\theta) = \frac{PR}{\pi} - FR \operatorname{sen} \theta$$

$$\frac{\partial M}{\partial F} = -R \operatorname{sen} \theta$$

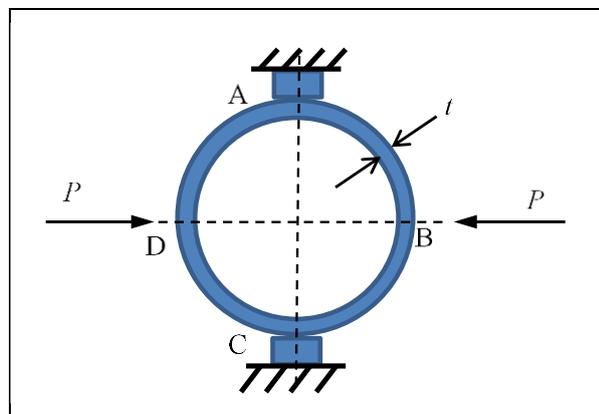
$$\Rightarrow \delta = \frac{2PR^3}{EI} \left[-\frac{1}{\pi} + \frac{\pi}{8} \right]$$

Exercício 20:

A figura mostra um anel de largura b , raio médio R e espessura t (sendo $t/R \ll 1$), fabricado com um material com módulo de elasticidade E . Considere que na configuração inicial (não deformada) o anel seja colocado entre dois batentes rígidos, fixos, e de dimensões desprezíveis (pontos A e C da figura), de tal forma que não existam folgas nem esforços de reação entre anel e batentes. Considerando que na configuração final (deformada) duas forças concentradas, de magnitude P , sejam aplicadas nos pontos diametralmente opostos B e D do anel, pede-se:

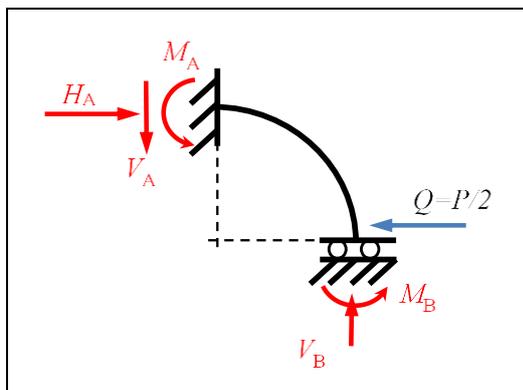
- determinar as reações verticais dos batentes sobre o anel;
- determinar a aproximação entre os pontos B e D após a aplicação do carregamento;
- determinar a energia total acumulada pelo anel após a aplicação do carregamento.

Obs: Despreze as parcelas da energia complementar associadas às forças normais e cortantes.



Resolução:

- a) Trata-se de uma estrutura simétrica submetida a carregamento simétrico, havendo dois planos de simetria que podem ser utilizados. A figura a seguir mostra um modelo simplificado que pode ser utilizado para a análise estrutural do anel nestas condições, bem como as reações devidas aos vínculos criados (que representam as reações das partes do anel que foram “removidas” sobre a parte do anel que foi “mantida”, bem como parte da reação do batente sobre o anel):



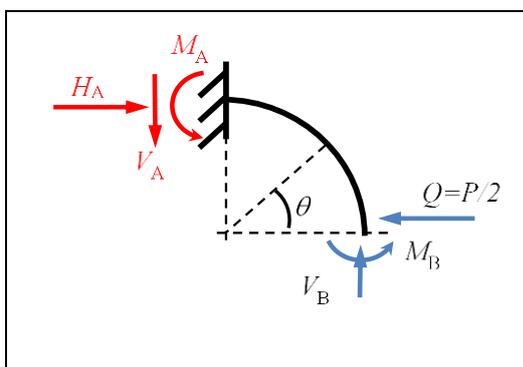
Pelas equações de equilíbrio da estática, temos:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow H_A = Q$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_A = V_B$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A + M_B + V_B R = QR$$

Temos 5 incógnitas a serem determinadas e apenas 3 equações de equilíbrio estático. Logo temos um grau de hiperestaticidade estrutural $g = 2$. Vemos, também, que a reação horizontal H_A já está totalmente determinada pelo equilíbrio, não sendo uma incógnita hiperestática. Dentre as várias soluções possíveis, optamos por adotar V_B e M_B como as incógnitas hiperestáticas a serem determinadas, o que nos leva à seguinte Estrutura Isostática Fundamental:



Veja que, desta forma, todas as reações no vínculo A podem ser determinadas automaticamente pelas três equações de equilíbrio indicadas anteriormente.

A aplicação do Princípio da Energia Complementar Mínima à Estrutura Isostática Fundamental assim obtida fornece as equações necessárias para a determinação de V_B e M_B :

$$\frac{\partial U^*}{\partial V_B} = 0 \Rightarrow \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial V_B} ds = 0 \Rightarrow \int_0^{\pi/2} \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial V_B} d\theta = 0$$

$$\frac{\partial U^*}{\partial M_B} = 0 \Rightarrow \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M_B} ds = 0 \Rightarrow \int_0^{\pi/2} \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M_B} d\theta = 0$$

A expressão do momento fletor no trecho do arco BA fica (veja a indicação do ângulo θ na figura anterior):

$$M = M_B + V_B R(1 - \cos\theta) - QR \operatorname{sen}\theta$$

Logo, teremos:

$$\int_0^{\pi/2} [M_B + V_B R(1 - \cos\theta) - QR \operatorname{sen}\theta](1 - \cos\theta) d\theta = 0$$

$$\int_0^{\pi/2} [M_B + V_B R(1 - \cos\theta) - QR \operatorname{sen}\theta] d\theta = 0$$

Levando a:

$$\begin{aligned} M_B \int_0^{\pi/2} (1 - \cos\theta) d\theta + V_B R \int_0^{\pi/2} (1 - \cos\theta)^2 d\theta \\ = QR \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta(1 - \cos\theta) d\theta \end{aligned}$$

$$M_B \int_0^{\pi/2} d\theta + V_B R \int_0^{\pi/2} (1 - \cos\theta) d\theta = QR \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta d\theta$$

E, finalmente, ao sistema:

$$M_B \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) + V_B R \left(\frac{3\pi}{4} - 2 \right) = \frac{QR}{2}$$

$$M_B \left(\frac{\pi}{2} \right) + V_B R \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = QR$$

Cuja solução fornece:

$$M_B = 4QR \left(\frac{\pi - 3}{\pi^2 - 8} \right) \quad \text{e} \quad V_B = 2Q \left(\frac{4 - \pi}{\pi^2 - 8} \right)$$

Obs: Os sinais positivos encontrados para V_B e M_B indicam que os sentidos inicialmente arbitrados para estes esforços no D.C.L. estão corretos.

A força de reação de cada um dos batentes sobre o anel é dada, então, por:

$$R = 2V_B = 4Q \left(\frac{4 - \pi}{\pi^2 - 8} \right) = 2P \left(\frac{4 - \pi}{\pi^2 - 8} \right)$$

Utilizando novamente a Estrutura Isostática Fundamental escolhida e aplicando o Teorema de Crotti-Engesser, temos que o deslocamento horizontal da seção B (em relação à seção A, que permanece fixa) é dado por:

$$\delta = \frac{\partial U^*}{\partial Q} \Rightarrow \delta = \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial Q} ds \Rightarrow \delta = \int_0^{\pi/2} \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial Q} R d\theta$$

Logo:

$$\delta = \int_0^{\pi/2} \frac{[M_B + V_B R(1 - \cos\theta) - QR \sin\theta]}{EI} \cdot (-R \sin\theta) R d\theta$$

Levando a:

$$\delta = -\frac{M_B R^2}{EI} \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta - \frac{V_B R^3}{EI} \int_0^{\pi/2} \left(\sin\theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right) d\theta + \frac{QR^3}{EI} \int_0^{\pi/2} (\sin^2\theta) d\theta$$

Resolvendo as integrais indicadas e substituindo os valores encontrados no item anterior para os esforços V_B e M_B , e lembrando ainda que $Q = P/2$, encontramos finalmente:

$$\delta = \frac{PR^3}{8EI} \left(\frac{32 + \pi^3 - 20\pi}{\pi^2 - 8} \right)$$

Assim, a aproximação entre os pontos diametralmente opostos B e D, após a aplicação do carregamento, será:

$$\Delta = 2\delta = \frac{PR^3}{4EI} \left(\frac{32 + \pi^3 - 20\pi}{\pi^2 - 8} \right)$$

onde o momento de inércia a ser considerado é:

$$I = \frac{bt^3}{12}$$

Resultando:

$$\Delta = \frac{3P}{Eb} \left(\frac{R}{t}\right)^3 \left(\frac{32 + \pi^3 - 20\pi}{\pi^2 - 8}\right)$$

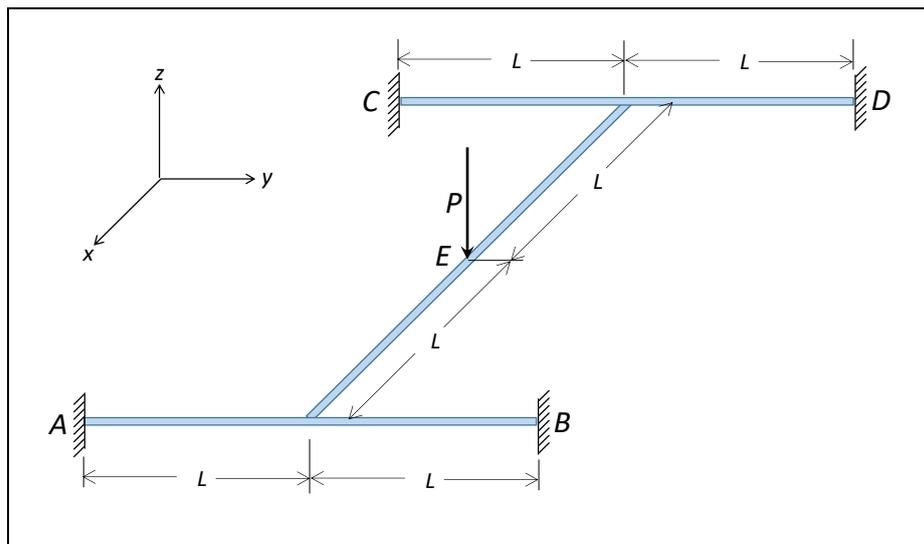
Aplicando o Princípio do Trabalho e da Energia, teremos:

$$U^* = U = W^* = W = 2 \left(\frac{P\delta}{2}\right) = P\delta = \frac{P^2 R^3}{8EI} \left(\frac{32 + \pi^3 - 20\pi}{\pi^2 - 8}\right)$$

Exercício 21:

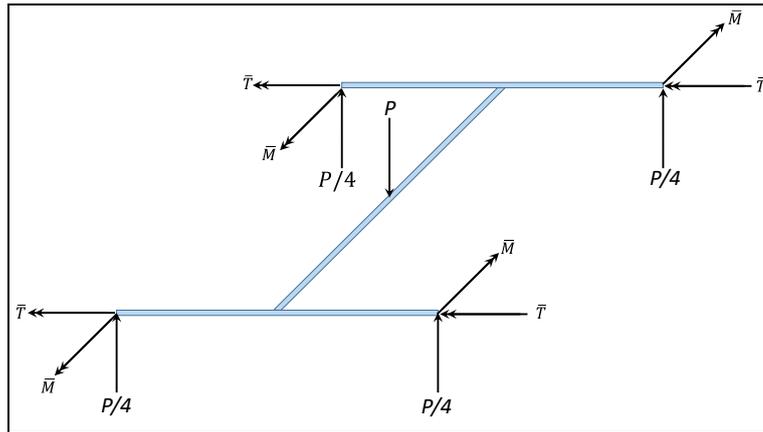
A estrutura horizontal em forma de H da figura está engastada nas extremidades A, B, C e D e está submetida a uma força vertical P em seu ponto central E. Ela é formada por barras prismáticas soldadas, com rigidez à flexão EI e à torção GI_p.

Pede-se determinar os esforços nos engastamentos, fazendo GI_p= 0,5EI.



Resolução:

A estrutura possui dois planos de simetria verticais. Usando essa simetria, podemos esquematizar os esforços nos vínculos da seguinte forma:



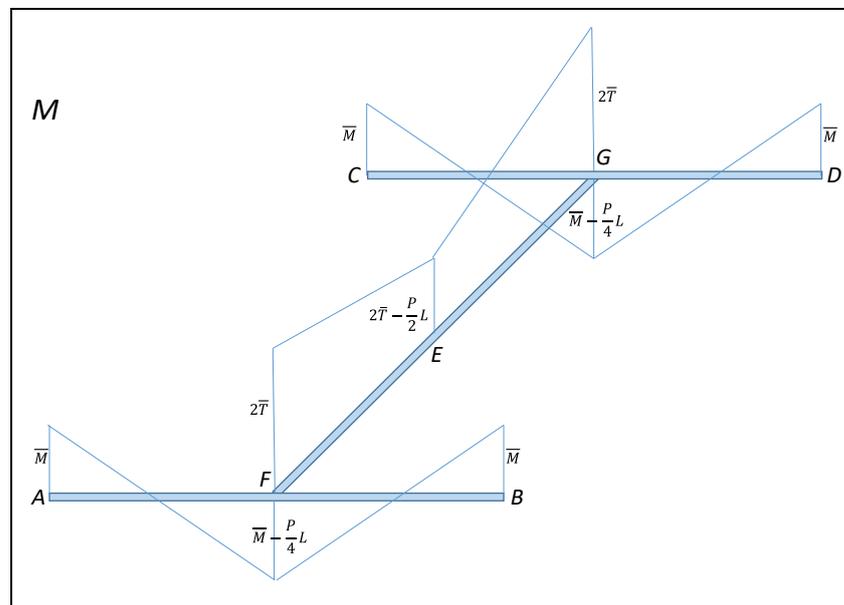
Assim, teremos apenas duas incógnitas hiperestáticas \bar{M} e \bar{T} . Então, pelo Princípio da Mínima Energia Complementar:

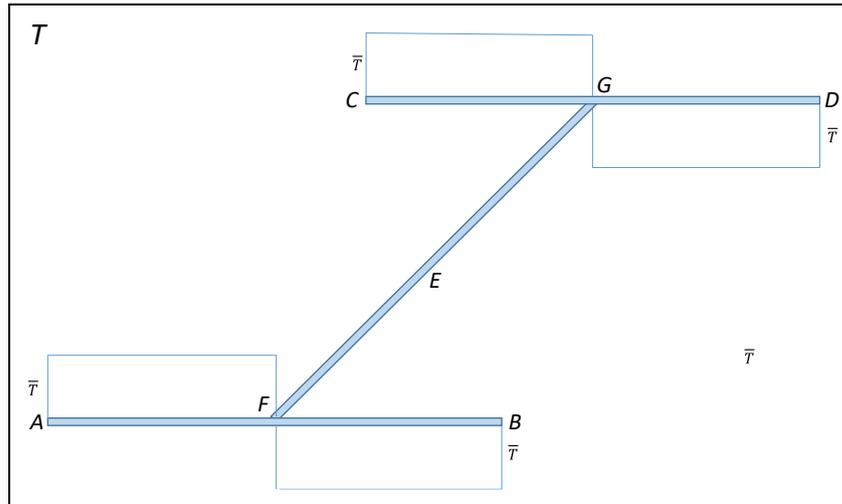
$$\frac{\partial U^*}{\partial \bar{M}} = 0$$

e

$$\frac{\partial U^*}{\partial \bar{T}} = 0$$

Desprezando o efeito da força cortante, a energia complementar será a soma da energia devida à flexão com a energia devida à torção. Para calcular essa energia, devemos, primeiro, montar os diagramas de momento fletor e momento de torção:





Usando as simetrias existentes, a energia complementar total pode ser escrita com:

$$U^* = 4U_{AF}^* + 2U_{FE}^*$$

Na barra AF temos flexão e torção:

$$M_1(x) = -\bar{M} + \frac{P}{4}x$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial \bar{M}} = -1$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial \bar{T}} = 0$$

$$T_1(x) = \bar{T}$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial \bar{M}} = 0$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial \bar{T}} = 1$$

Na barra FE temos apenas flexão:

$$M_2(x) = -2\bar{T} + \frac{P}{2}x$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial \bar{M}} = 0$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial \bar{T}} = -2$$

Assim:

$$0 = \frac{\partial U^*}{\partial \bar{M}} = 4 \frac{1}{EI} \int_0^L M_1 \frac{\partial M_1}{\partial \bar{M}} dx$$

$$= 4 \frac{1}{EI} \int_0^L \left(\bar{M} - \frac{P}{4} x \right) dx = \frac{4}{EI} \left(\bar{M} L - \frac{PL^2}{8} \right)$$

$$\Rightarrow \bar{M} = \frac{PL}{8}$$

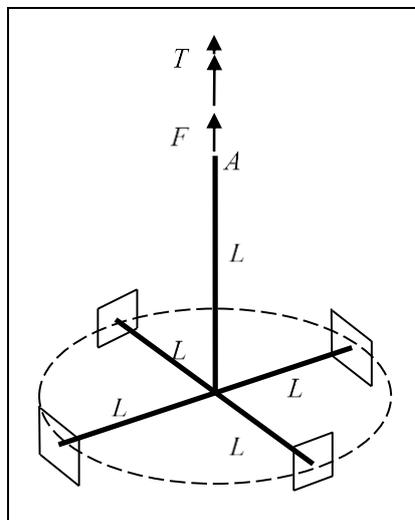
$$0 = \frac{\partial U^*}{\partial \bar{T}} = 4 \frac{1}{GJ} \int_0^L T_1 \frac{\partial T_1}{\partial \bar{T}} dx + 2 \frac{1}{EI} \int_0^L M_2 \frac{\partial M_2}{\partial \bar{T}} dx$$

$$= \frac{8}{EI} \int_0^L \bar{T} dx + \frac{2}{EI} \int_0^L \left(2\bar{T} - \frac{P}{2} x \right) 2 dx = \frac{1}{EI} (16\bar{T}L - PL^2)$$

$$\Rightarrow \bar{T} = \frac{PL}{16}$$

Alternativamente, a questão pode ser resolvida considerando apenas metade ou um quarto da estrutura, colocando a vinculação adequada para garantir as condições de simetria.

Exercício 22:



A estrutura indicada na figura é formada por barras de seção transversal circular cheia (diâmetro d , tal que $d/L \ll 1$), de tal forma que as quatro barras horizontais estejam regularmente espaçadas na circunferência de raio L e engastadas em seus pontos extremos. Pede-se determinar, para os carregamentos F e T indicados:

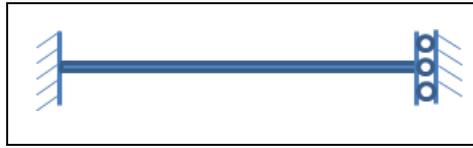
- o deslocamento vertical da extremidade A da barra vertical;
- a rotação da extremidade A da barra vertical.

Dados: EI , GI_p , L , iguais para todas as barras.

Resolução:

- Para o cálculo do deslocamento vertical da extremidade A , apenas a força F contribui. Desprezando-se a energia complementar devida à força normal, apenas as barras horizontais colaboram para esse deslocamento. Como a estrutura tem dois planos de simetria, cada barra horizontal é representada pela barra

hiperestática equivalente, já que o nó central da estrutura, pela simetria, não pode sofrer rotação:



Assim, além de um quarto da força F teremos um momento M_0 aplicado à extremidade da barra ligada ao nó central:



Adotando M_0 como incógnita hiperestática, pelo teorema da energia complementar mínima, tem-se:

$$\frac{\partial U^*}{\partial M_0} = 0 \Rightarrow \int_0^L \frac{M(x)}{EI} \frac{\partial M}{\partial M_0} dx = 0$$

Como:

$$M(x) = Px - M_0$$

e

$$\frac{\partial M}{\partial M_0} = -1$$

conclui-se que

$$M_0 = \frac{PL}{2}$$

O deslocamento vertical δ da barra vertical será o mesmo deslocamento da extremidade de cada barra horizontal. Assim, pelo teorema de Castigliano,

$$\delta = \frac{\partial U^*}{\partial P} \Rightarrow \delta = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} dx$$

e, como

$$\frac{\partial M}{\partial P} = x$$

conclui-se que

$$\delta = \frac{FL^3}{48EI}$$

- b) Para o cálculo da rotação da extremidade A , apenas o momento de torção T contribui. Mas, além de ele torcer a barra vertical, ele provoca flexão das barras horizontais no plano horizontal.



Considerando a simetria da estrutura, na aplicação do momento de torção, o seu nó central deve permanecer na mesma posição. Assim, cada barra horizontal pode ser representada pela barra equivalente:



Assim, além de estar submetida a um quarto do momento T , a barra horizontal estará também submetida a uma força P :



Adotando P como incógnita hiperestática, pelo teorema da energia complementar mínima tem-se:

$$\frac{\partial U^*}{\partial P} = 0 \Rightarrow \int_0^L \frac{M(x)}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} dx = 0$$

Como:

$$M(x) = M_0 - Px$$

e

$$\frac{\partial M}{\partial P} = -x$$

conclui-se que

$$P = \frac{3M_0}{2L}$$

A rotação θ_1 da extremidade da barra horizontal pode ser obtida pelo teorema de Castigliano:

$$\theta_1 = \frac{\partial U^*}{\partial M_0} \Rightarrow \theta_1 = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M_0} dx$$

e, como

$$\frac{\partial M}{\partial M_0} = 1$$

conclui-se que

$$\theta_1 = \frac{TL}{16EI}$$

Para obter a rotação θ sofrida pela extremidade superior da barra vertical, à rotação θ_1 deve ser somada a rotação θ_2 provocada pela torção da barra vertical:

$$\theta_2 = \frac{TL}{GI_p}$$

Assim:

$$\theta = TL \left(\frac{1}{16EI} + \frac{1}{GI_p} \right)$$