
PME 3211 – Mecânica dos Sólidos II

**Introdução ao Estudo das
Deformações**

Prof. Dr. Clóvis de Arruda Martins

Janeiro de 2021

1 Apresentação

A presente apostila apresenta a segunda parte das notas de aula da disciplina Mecânica dos Sólidos II, que corresponde a uma introdução ao estudo das deformações. O conteúdo aqui presente é baseado no curso que venho ministrando há vários anos em parceria com o Prof. Dr. Roberto Ramos Jr. Boa parte do conteúdo desta apostila se baseia em notas de aulas ministradas pelo Prof. Ramos. Os exercícios aqui apresentados são questões de provas aplicadas nas disciplinas de Mecânica dos Sólidos, alguns de minha autoria, os outros de autoria do Prof. Ramos.

2 Tensor Gradiente de Deslocamentos

Consideremos dois pontos P e Q do sólido S representado na Figura 1 em sua posição inicial, indeformada. Suponhamos que os dois pontos sejam muito próximos um do outro, que

$$(Q - P) = d\vec{r} = \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} \quad (1)$$

e que \vec{n} seja o versor da direção de $(Q - P)$,

$$\vec{n} = \frac{d\vec{r}}{dr} = \begin{Bmatrix} \frac{dx}{dr} \\ \frac{dy}{dr} \\ \frac{dz}{dr} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} \quad (2)$$

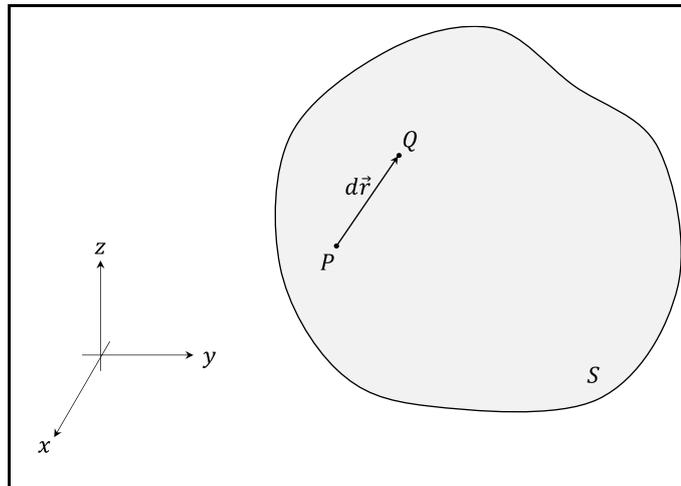


Figura 1 – Sólido S - situação indeformada.

Suponhamos que, após a aplicação de um sistema de forças, o sólido S tenha a nova posição e a nova forma esquematizadas na Figura 2. Podemos definir três funções u , v e w para representar as componentes do deslocamento que um ponto do sólido sofreu, a partir da sua posição inicial, respectivamente, nas direções x , y e z . Essas funções têm que ser deriváveis, caso contrário o sólido estaria se rasgando.

Assim, se o ponto P passou para uma nova posição P' , conforme a Figura 2, o seu deslocamento foi:

$$(P' - P) = \begin{pmatrix} u(P) \\ v(P) \\ w(P) \end{pmatrix} \quad (3)$$

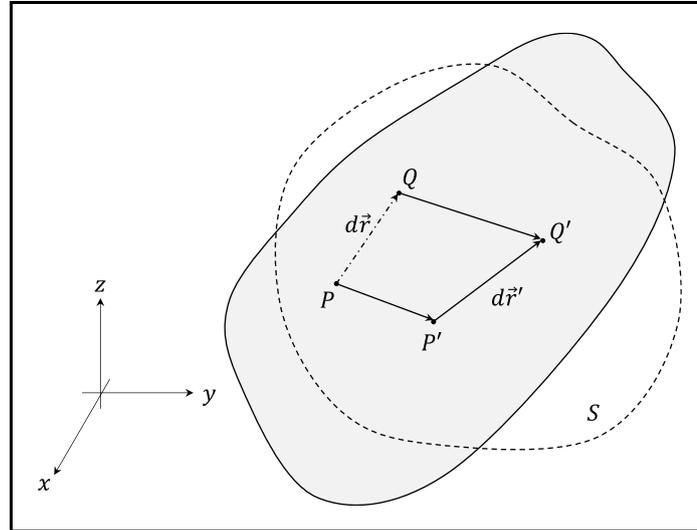


Figura 2 – Sólido S – situação deformada.

De maneira análoga, o deslocamento sofrido pelo ponto Q foi

$$(Q' - Q) = \begin{pmatrix} u(Q) \\ v(Q) \\ w(Q) \end{pmatrix} \quad (4)$$

O vetor $d\vec{r}$ na posição original se transformou no vetor $d\vec{r}'$ na posição deformada:

$$d\vec{r}' = (Q' - P') = (Q' - Q) + (Q - P) - (P' - P) \quad , \quad (5)$$

ou, usando (1), (3) e (4),

$$d\vec{r}' = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u(Q) - u(P) \\ v(Q) - v(P) \\ w(Q) - w(P) \end{pmatrix} \quad (6)$$

Mas, do cálculo das funções de várias variáveis

$$u(Q) - u(P) = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \quad , \quad (7)$$

$$v(Q) - v(P) = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \quad (8)$$

e

$$w(Q) - w(P) = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \quad (9)$$

Assim,

$$d\vec{r}' = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \quad (10)$$

Então, a mudança relativa sofrida por $d\vec{r}$ foi

$$\frac{d\vec{r}' - d\vec{r}}{dr} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \quad (11)$$

onde foi usada a equação (2).

Aqui aparece uma nova grandeza tensorial, que é o *tensor gradiente de deslocamentos*, representado pela matriz:

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Em notação tensorial podemos escrever:

$$\frac{d\vec{r}' - d\vec{r}}{dr} = L[\vec{n}] \quad (13)$$

Note que, se o movimento sofrido por S for apenas um movimento de translação, então $d\vec{r} = d\vec{r}'$ e o gradiente de deslocamentos será nulo. Mas, se houver rotação ou deformação no corpo, o gradiente de deslocamento será diferente de zero. Para separar o que é rotação e o que é deformação, vamos estudar, no próximo capítulo, como podemos descrever os alongamentos, as distorções e as rotações.

3 Componentes do deslocamento

3.1 Alongamentos

A Figura 3 apresenta um elemento cúbico retirado do sólido S no seu estado indeformado. O comprimento do segmento PA é

$$\overline{PA} = dx \quad (14)$$

Suponhamos que o sólido sofra uma deformação apenas na direção de x . O ponto P sofrerá um deslocamento u , passando a uma nova posição P' , e o ponto A sofrerá um deslocamento

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad (15)$$

passando a uma nova posição A' .

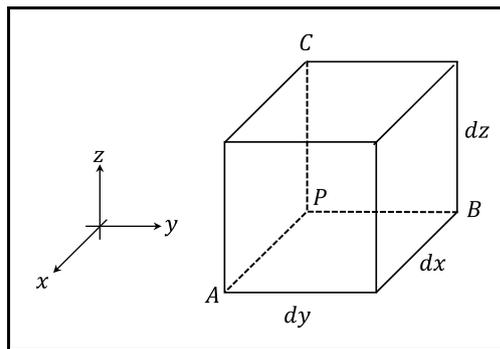


Figura 3 – Elemento cúbico retirado de S .

E o comprimento de $P'A'$ será

$$\overline{P'A'} = dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad (16)$$

Define-se o alongamento ε como a variação de comprimento relativa sofrida pelo segmento:

$$\varepsilon = \frac{\overline{P'A'} - \overline{PA}}{\overline{PA}} \quad (17)$$

ou seja, a variação de comprimento dividida pelo comprimento inicial.

Usando (14) e (16), então,

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad (18)$$

onde o índice x foi usado para indicar a direção em que se processou o alongamento. De forma análoga, um alongamento na direção y será

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (19)$$

e um alongamento na direção z será

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad . \quad (20)$$

3.2 Distorções

A Figura 4 representa o ângulo \widehat{APB} entre duas direções tomadas a partir de um ponto P de um sólido. Este ângulo é originariamente reto, pois o lado PA é paralelo ao eixo x e o lado PB é paralelo ao eixo y . Após o sólido se deformar, o ângulo \widehat{APB} passou a ser $\widehat{A'P'B'}$ e não é mais reto. Dizemos que o ângulo sofreu uma *distorção* com a deformação do corpo. Uma *distorção positiva* é uma *diminuição* de um ângulo originariamente reto. Uma *distorção negativa* é um *aumento* de um ângulo originariamente reto.

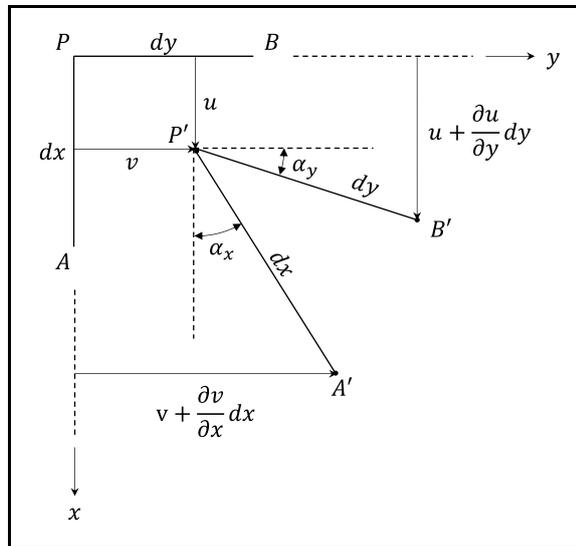


Figura 4 – Distorção entre as direções x e y .

Então a distorção entre as direções x e y será

$$\gamma_{xy} = \alpha_x + \alpha_y \quad . \quad (21)$$

Da Figura 4,

$$\text{sen } \alpha_x = \frac{v + \frac{\partial v}{\partial x} dx - v}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (22)$$

e, como estamos considerando pequenos deslocamentos e conseqüentemente os ângulos são pequenos,

$$\alpha_x = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (23)$$

Analogamente,

$$\alpha_y = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (24)$$

Então,

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (25)$$

De forma análoga, podemos definir a distorção entre as direções x e z :

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (26)$$

e entre as direções y e z :

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (27)$$

3.3 Rotações

A variação do ângulo reto indicada na Figura 4 pode ser decomposta em duas parcelas, conforme esquematizado na Figura 5, onde Ω_z é uma rotação de corpo rígido em torno do eixo z .

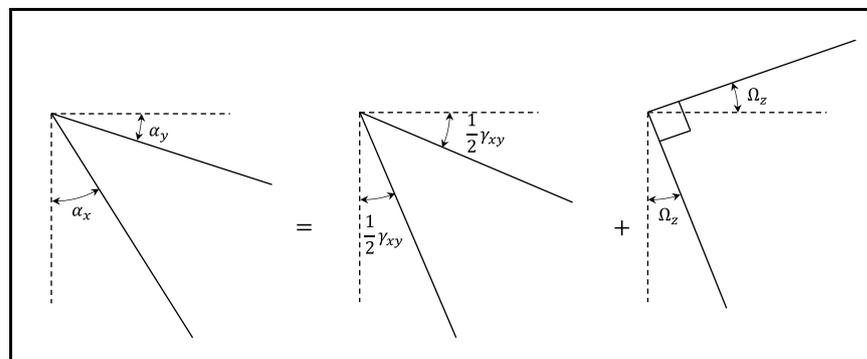


Figura 5 – Decomposição da variação do ângulo.

Podemos escrever, então, que

$$\alpha_x = \frac{1}{2}\gamma_{xy} + \Omega_z \quad (28)$$

Usando (23) e (25) resulta que

$$\Omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \quad (29)$$

De forma análoga, uma rotação de corpo rígido em torno do eixo x será

$$\Omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \quad (30)$$

e uma rotação em torno do eixo y será

$$\Omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \quad (31)$$

4 Decomposição do Tensor Gradiente de Deslocamentos

Propriedade: Uma matriz quadrada $[A]$ qualquer pode ser escrita como a soma de uma matriz simétrica $[A_s]$ e uma matriz antissimétrica $[A_a]$:

$$[A] = [A_s] + [A_a] \quad . \quad (32)$$

Demonstração: A demonstração é imediata, basta escrever as componentes simétrica e antissimétrica na forma geral:

$$[A_s] = \frac{1}{2}([A] + [A]^t) \quad (33)$$

e

$$[A_a] = \frac{1}{2}([A] - [A]^t) \quad . \quad (34)$$

Dessa forma, o Tensor Gradiente de Deslocamentos pode ser decomposto em uma parcela $[E]$, simétrica, e uma parcela $[\Omega]$, antissimétrica:

$$[L] = [E] + [\Omega] \quad . \quad (35)$$

A parcela simétrica $[E]$ é o *Tensor das Pequenas Deformações*. Usando (12) e (33) vem

$$[E] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad . \quad (36)$$

Note que podemos identificar em $[E]$ os alongamentos (18), (19) e (20) e as distorções (25), (26) e (27). Assim,

$$[E] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad . \quad (37)$$

A parcela antissimétrica $[\Omega]$ do tensor $[L]$ é o *Tensor das Pequenas Rotações*. Usando (12) e (34) vem

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) & -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) & 0 \end{bmatrix} . \quad (38)$$

Podemos identificar em $[\Omega]$ as rotações (29), (30) e (31). Assim,

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{bmatrix} . \quad (39)$$

5 Cálculo do alongamento em uma dada direção

Neste capítulo, vamos ver como utilizamos o Tensor das Pequenas Deformações para calcular o alongamento em uma dada direção \vec{n} . Para isso, vamos voltar à Figura 2 que indica que o vetor $d\vec{r}$ passou a ser $d\vec{r}'$ com o movimento e a deformação do sólido S . Assim, o alongamento sofrido pelo segmento PQ , que tem a direção de \vec{n} , usando a definição de alongamento apresentada no item 3.1, foi

$$\varepsilon = \frac{dr' - dr}{dr} \quad (40)$$

e, portanto,

$$dr' = (1 + \varepsilon)dr \quad (41)$$

ou, ainda,

$$dr'^2 = (1 + \varepsilon)^2 dr^2 \quad (42)$$

Como

$$dr'^2 = d\vec{r}' \cdot d\vec{r}' \quad (43)$$

então, de (10),

$$\begin{aligned} dr'^2 = & \left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \right)^2 \\ & + \left(dy + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \right)^2 \\ & + \left(dz + \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \right)^2 \end{aligned} \quad (44)$$

Então, de (42) e (44), e usando (2):

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon)^2 = & \frac{dr'^2}{dr^2} \\ = & \left[n_x \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + n_y \frac{\partial u}{\partial y} + n_z \frac{\partial u}{\partial z} \right]^2 \\ & + \left[n_x \frac{\partial v}{\partial x} + n_y \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + n_z \frac{\partial v}{\partial z} \right]^2 \\ & + \left[n_x \frac{\partial w}{\partial x} + n_y \frac{\partial w}{\partial y} + n_z \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right]^2 \end{aligned} \quad (45)$$

Vamos fazer, agora, a hipótese de que as deformações são pequenas. Esta hipótese é válida para grande parte das aplicações de Engenharia Mecânica e para grande parte dos materiais. Para se ter uma ideia, o alongamento de um aço de construção quando ele atinge a tensão de escoamento é da ordem de 2%. Quando as deformações são pequenas, desprezam-se termos quadráticos nas deformações ou produtos de deformações face à unidade. Ou seja, desprezam-se quadrados das derivadas parciais dos deslocamentos ou produtos dessas derivadas face à unidade. Assim,

$$(1 + \varepsilon)^2 = 1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2 \cong 1 + 2\varepsilon \quad (46)$$

Aplicando a hipótese de pequenas deformações, ou seja, desprezando os termos quadráticos, a equação (45) se reduz a

$$\begin{aligned} 1 + 2\varepsilon = & n_x^2 \left(1 + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) + 2n_x n_y \frac{\partial u}{\partial y} + 2n_x n_z \frac{\partial u}{\partial z} \\ & + 2n_x n_y \frac{\partial v}{\partial x} + n_y^2 \left(1 + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2n_y n_z \frac{\partial v}{\partial z} \\ & + 2n_x n_z \frac{\partial w}{\partial x} + 2n_y n_z \frac{\partial w}{\partial y} + n_z^2 \left(1 + 2 \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (47)$$

Como \vec{n} é um versor, ou seja,

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 \quad (48)$$

então (47) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \varepsilon = & n_x^2 \frac{\partial u}{\partial x} + n_y^2 \frac{\partial v}{\partial y} + n_z^2 \frac{\partial w}{\partial z} \\ & + n_x n_y \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ & + n_x n_z \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ & + n_y n_z \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (49)$$

Lembrando das definições dos alongamentos (18), (19) e (20) e das distorções (25), (26) e (27), (49) pode ser rescrita como

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \varepsilon_x n_x^2 + \varepsilon_y n_y^2 + \varepsilon_z n_z^2 \\ & + \gamma_{xy} n_x n_y + \gamma_{xz} n_x n_z + \gamma_{yz} n_y n_z \end{aligned} \quad (50)$$

ou, em notação matricial,

$$\varepsilon(\vec{n}) = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} \quad (51)$$

onde o argumento \vec{n} foi adicionado para tornar explícito que ε é o alongamento sofrido pela direção \vec{n} em um certo ponto P .

Lembrando da definição do Tensor das Pequenas Deformações (37), em notação tensorial:

$$\varepsilon(\vec{n}) = E[\vec{n}] \cdot \vec{n} \quad (52)$$

Note que (52) é apenas uma forma compacta de se escrever (51), os produtos matriciais a serem realizados são os indicados em (51).

Se você se lembrar do estudo das tensões, verá que esta última expressão é análoga à expressão tensorial que permite calcular a tensão normal σ para uma dada direção \vec{n} .

6 Cálculo da distorção entre duas direções perpendiculares

No item 3.2, definimos distorção como uma variação de um ângulo reto e definimos as distorções que ocorrem entre as direções dos eixos coordenados xyz . Neste capítulo vamos calcular a distorção entre duas direções perpendiculares quaisquer e como ela se relaciona com as distorções entre os eixos coordenados. Seja o ângulo reto \widehat{POQ} formado pelas direções dos segmentos OP e OQ de um sólido S , na situação indeformada, conforme a Figura 6.

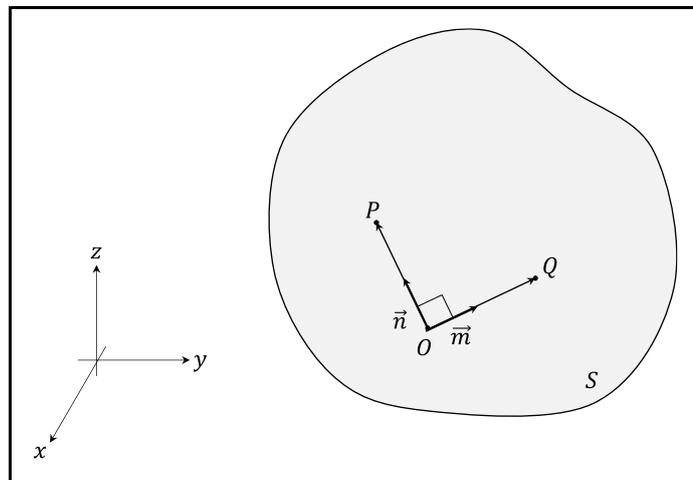


Figura 6 – Sólido S na situação indeformada.

Sejam

$$d\vec{r}_p = (P - O) = \begin{pmatrix} dx_p \\ dy_p \\ dz_p \end{pmatrix} \quad (53)$$

e

$$d\vec{r}_q = (Q - O) = \begin{pmatrix} dx_q \\ dy_q \\ dz_q \end{pmatrix} \quad (54)$$

então o versor \vec{n} da direção de OP pode ser escrito como:

$$\vec{n} = \frac{(P - O)}{|P - O|} = \frac{d\vec{r}_p}{dr_p} = \frac{1}{dr_p} \begin{pmatrix} dx_p \\ dy_p \\ dz_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \quad (55)$$

e o versor da direção de OQ , \vec{m} , como:

$$\vec{m} = \frac{(Q - O)}{|Q - O|} = \frac{d\vec{r}_Q}{dr_Q} = \frac{1}{dr_Q} \begin{Bmatrix} dx_Q \\ dy_Q \\ dz_Q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{Bmatrix} \quad (56)$$

Quando o sólido S se deforma, o ângulo \widehat{POQ} transforma-se no ângulo $\widehat{P'O'Q'}$, conforme a Figura 7. Se houve variação no ângulo dizemos que houve uma distorção. Se o ângulo diminuiu, a distorção é positiva, mas se o ângulo aumentou, a distorção é negativa.

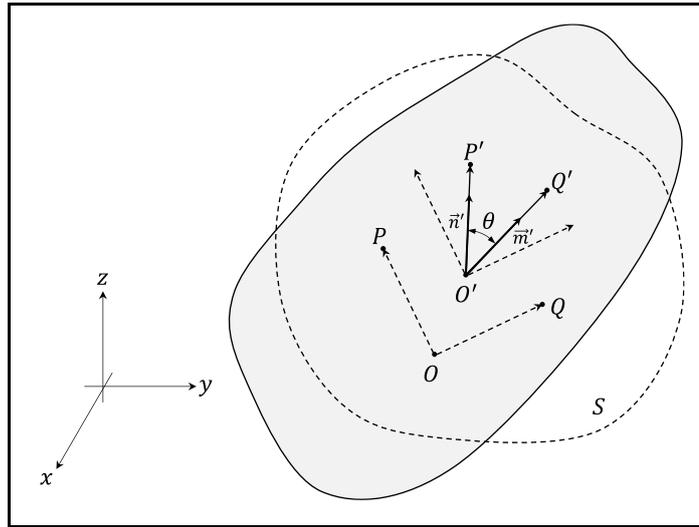


Figura 7 – Sólido S na situação deformada.

Sejam \vec{n}' o versor da direção de $O'P'$,

$$\vec{n}' = \frac{(P' - O')}{|P' - O'|} \quad (57)$$

e \vec{m}' , o versor da direção $O'Q'$,

$$\vec{m}' = \frac{(Q' - O')}{|Q' - O'|} \quad (58)$$

Pela definição, a distorção γ entre as direções de OP e OQ é

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \theta \quad (59)$$

e, portanto

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \gamma \quad (60)$$

Então,

$$\cos \theta = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \gamma \right) = \sin \gamma \quad (61)$$

Assim, da hipótese de pequenas deformações, resulta que

$$\gamma = \cos \theta \quad (62)$$

Por outro lado, como \vec{n}' e \vec{m}' são versores,

$$\vec{n}' \cdot \vec{m}' = \cos \theta \quad (63)$$

e, portanto,

$$\gamma = \vec{n}' \cdot \vec{m}' \quad (64)$$

Então, para obter a distorção, basta calcular o produto escalar entre \vec{n}' e \vec{m}' , mas primeiro temos que calcular esses versores.

Vamos supor que, no processo de deformação, o segmento OP tenha sofrido um alongamento ε_P . Então

$$|P' - O'| = (1 + \varepsilon_P)|P - O| = (1 + \varepsilon_P)dr_P \quad (65)$$

Assim, o versor \vec{n}' apresentado em (57), pode ser escrito como:

$$\vec{n}' = \frac{(P' - P) + (P - O) - (O' - O)}{(1 + \varepsilon_P)dr_P} \quad (66)$$

Mas $(P' - P)$ é o deslocamento sofrido pelo ponto P , que pode ser descrito pelas funções u , v e w apresentadas no Capítulo 2:

$$(P' - P) = \begin{pmatrix} u(P) \\ v(P) \\ w(P) \end{pmatrix} \quad (67)$$

e $(O' - O)$ e o deslocamento sofrido pelo ponto O ,

$$(O' - O) = \begin{pmatrix} u(O) \\ v(O) \\ w(O) \end{pmatrix} \quad (68)$$

Assim, usando (53), (67) e (68) em (66), podemos escrever:

$$\vec{n}' = \frac{1}{dr_P(1 + \varepsilon_P)} \left[\begin{pmatrix} dx_P \\ dy_P \\ dz_P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u(P) - u(O) \\ v(P) - v(O) \\ w(P) - w(O) \end{pmatrix} \right] \quad (69)$$

Mas, do cálculo das funções de múltiplas variáveis,

$$u(P) - u(O) = \frac{\partial u}{\partial x} dx_P + \frac{\partial u}{\partial y} dy_P + \frac{\partial u}{\partial z} dz_P \quad (70)$$

$$v(P) - v(O) = \frac{\partial v}{\partial x} dx_P + \frac{\partial v}{\partial y} dy_P + \frac{\partial v}{\partial z} dz_P \quad (71)$$

e

$$w(P) - w(O) = \frac{\partial w}{\partial x} dx_P + \frac{\partial w}{\partial y} dy_P + \frac{\partial w}{\partial z} dz_P \quad (72)$$

Então, a componente n'_x do versor \vec{n}' será dada por

$$n'_x = \frac{dx_P + \frac{\partial u}{\partial x} dx_P + \frac{\partial u}{\partial y} dy_P + \frac{\partial u}{\partial z} dz_P}{dr_P(1 + \varepsilon_P)} \quad (73)$$

ou, usando (55)

$$n'_x = \frac{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y + \frac{\partial u}{\partial z} n_z}{(1 + \varepsilon_P)} \quad (74)$$

Multiplicando tanto o numerador quanto o denominador de (74) por $(1 - \varepsilon_P)$ e desprezando as parcelas quadráticas, chegamos a

$$n'_x = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon_P\right) n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y + \frac{\partial u}{\partial z} n_z \quad (75)$$

Da mesma forma obtemos as outras componentes do vetor \vec{n}' :

$$n'_y = \frac{\partial v}{\partial x} n_x + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} - \varepsilon_P\right) n_y + \frac{\partial v}{\partial z} n_z \quad (76)$$

e

$$n'_z = \frac{\partial w}{\partial x} n_x + \frac{\partial w}{\partial y} n_y + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} - \varepsilon_P\right) n_z \quad (77)$$

O cálculo do versor \vec{m}' é feito de forma análoga. Se ε_Q for o alongamento sofrido por OQ , as componentes desse versor serão:

$$m'_x = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon_Q\right) m_x + \frac{\partial u}{\partial y} m_y + \frac{\partial u}{\partial z} m_z \quad (78)$$

$$m'_y = \frac{\partial v}{\partial x} m_x + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} - \varepsilon_Q\right) m_y + \frac{\partial v}{\partial z} m_z \quad (79)$$

e

$$m'_z = \frac{\partial w}{\partial x} m_x + \frac{\partial w}{\partial y} m_y + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} - \varepsilon_q\right) m_z \quad (80)$$

A distorção γ pode ser calculada, agora, usando (64):

$$\gamma(\vec{n}, \vec{m}) = n'_x m'_x + n'_y m'_y + n'_z m'_z \quad (81)$$

onde colocamos a distorção como função dos versores \vec{n} e \vec{m} para ressaltar quais são as direções entre as quais ocorre a distorção que estamos calculando.

Substituindo (75), (76), (77), (78), (79) e (80) em (81) e desprezando os termos quadráticos nas deformações, chegamos a

$$\begin{aligned} \gamma(\vec{n}, \vec{m}) &= (1 - \varepsilon_p - \varepsilon_q)(n_x m_x + n_y m_y + n_z m_z) \\ &+ 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} n_x m_x + \frac{\partial v}{\partial y} n_y m_y + \frac{\partial w}{\partial z} n_z m_z \right) \\ &+ \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_y m_x + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) n_z m_x \\ &+ \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_x m_y + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) n_x m_z \\ &+ \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) n_y m_z + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) n_z m_y \end{aligned} \quad (82)$$

Lembrando que \vec{n} e \vec{m} são versores ortogonais, então,

$$n_x m_x + n_y m_y + n_z m_z = 0 \quad (83)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \gamma(\vec{n}, \vec{m}) &= 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} n_x m_x + \frac{\partial v}{\partial y} n_y m_y + \frac{\partial w}{\partial z} n_z m_z \right) \\ &+ \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_y m_x + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) n_z m_x \\ &+ \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_x m_y + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) n_x m_z \\ &+ \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) n_y m_z + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) n_z m_y \end{aligned} \quad (84)$$

É importante observar, a partir dessa última equação, que os alongamentos ε_p e ε_q não influem na distorção γ .

Agora nós podemos usar as definições dos alongamentos (18), (19) e (20), e das distorções (25), (26) e (27) em (84), obtendo

$$\begin{aligned} \gamma(\vec{n}, \vec{m}) &= 2(\varepsilon_x n_x m_x + \varepsilon_y n_y m_y + \varepsilon_z n_z m_z) \\ &+ \gamma_{xy}(n_y m_x + n_x m_y) \\ &+ \gamma_{xz}(n_z m_x + n_x m_z) \\ &+ \gamma_{yz}(n_y m_z + n_z m_y) \end{aligned} \quad (85)$$

ou, na forma matricial,

$$\gamma(\vec{n}, \vec{m}) = 2 \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} \quad (86)$$

que é o mesmo que

$$\gamma(\vec{n}, \vec{m}) = 2 \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{Bmatrix} \quad (87)$$

Lembrando da definição do Tensor das Pequenas Deformações (37), podemos escrever na forma tensorial,

$$\gamma(\vec{n}, \vec{m}) = 2(E[\vec{n}] \cdot \vec{m}) = 2(E[\vec{m}] \cdot \vec{n}) \quad (88)$$

7 Vetor deformação

Definimos o vetor deformação $\vec{\delta}$ no ponto P associado à direção \vec{n} , como o vetor

$$\vec{\delta}(\vec{n}) = E[\vec{n}] \quad , \quad (89)$$

onde $[E]$ é o Tensor das Pequenas Deformações que foi definido em (37). Este vetor pode ser decomposto em duas componentes, uma que tem a direção de \vec{n} e outra que tem uma direção \vec{t} que é ortogonal a \vec{n} , conforme a Figura 8. Note que, enquanto \vec{n} é um versor dado, o versor \vec{t} é definido pela projeção de $\vec{\delta}$ no plano α que é ortogonal a \vec{n} .

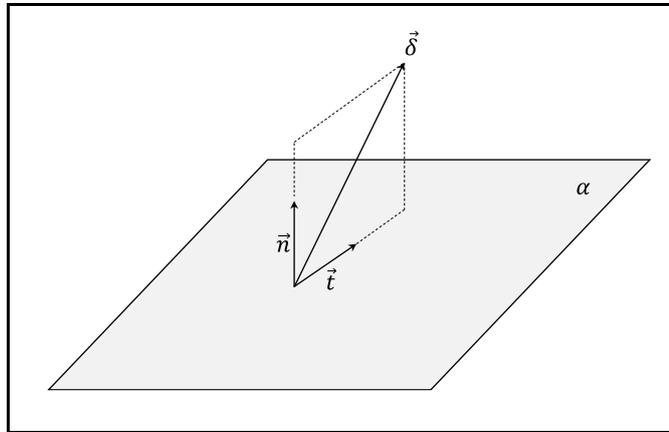


Figura 8 – Vetor deformação.

Assim, o vetor deformação pode ser colocado na forma

$$\vec{\delta}(\vec{n}) = a \vec{n} + b \vec{t} \quad , \quad (90)$$

onde a e b são constantes a determinar.

Mas, usando (89) e (52),

$$\vec{\delta}(\vec{n}) \cdot \vec{n} = E[\vec{n}] \cdot \vec{n} = \varepsilon(\vec{n}) \quad , \quad (91)$$

então,

$$a = \varepsilon(\vec{n}) \quad . \quad (92)$$

Por outro lado, usando (89) e (88),

$$\vec{\delta}(\vec{n}) \cdot \vec{t} = E[\vec{n}] \cdot \vec{t} = \frac{1}{2} \gamma(\vec{n}, \vec{t}) \quad (93)$$

e, portanto,

$$b = \frac{1}{2}\gamma(\vec{n}, \vec{t}) \quad (94)$$

Assim, substituindo (92) e (94) em (90), podemos escrever o vetor deformação $\vec{\delta}$ como

$$\vec{\delta}(\vec{n}) = \varepsilon(\vec{n}) \vec{n} + \frac{1}{2}\gamma(\vec{n}, \vec{t})\vec{t} \quad (95)$$

Todos os versores \vec{q} que são paralelos ao plano α são também ortogonais a \vec{n} . Então podemos calcular a distorção entre \vec{n} e \vec{q} . Mas, podemos provar que

$$|\gamma(\vec{n}, \vec{q})| \leq |\gamma(\vec{n}, \vec{t})| \quad (96)$$

A prova é muito simples. De (88)

$$\gamma(\vec{n}, \vec{q}) = 2E[\vec{n}] \cdot \vec{q} \quad (97)$$

então, usando (89),

$$\gamma(\vec{n}, \vec{q}) = 2\vec{\delta}(\vec{n}) \cdot \vec{q} \quad (98)$$

e, em seguida, (95),

$$\gamma(\vec{n}, \vec{q}) = 2 \left(\varepsilon(\vec{n})\vec{n} + \frac{1}{2}\gamma(\vec{n}, \vec{t})\vec{t} \right) \cdot \vec{q} \quad (99)$$

Portanto,

$$\gamma(\vec{n}, \vec{q}) = \gamma(\vec{n}, \vec{t})\vec{t} \cdot \vec{q} \quad (100)$$

Como

$$|\vec{t} \cdot \vec{q}| \leq 1 \quad (101)$$

fica provada a expressão (96).

Então, considerando todas as direções \vec{q} do plano α , a máxima distorção entre \vec{n} e \vec{q} ocorre para $\vec{q} = \vec{t}$ e é essa distorção que vai nos interessar. Para simplificar a notação, vamos definir $\bar{\gamma}$ tal que:

$$\bar{\gamma}(\vec{n}) = \gamma(\vec{n}, \vec{t}) \quad (102)$$

8 Deformações principais e direções principais de deformação

Uma direção \vec{m} é chamada de *direção principal de deformação* se for nula a distorção entre \vec{m} e qualquer direção ortogonal a ela. De (95), se \vec{m} é uma direção principal de deformação, então:

$$\vec{\delta}(\vec{m}) = \varepsilon \vec{m} \quad , \quad (103)$$

ou, de (89),

$$E[\vec{m}] - \varepsilon \vec{m} = 0 \quad , \quad (104)$$

ou, na forma matricial, lembrando de (37),

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{Bmatrix} - \varepsilon \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (105)$$

ou, ainda,

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y - \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z - \varepsilon \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (106)$$

que é um sistema de três equações a três incógnitas m_x , m_y e m_z .

O sistema linear de equações (106) obviamente tem uma solução trivial,

$$m_x = m_y = m_z = 0 \quad , \quad (107)$$

mas esta solução não tem significado físico pois, como \vec{m} é um versor, então, obrigatoriamente,

$$m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = 1 \quad . \quad (108)$$

Então o sistema (106) tem que admitir mais de uma solução. Mas, para que um sistema de equações algébricas lineares, como esse, admita mais de uma solução, é necessário que o determinante de sua matriz seja nulo, ou seja,

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y - \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z - \varepsilon \end{vmatrix} = 0 \quad (109)$$

Buscam-se então, quais são os valores de ε para que isso aconteça.

O determinante (109) pode ser expandido algebricamente, resultando na equação polinomial de terceiro grau, conhecida como equação característica,

$$\varepsilon^3 - K_1\varepsilon^2 + K_2\varepsilon - K_3 = 0 \quad , \quad (110)$$

onde

$$K_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad , \quad (111)$$

$$K_2 = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \varepsilon_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix} \quad (112)$$

e

$$K_3 = |E| \quad . \quad (113)$$

Como a matriz $[E]$ é simétrica, prova-se, na Álgebra Linear, que a equação característica (110) admite sempre três raízes reais ε_1 , ε_2 e ε_3 . Essas raízes não são necessariamente distintas e podem ser negativas, nulas ou positivas. Elas são os *alongamentos principais*, que correspondem aos alongamentos que ocorrem nas direções principais e que são apenas três.

Convenciona-se a seguinte ordem para os alongamentos principais:

$$\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3 \quad (114)$$

e esta convenção não é opcional, é obrigatória, deve ser sempre seguida porque é universal. Assim ε_1 será sempre o maior dos alongamentos principais em valor algébrico e ε_3 será sempre o menor deles.

Falta, agora, calcular as direções principais, que serão três, cada uma delas correspondente a um dos alongamentos principais. Vamos batizar as direções principais de \vec{m}_1 , \vec{m}_2 e \vec{m}_3 , correspondendo, na ordem, a ε_1 , ε_2 e ε_3 .

Vamos determinar \vec{m}_1 . Sejam \bar{m}_x , \bar{m}_y e \bar{m}_z as suas componentes, isto é,

$$\vec{m}_1 = \begin{Bmatrix} \bar{m}_x \\ \bar{m}_y \\ \bar{m}_z \end{Bmatrix} \quad (115)$$

Para calculá-las temos que substituir ε por ε_1 e \vec{m} por \vec{m}_1 na expressão (106) :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_1 & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y - \varepsilon_1 & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z - \varepsilon_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{m}_x \\ \bar{m}_y \\ \bar{m}_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (116)$$

e resolver esse sistema. Mas note que o determinante da matriz é nulo, porque nós mesmo impusemos. Então o sistema é indeterminado. Para resolvê-lo temos que considerar apenas duas das equações, que sejam independentes, e adicionar uma terceira, que é a condição que impõe módulo unitário ao versor \vec{m}_1 :

$$\bar{m}_x^2 + \bar{m}_y^2 + \bar{m}_z^2 = 1 \quad , \quad (117)$$

e completa o sistema de três equações.

As direções principais \vec{m}_2 e \vec{m}_3 são determinadas de forma análoga.

Se você se lembrar da Álgebra Linear, você deve ter percebido que acabamos de resolver um problema de autovalores e autovetores: os alongamentos principais são os autovalores da matriz $[E]$ e as direções principais são os seus autovetores e, como $[E]$ é simétrica, os seus autovetores são ortogonais entre si, ou seja,

$$\vec{m}_1 \perp \vec{m}_2 \perp \vec{m}_3 \quad . \quad (118)$$

Esta propriedade pode ser usada no cálculo das direções principais. Por exemplo, se \vec{m}_1 e \vec{m}_2 forem conhecidas, podemos calcular \vec{m}_3 pelo produto vetorial:

$$\vec{m}_3 = \vec{m}_1 \wedge \vec{m}_2 \quad . \quad (119)$$

Note, também, que definimos direções principais e não sentidos principais. Então se \vec{m}_1 representa uma direção principal, então $-\vec{m}_1$ representa a mesma direção principal, ou seja, a ordem dos fatores no produto vetorial (119) não importa.

Uma outra propriedade importante, que pode ser demonstrada com o uso de alguma álgebra é que os coeficientes K_1 , K_2 e K_3 da equação característica (110) são invariantes em relação ao sistema de eixos cartesianos que foi usado. Ou seja, se usarmos outro sistema cartesiano, as componentes de deformação e, conseqüentemente, a matriz $[E]$ podem ser diferentes, mas, a equação característica será a mesma, os alongamentos principais serão os mesmos e as direções principais também serão as mesmas.

Em virtude do que foi apresentado neste item, podemos notar a analogia entre as tensões principais e os alongamentos principais e entre as direções principais de tensão e as direções principais de deformação. Pode-se mostrar que, se o material for de comportamento *elástico linear, homogêneo e isotrópico*, as direções principais de tensão coincidem com as direções principais de deformação.

9 Círculos de Mohr

Vimos que o lugar geométrico dos pares (σ, τ) é formado pelos Círculos de Mohr e mostramos como eles são construídos. Mas, se revisarmos esse processo de construção, podemos verificar que ele é válido para qualquer tensor simétrico. Então, não precisamos repetir todo o processo, podemos fazer diretamente uma analogia. E essa analogia pode ser feita comparando a expressão do vetor deformação (95) com a expressão equivalente do vetor tensão $\vec{\rho}$ apresentada no estudo das tensões. Assim, basta pegar o Círculo de Mohr das tensões, trocar σ por ε e trocar τ por $\frac{1}{2}\bar{\gamma}$, para obter os Círculos de Mohr das deformações apresentados na Figura 9.

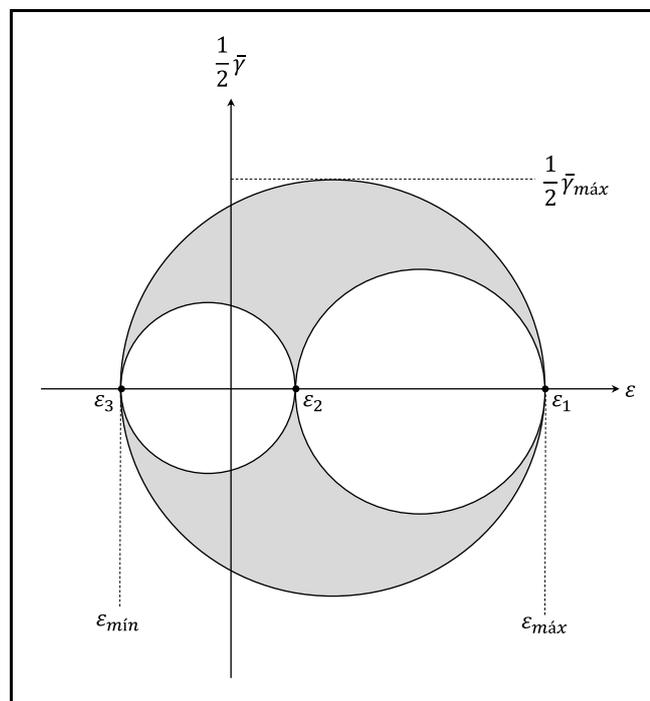


Figura 9 - Círculos de Mohr para deformação.

Nessa figura, a região cinza corresponde aos pares $(\varepsilon, \frac{1}{2}\bar{\gamma})$ possíveis em um determinado ponto P da estrutura. Cada ponto dessa região corresponde a uma certa direção \vec{m} . Note que os sinais dos alongamentos principais nela desenhados são totalmente arbitrários. Todos os alongamentos principais podem ser negativos, nulos ou positivos.

Os Círculos de Mohr permitem calcular os valores limite dos alongamentos e das distorções. Podemos concluir, diretamente da Figura 9 que o maior valor do alongamento é ε_1 e que o menor valor do alongamento é ε_3 . O valor máximo da distorção corresponde ao diâmetro da circunferência mais externa, ou seja,

$$\gamma_{m\acute{a}x} = \varepsilon_1 - \varepsilon_3 \quad . \quad (120)$$

Esta distorção máxima ocorrerá entre as direções $\vec{\xi}$ e $\vec{\eta}$ dadas por

$$\vec{\xi} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{m}_1 + \vec{m}_3) \quad 9 \quad (121)$$

e

$$\vec{\eta} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{m}_1 - \vec{m}_3) \quad . \quad (122)$$

10 Lei de Hooke

O estudo das tensões foi baseado apenas nas *equações de equilíbrio* e o estudo das deformações foi baseado apenas em *relações geométricas*. O que relaciona tensões com deformações são as equações que regem o *comportamento do material* do sólido. Estas equações são chamadas de *equações constitutivas*.

Neste curso, vamos considerar que o material tem comportamento *homogêneo*, *isotrópico* e *elástico linear*. Um material é homogêneo quando não possui vazios, quando suas propriedades são distribuídas igualmente pelo seu volume. Um material tem comportamento isotrópico quando as suas propriedades não dependem da direção considerada. Um material é elástico, quando não existem deformações permanentes quando cessa a aplicação dos esforços. Por último, um material tem comportamento linear quando a relação entre tensão e deformação é linear. Para um material elástico linear vale a *Lei de Hooke Generalizada*, ou, simplesmente, *Lei de Hooke*.

Vamos supor um elemento cúbico submetido a um estado uniaxial de tensão conforme indicado na Figura 10. Com a aplicação da tensão σ_x , o elemento sofrerá um alongamento ε_x .

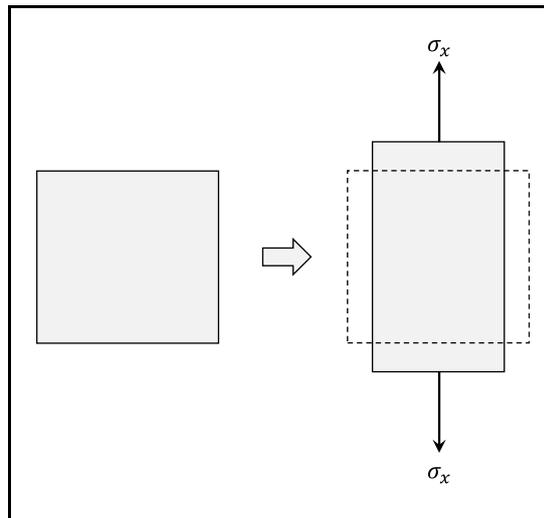


Figura 10 – Elemento cúbico submetido a um estado uniaxial de tensão.

A lei de Hooke diz que

$$\sigma_x = E \varepsilon_x \quad , \quad (123)$$

ou

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \sigma_x \quad (124)$$

onde a constante E é uma propriedade do material, conhecida como *Módulo de Elasticidade* ou *Módulo de Young*.

Ao mesmo tempo que o elemento cúbico sofreu um alongamento na direção x , ele sofreu um encurtamento nas direções y e z . A Lei de Hooke postula que:

$$\varepsilon_y = -\frac{\nu}{E} \sigma_x \quad (125)$$

e

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} \sigma_x \quad (126)$$

onde a constante ν é outra propriedade do material, conhecida como *Coefficiente de Poisson*.

Note o sinal negativo nessas duas últimas expressões. Ele indica que, se o elemento se alonga na direção x devido à tensão σ_x , ele vai encurtar nas direções y e z devido à mesma tensão.

Se o elemento estiver submetido simultaneamente a tensões σ_x , σ_y e σ_z , como o comportamento é linear, podemos somar os efeitos. Assim,

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \sigma_x - \frac{\nu}{E} \sigma_y - \frac{\nu}{E} \sigma_z \quad (127)$$

ou, de outra forma,

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (128)$$

Da mesma maneira,

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad (129)$$

e

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad (130)$$

Combinando as expressões (128), (129) e (130), podemos escrever as expressões que fornecem as componentes de tensão em função dos alongamentos:

$$\sigma_x = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} [(1 - \nu)\varepsilon_x + \nu(\varepsilon_y + \varepsilon_z)] \quad (131)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} [(1 - \nu)\varepsilon_y + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_z)] \quad (132)$$

e

$$\sigma_z = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} [(1 - \nu)\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y)] \quad (133)$$

Vamos considerar, agora, que ao elemento cúbico seja aplicada uma tensão de cisalhamento τ_{xy} , conforme a Figura 11. Um estado de tensão onde só há tensões de cisalhamento é conhecido como *estado de cisalhamento puro*.

Com a aplicação da tensão de cisalhamento, o elemento cúbico sofre uma distorção γ_{xy} . A Lei de Hooke postula, nesse caso, que

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad (134)$$

onde a constante G é uma propriedade do material, conhecida como *Módulo de Elasticidade ao Cisalhamento* ou, simplesmente, *Módulo de Cisalhamento*.

Analogamente, se for aplicada uma tensão de cisalhamento τ_{xz} , o elemento sofrerá uma distorção dada por

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz} \quad (135)$$

e se for aplicada uma tensão de cisalhamento τ_{yz} o elemento sofrerá uma distorção γ_{yz} tal que

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz} \quad (136)$$

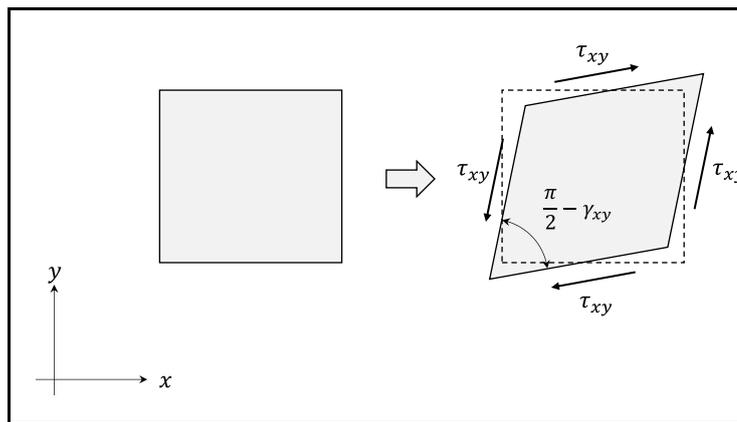


Figura 11 – Elemento cúbico submetido a cisalhamento puro.

Para representar o comportamento do material apareceram aqui três constantes, a saber, E , ν e G . Mas existe uma relação entre elas, de forma que apenas duas são valores independentes. Vamos mostrar isto no próximo item.

11 Relação entre o Módulo de Elasticidade e o Módulo de Cisalhamento

No estudo da Lei de Hooke apareceram três constantes para representar o comportamento do material, a saber, o Módulo de Elasticidade E , o Coeficiente de Poisson ν e o Módulo de Cisalhamento G . Essas constantes, no entanto, não são independentes, existe uma relação entre elas. Neste item vamos determinar qual é essa relação.

Consideremos que um ponto P de um sólido esteja submetido ao estado de cisalhamento puro esquematizado na Figura 11. Nessa situação o Tensor das Tensões é

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (137)$$

Supondo que τ_{xy} seja positiva, então as tensões principais, obtidas resolvendo o problema de autovalor, são

$$\sigma_1 = \tau_{xy} \quad , \quad (138)$$

$$\sigma_2 = 0 \quad (139)$$

e

$$\sigma_3 = -\tau_{xy} \quad . \quad (140)$$

Consideremos, agora, um sistema cartesiano $x'y'z'$ coincidente com as direções principais de tensão. Nesse sistema, o Tensor das Tensões é

$$[T] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (141)$$

Para esse sistema de eixos, usando a Lei de Hooke, equações (128), (129) e (130), podemos escrever

$$\varepsilon_{x'} = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{1 + \nu}{E} \tau_{xy} \quad (142)$$

$$\varepsilon_{y'} = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)] = 0 \quad (143)$$

e

$$\varepsilon_{z'} = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)] = -\frac{1 + \nu}{E} \tau_{xy} \quad (144)$$

Note que, a partir de, (141) e da Lei de Hooke, equações (134), (135) e (136),

$$\tau_{x'y'} = \tau_{x'z'} = \tau_{y'z'} = 0 \quad (145)$$

e, portanto, as direções principais de tensão também são direções principais de deformação. Assim, os alongamentos principais são

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{x'} = \frac{1 + \nu}{E} \tau_{xy} \quad (146)$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_{y'} = 0 \quad (147)$$

e

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_{z'} = -\frac{1 + \nu}{E} \tau_{xy} \quad (148)$$

Os alongamentos principais também podem ser calculados a partir do Tensor das Pequenas Deformações. Para o mesmo caso da Figura 11, o Tensor das Pequenas Deformações é

$$[E] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (149)$$

e, portanto, resolvendo o problema de autovalor, obtemos as deformações principais

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\gamma_{xy} \quad (150)$$

$$\varepsilon_2 = 0 \quad (151)$$

e

$$\varepsilon_3 = -\frac{1}{2}\gamma_{xy} \quad (152)$$

ou, usando a Lei de Hooke, equações (134), (135) e (136),

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2} \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (153)$$

$$\varepsilon_2 = 0 \quad (154)$$

e

$$\varepsilon_3 = -\frac{1}{2} \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (155)$$

Comparando (153) com (146) ou (155) com (148), podemos concluir que

$$\frac{1 + \nu}{E} \tau_{xy} = \frac{1}{2} \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (156)$$

e, portanto,

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (157)$$

que dá a relação entre Módulo de Cisalhamento, Módulo de Elasticidade e Coeficiente de Poisson. Por esta relação basta ter o valor de duas das constantes para calcular o valor da terceira.

12 Dilatação volumétrica

Vamos supor que um elemento cúbico sofreu alongamentos simultâneos nas direções x , y e z , conforme a Figura 12. O volume inicial do elemento era

$$V_0 = dxdydz \quad . \quad (158)$$

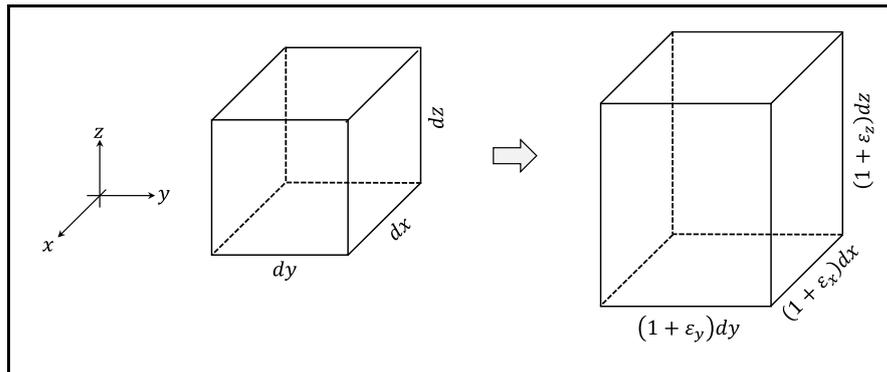


Figura 12 – Elemento cúbico sofrendo deformação volumétrica.

Após a deformação, o volume do elemento passou a ser

$$V = (1 + \varepsilon_x)dx(1 + \varepsilon_y)dy(1 + \varepsilon_z)dz \quad . \quad (159)$$

Então a variação do volume foi:

$$\delta V = V - V_0 = (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z)dxdydz - dxdydz \quad . \quad (160)$$

Considerando que as deformações são pequenas e desprezando os termos quadráticos nas deformações, a variação do volume fica igual a

$$\delta V = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)dxdydz \quad . \quad (161)$$

A deformação por unidade de volume ou deformação volumétrica foi

$$e = \frac{\delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad . \quad (162)$$

Usando a Lei de Hooke, dada pelas expressões (128), (129) e (130), a variação volumétrica pode ser escrita em termos das tensões normais aplicadas,

$$e = \frac{1 - 2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad . \quad (163)$$

Note que, se o Coeficiente de Poisson ν for igual a 0,5, não haverá variação de volume, quaisquer que sejam as tensões aplicadas. Um material deste tipo é dito *material incompressível*. A borracha é um exemplo de um material praticamente incompressível.

13 Extensômetro

Para medir o alongamento em uma determinada direção da superfície de um corpo, usamos o *extensômetro* (Figura 13). De uma maneira simplificada, o extensômetro é um dispositivo cuja resistência elétrica varia com o alongamento. Existem diversos tipos de extensômetros no mercado, que devem ser escolhidos em função da aplicação de destino, levando em conta a precisão necessária, a temperatura de aplicação e a faixa de alongamentos a ser medida. Em função da aplicação, o custo do extensômetro pode variar muito. A Figura 14 mostra um exemplo de aplicação prática de extensômetros para medir alongamentos nos tendões da armadura de tração de um tubo flexível usado na produção *offshore* de petróleo.

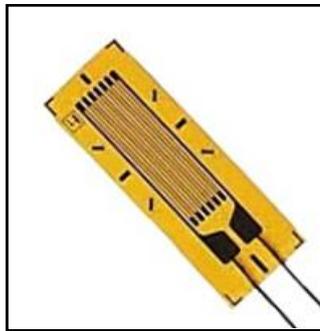


Figura 13 – Extensômetro.



Figura 14 – Exemplo de aplicação de extensômetros.

O extensômetro é colado à superfície do corpo de prova com uma cola forte e rígida, de maneira que o alongamento sofrido pelo extensômetro seja o mesmo sofrido pelo corpo de prova na direção em que o extensômetro é colado. Para medir o alongamento, uma diferença de potencial elétrico é introduzida nos terminais do extensômetro e é medida a corrente elétrica induzida. A partir de uma curva de calibração do extensômetro é calculado o alongamento. Esses passos para nós serão

transparentes, vamos enxergar o extensômetro como algo que mede diretamente o alongamento numa dada direção.

Para determinar o estado completo de deformação na superfície de um corpo de prova, podemos usar uma *roseta*, que é uma associação de três extensômetros não alinhados, formando ângulos pré-determinados, conforme esquematizado na Figura 15.

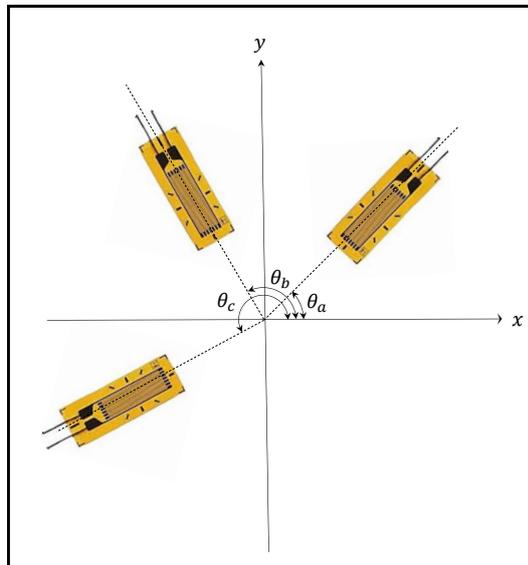


Figura 15 – Esquema de uma roseta.

Podem ser compradas no mercado rosetas com os extensômetros já integrados, o que diminui o tamanho e aumenta a precisão de colagem. A Figura 16 apresenta um exemplo de aplicação de rosetas comerciais no estudo das deformações nos tubos metálicos de um cabo umbilical utilizado na exploração *offshore* de petróleo.



Figura 16 – Exemplo de aplicação de rosetas.

Vamos ver, agora, como utilizamos uma roseta para montar o Tensor das Pequenas Deformações em um ponto da superfície de um corpo de prova. Como um

extensômetro está colado na superfície do corpo, podemos obter apenas uma parte do tensor. Supondo que a superfície esteja no plano xy , poderemos montar o tensor reduzido ao plano:

$$[E] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{bmatrix} \quad (164)$$

Se o extensômetro estiver colado segundo um ângulo θ em relação ao eixo x conforme a Figura 17, a sua direção é dada pelo versor

$$\vec{n} = \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix} \quad (165)$$

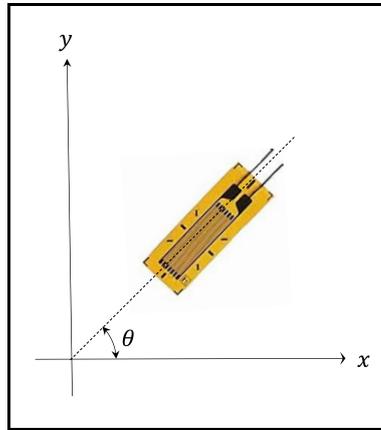


Figura 17 – Extensômetro colado a um ângulo θ .

O alongamento na direção \vec{n} , que será medido pelo extensômetro pode ser calculado usando (52). Dessa forma,

$$\varepsilon = \varepsilon_x \cos^2 \theta + \varepsilon_y \sin^2 \theta + \gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad (166)$$

Podemos aplicar essa expressão aos três extensômetros da roseta da Figura 15. Se ε_a , ε_b e ε_c forem as leituras, respectivamente, dos extensômetros colados com ângulos θ_a , θ_b e θ_c podemos montar o sistema de três equações algébricas a três incógnitas:

$$\begin{cases} \varepsilon_a = \varepsilon_x \cos^2 \theta_a + \varepsilon_y \sin^2 \theta_a + \gamma_{xy} \sin \theta_a \cos \theta_a \\ \varepsilon_b = \varepsilon_x \cos^2 \theta_b + \varepsilon_y \sin^2 \theta_b + \gamma_{xy} \sin \theta_b \cos \theta_b \\ \varepsilon_c = \varepsilon_x \cos^2 \theta_c + \varepsilon_y \sin^2 \theta_c + \gamma_{xy} \sin \theta_c \cos \theta_c \end{cases} \quad (167)$$

Dadas as leituras ε_a , ε_b e ε_c , o sistema (167) permite calcular ε_x , ε_y e γ_{xy} . Se os extensômetros não estiverem alinhados, ou seja, $\theta_a \neq \theta_b \neq \theta_c$, o sistema terá uma solução única. Em geral os extensômetros estão posicionados na roseta em ângulos defasados de 45° ou 60° . Vamos ver como fica a solução do sistema para esses dois casos.

Caso 1: Roseta a 45°

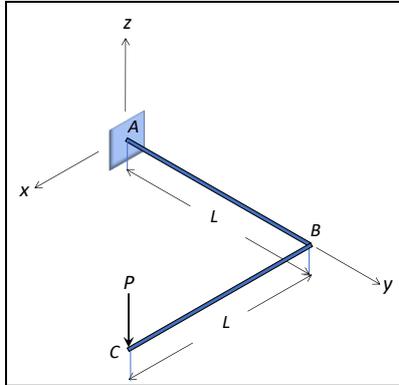
$\theta_a = 0^\circ$	$\varepsilon_x = \varepsilon_a$
$\theta_b = 45^\circ$	$\varepsilon_y = \varepsilon_c$
$\theta_c = 90^\circ$	$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_b - (\varepsilon_a + \varepsilon_c)$

Caso 2: Roseta a 60°

$\theta_a = 0^\circ$	$\varepsilon_x = \varepsilon_a$
$\theta_b = 60^\circ$	$\varepsilon_y = \frac{1}{3}(2\varepsilon_b + 2\varepsilon_c - \varepsilon_a)$
$\theta_c = 120^\circ$	$\gamma_{xy} = \frac{2\sqrt{3}}{3}(\varepsilon_b - \varepsilon_c)$

14 Exercícios Resolvidos

Exercício 1:

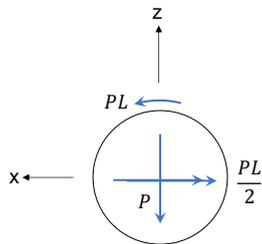


A viga ABC da figura está contida em um plano horizontal. Ela é formada por um arame com seção circular de raio R , dobrado em ângulo de 90° , e está engastada no ponto A. A viga está submetida apenas à força vertical P aplicada ao ponto C. Pede-se determinar a matriz $[E]$ que representa o tensor das pequenas deformações no ponto de coordenadas $(0, L/2, R)$ orientada pelo sistema de eixos indicado.

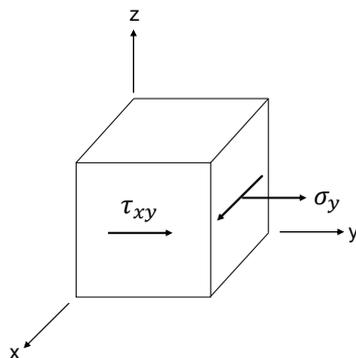
São dados o módulo de elasticidade E , o módulo de cisalhamento G e o coeficiente de Poisson ν .

Resolução:

Os esforços que solicitam a seção transversal que contém o ponto de coordenadas $(0, L/2, R)$ são:



Assim, o estado de tensões no ponto de coordenadas $(0, L/2, R)$ pode ser representado pelo elemento orientado:



onde:

$$\sigma_y = \frac{M}{I} R = \frac{2PL}{\pi R^3}$$

e

$$\tau_{xy} = \frac{T}{I_p} R = \frac{2PL}{\pi R^3}$$

Da Lei de Hooke:

$$\varepsilon_x = -\frac{\nu}{E} \sigma_y = -\frac{\nu 2PL}{E \pi R^3}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \sigma_y = \frac{1 2PL}{E \pi R^3}$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} \sigma_y = -\frac{\nu 2PL}{E \pi R^3}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{1 2PL}{G \pi R^3}$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

Assim, a matriz [E] que representa o tensor das pequenas deformações é:

$$[E] = \begin{bmatrix} -\frac{2\nu}{E} & \frac{1}{G} & 0 \\ \frac{1}{G} & \frac{2}{E} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2\nu}{E} \end{bmatrix} \frac{PL}{\pi R^3}$$

Exercício 2:

Em um determinado ponto de uma peça em estado plano de tensão, são conhecidos os alongamentos $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 195\mu$ e a distorção $\gamma_{xy} = 200\mu$. São dados o módulo de elasticidade $E=200$ GPa, o módulo de cisalhamento $G=75$ GPa e o coeficiente de Poisson $\nu = 0,40$ do material. É dada, também, a tensão de escoamento do material $\sigma_e = 280$ MPa. Pedem-se, para este ponto:

- a) a matriz que representa o tensor das tensões;
- b) as tensões principais;
- c) o fator de segurança em relação ao escoamento, usando o critério de Tresca;
- d) o fator de segurança em relação ao escoamento, usando o critério de Von Mises.

Resolução:

a) Estado plano de tensão $\Rightarrow \sigma_z = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \end{cases}$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y \Rightarrow \sigma_x = \sigma_y = \frac{E\varepsilon_x}{1-\nu} = 65\text{MPa}$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \Rightarrow \tau_{xy} = 15\text{MPa}$$

$$\Rightarrow [T] = \begin{bmatrix} 65 & 15 & 0 \\ 15 & 65 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{vmatrix} 65-\lambda & 15 & 0 \\ 15 & 65-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 80\text{MPa} \\ \sigma_2 = 50\text{MPa} \\ \sigma_3 = 0\text{MPa} \end{cases}$$

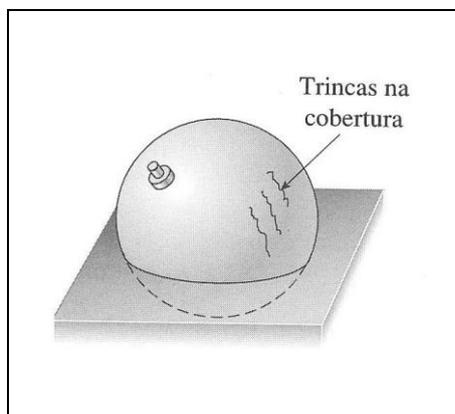
c)

$$FS = \frac{\sigma_e}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{280}{80} \Rightarrow FS = 3,5$$

$$\sigma_{eq} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} = 70\text{MPa}$$

$$FS = \frac{\sigma_e}{\sigma_{eq}} = \frac{280}{70} \Rightarrow FS = 4$$

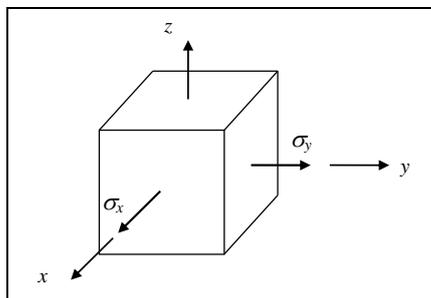
Exercício 3:



Um vaso de pressão esférico de metal, com 800 mm de diâmetro e 10 mm de espessura, é coberto com um verniz frágil, que trinca quando a deformação excede 300×10^{-6} , conforme a figura. Sabendo que o metal de que o vaso é formado tem módulo de elasticidade 200 GPa e coeficiente de Poisson 0,25, determinar a máxima pressão admissível para o verniz não trincar, adotando um fator de segurança 2.

Resolução:

O estado de tensão devido à pressão interna num ponto sobre a superfície externa do vaso esférico será:



onde as tensões normais σ_x , σ_y e $\sigma_z = 0$ são as tensões principais no ponto (pois não há tensões de cisalhamento nos planos diametrais) e, pela simetria, temos: $\sigma_x = \sigma_y$.

Impondo equilíbrio de forças num plano diametral obtém-se:

$$\sigma_x = \sigma_y \cong \frac{p \cdot \pi R^2}{2\pi R t} = \frac{pR}{2t}$$

O alongamento de uma fibra qualquer numa direção tangente à superfície do vaso esférico será então:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z] = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu\sigma_y] = \frac{(1 - \nu)}{E} \cdot \frac{pR}{2t}$$

O fator de segurança (em relação a falha por deformação excessiva do verniz) será:

$$FS = \frac{\varepsilon_{cr}}{\varepsilon_x}$$

onde $\varepsilon_{cr} = 300 \times 10^{-6}$ é o alongamento. Assim:

$$\frac{(1 - \nu)}{E} \cdot \frac{p_{máx} R}{2t} = \frac{\varepsilon_{cr}}{FS} \Leftrightarrow p_{máx} = \frac{2 \cdot E \cdot \varepsilon_{cr} \cdot t}{FS \cdot (1 - \nu) \cdot R}$$

Substituindo os valores dados:

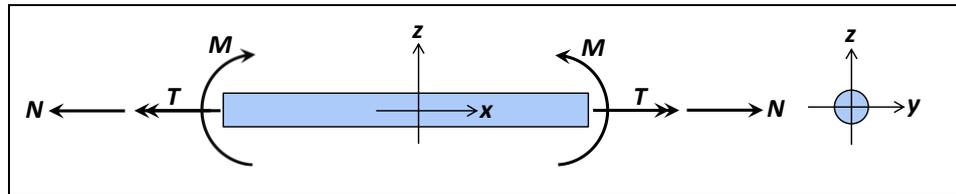
$$p_{máx} = 2 \times 10^6 \text{ Pa} = 2 \text{ MPa}$$

Exercício 4:

O eixo da figura tem raio R e está submetido, simultaneamente, a um momento fletor M , um momento de torção T e a uma força de tração N de valores desconhecidos. Para obter esses valores serão colocados extensômetros no plano $x=0$. Pedem-se:

- a) o número mínimo de extensômetros necessários para obter os valores dos três esforços aplicados;

- b) as posições para possível colocação desses extensômetros (coordenadas e inclinação);
- c) a justificativa da escolha das posições.



Resolução:

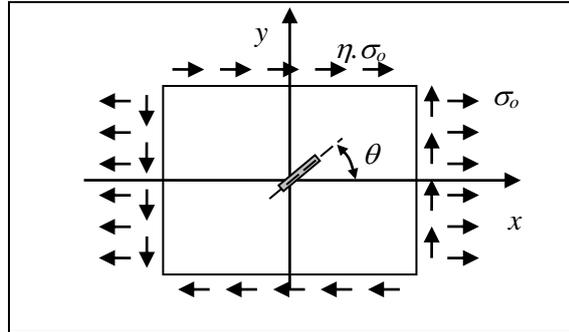
- a) 3 (são três incógnitas a determinar, portanto serão necessárias três equações independentes, ou seja, três extensômetros não alinhados)
- b) São várias as possibilidades, desde que obedçam ao exposto no item (a). Por exemplo:
- $(0,0,R)$ na direção x ;
- $(0,0,R)$ a 45° com a direção de x ;
- $(0,-R,0)$ na direção x .
- c) Tanto o momento fletor quanto a força normal produzem deformação na direção de x . Para poder separar o efeito do momento fletor do efeito da força normal, devem ser colocados extensômetros em pontos diferentes. Um extensômetro colocado na linha neutra, na direção de x , por exemplo, permite o cálculo direto da força normal. Conhecido o valor da força normal o outro extensômetro colocado na direção de x permite o cálculo do momento fletor. O extensômetro colocado em direção inclinada em relação a x permite o cálculo da tensão de cisalhamento e, conseqüentemente, do momento de torção, que é o único esforço que a provoca.

Exercício 5:

A chapa indicada na figura encontra-se sob um estado plano e uniforme de tensões (sendo $\sigma_x = \sigma_o > 0$ e $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \eta \sigma_o$, sendo η um adimensional qualquer). No centro da chapa, um extensômetro é colado (antes da aplicação dos esforços) de modo a formar um ângulo θ com o eixo horizontal Ox (ver figura). Considerando que as hipóteses de homogeneidade, de elasticidade linear e de isotropia do material da chapa sejam válidas (constantes elásticas do material E e ν dadas), pede-se:

- a) obter o tensor das deformações completo para um ponto da chapa;
- b) obter o alongamento medido pelo extensômetro em função de θ ;
- c) obter a fórmula que permite obter os valores de θ para os quais o alongamento medido pelo extensômetro tenha um valor máximo ou mínimo;

- d) Para o caso particular em que $\eta = 1/2$ e $\nu = 0,2$, determine numericamente o valor dos ângulos calculados no item anterior. Responda: Neste caso, para qual valor do ângulo teremos o maior alongamento medido em valor absoluto?



Resolução:

- a) Como o estado de tensões é uniforme, o estado de deformações também será uniforme. E, da lei de Hooke, temos:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z] = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{\sigma_0}{E}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu\sigma_x - \nu\sigma_z] = -\frac{\nu}{E} \sigma_x = -\frac{\nu}{E} \sigma_0$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu\sigma_x - \nu\sigma_y] = -\frac{\nu}{E} \sigma_x = -\frac{\nu}{E} \sigma_0$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \cdot \eta\sigma_0$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} = 0$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} = 0$$

Assim, o Tensor das Deformações para qualquer ponto da chapa fica dado por:

$$[E] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \frac{\sigma_0}{E} \begin{bmatrix} 1 & (1+\nu)\eta & 0 \\ (1+\nu)\eta & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \end{bmatrix}$$

- b) O alongamento medido pelo extensômetro será: $\varepsilon = E[\vec{n}] \cdot \vec{n}$

onde: $\vec{n} = \{\cos \theta, \sin \theta, 0\}^t$. Assim:

$$E[\vec{n}] = \frac{\sigma_o}{E} \cdot \begin{bmatrix} 1 & (1+\nu)\eta & 0 \\ (1+\nu)\eta & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow E[\vec{n}] = \frac{\sigma_o}{E} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta + (1+\nu)\eta \sin\theta \\ (1+\nu)\eta \cos\theta - \nu \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

resultando, após calcularmos o produto escalar:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_o}{E} [\cos^2\theta - \nu \sin^2\theta + (1+\nu)\eta \sin(2\theta)]$$

c) Derivando o alongamento em função do parâmetro θ , teremos:

$$\frac{d\varepsilon}{d\theta} = \frac{\sigma_o(1+\nu)}{E} [-\sin(2\theta) + 2\eta \cos(2\theta)]$$

Os ângulos desejados são obtidos a partir da condição:

$$\frac{d\varepsilon}{d\theta} = 0$$

Assim, virá:

$$\tan(2\theta) = 2\eta \Leftrightarrow \theta = \frac{1}{2} \arctan(2\eta)$$

d) Para o caso em que $\eta = 1/2$ teremos:

$$2\theta = \arctan(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\theta = \pi/4 \\ 2\theta = 5\pi/4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta = \pi/8 \\ \theta = 5\pi/8 \end{cases}$$

Substituindo os valores de θ na expressão do alongamento e lembrando que:

$$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$$

e

$$\sin^2\theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$$

virá:

$$\theta = \pi/8 \Rightarrow \begin{cases} \cos^2\theta = \frac{1 + \cos(\pi/4)}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \\ \sin^2\theta = \frac{1 - \cos(\pi/4)}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \\ \sin(2\theta) = \sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

e

$$\varepsilon_I = \frac{(3 + 5\sqrt{2}) \cdot \sigma_o}{8} \cdot \frac{\sigma_o}{E} > 0$$

$$\theta = 5\pi/8 \Rightarrow \begin{cases} \cos^2\theta = \frac{1 + \cos(5\pi/4)}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \\ \sin^2\theta = \frac{1 - \cos(5\pi/4)}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \\ \sin(2\theta) = \sin(5\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

e

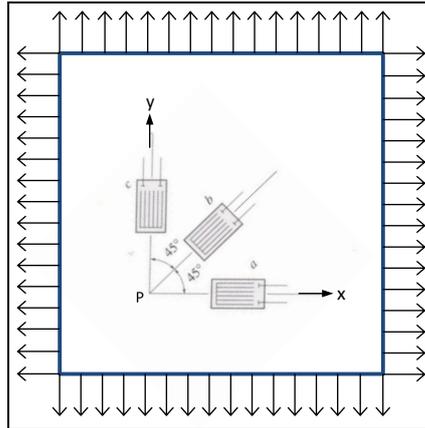
$$\varepsilon_{II} = \frac{(3 - 5\sqrt{2}) \cdot \sigma_o}{8} \cdot \frac{\sigma_o}{E} < 0$$

Do exposto: $|\varepsilon_I| > |\varepsilon_{II}|$. Logo, $\theta = \pi/8$ é o ângulo associado ao maior alongamento possível medido pelo extensômetro.

Exercício 6:

A placa quadrada da figura tem lado $a = 200\text{mm}$ e espessura $t = 10\text{mm}$. Sobre ela foi colada uma roseta com extensômetros a 45° . Esta placa foi, então, submetida a um estado biaxial de tensão, com $\sigma_x = 40\text{MPa}$ e $\sigma_y = 20\text{MPa}$, conforme a figura. Com a aplicação desse carregamento, as leituras obtidas dos extensômetros a e c foram, respectivamente, $\varepsilon_a = 300\mu$ e $\varepsilon_c = 0$. *Pede-se:*

- a) determinar o módulo de elasticidade E e o coeficiente de Poisson ν do material da placa;
- b) obter as deformações principais;
- c) calcular a máxima distorção;
- d) desenhar os círculos de Mohr das deformações;
- e) calcular a variação que houve na espessura da placa com a aplicação do carregamento;
- f) calcular a variação que houve no volume da placa com a aplicação do carregamento;
- g) calcular qual é a leitura ε_b obtida do extensômetro b.



Resolução:

a) da Lei de Hooke, como $\sigma_z = 0$:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu\sigma_y)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu\sigma_x)$$

como $\varepsilon_x = \varepsilon_a$ e $\varepsilon_y = \varepsilon_c$, então:

$$E = 100GPa$$

$$\nu = 0,5$$

b) como o material é elástico linear e isotrópico, as direções principais de deformação coincidem com as direções principais de tensão. As deformações principais serão, então, ε_x , ε_y e ε_z . Da Lei de Hooke:

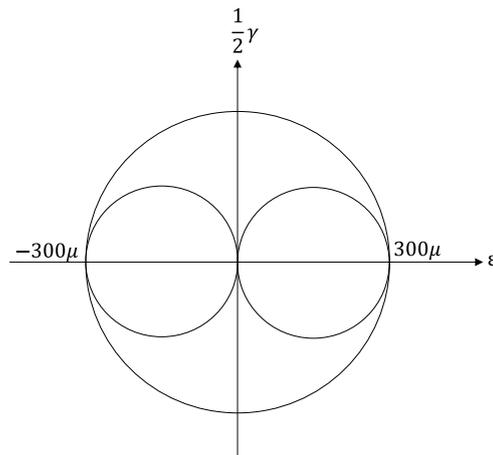
$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) = -300\mu$$

Assim

$$\varepsilon_1 = 300\mu, \varepsilon_2 = 0, \varepsilon_3 = -300\mu$$

c) $\gamma_{max} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \Rightarrow \gamma_{max} = 600\mu$

d)



e) $\Delta t = \varepsilon_z t \Rightarrow \Delta t = -0,003 \text{ mm}$

f) como o material é incompressível ($\nu = 0,5$) $\Rightarrow \Delta V = 0$

g) $\gamma_{xy} = 2\varepsilon_b - (\varepsilon_a + \varepsilon_c)$, mas $\gamma_{xy} = 0$. Então: $\varepsilon_b = 150\mu$

Exercício 7:

Foram medidos os alongamentos e distorções em um ponto da superfície externa de uma estrutura, segundo eixos cartesianos (x, y, z) . Foram encontrados os seguintes valores:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = 1 \times 10^{-3}, \varepsilon_z = -1 \times 10^{-3}, \gamma_{xy} = 4 \times 10^{-3}, \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0,$$

Sabe-se, também, que a tensão de cisalhamento no plano (x,y) é $\tau_{xy} = 300\text{MPa}$. O módulo de elasticidade do material é $E = 200\text{GPa}$. Pede-se:

a) Determinar o coeficiente de Poisson ν ;

b) Calcular as tensões $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$. O estado de tensões é plano ou triplo? Justifique.

Resolução:

a) como

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1 + \nu)}\gamma_{xy}$$

tem-se:

$$\nu = \frac{E}{2\tau_{xy}}\gamma_{xy} - 1 = \frac{200 \times 10^3}{2 \times 300} \times 4 \times 10^{-3} - 1 \Rightarrow \nu = \frac{1}{3}$$

b) pela Lei de Hooke:

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_x + \nu(\varepsilon_y + \varepsilon_z)]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_y + \nu(\varepsilon_z + \varepsilon_x)]$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y)]$$

Assim, com $\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\varepsilon_z = \varepsilon$:

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon] \\ \sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon] \\ \sigma_z = -\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-3\nu)\varepsilon] \end{cases}$$

$$\nu = \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = \sigma_y = \frac{3}{2} E \varepsilon \\ \sigma_z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = \sigma_y = 300 \text{MPa} \\ \sigma_z = 0 \end{cases}$$

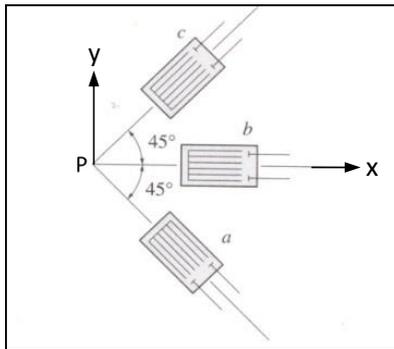
Também,

$$\begin{cases} \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} = \tau_{yx} \\ \tau_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{yz} = \tau_{zy} \\ \tau_{zx} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{zx} = \tau_{xz} \end{cases}$$

Como $\gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$, então, $\tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$

O estado de tensões é plano (no plano xy), pois $\sigma_z = 0$ e $\tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$.

Exercício 8:



A roseta da figura está colada a um ponto P da superfície de um corpo submetido a um certo carregamento. As leituras dos seus extensômetros são $\varepsilon_a = 150\mu$, $\varepsilon_b = 100\mu$ e $\varepsilon_c = 150\mu$. Sabendo que o corpo é feito de um material dúctil, pede-se determinar qual é o fator de segurança no ponto em que está colada a roseta, para o carregamento aplicado.

São dados, para o material do corpo:

- módulo de elasticidade: $E = 300\text{GPa}$;
- coeficiente de Poisson: $\nu = 0,5$;
- tensão de escoamento: $\sigma_e = 200\text{MPa}$

Resolução:

Como:

$$\varepsilon = T[\vec{n}]\vec{n}$$

a leitura de um extensômetro colocado em um ângulo θ com o eixo x pode ser escrita, em função das componentes de deformação, na forma:

$$\varepsilon(\theta) = \varepsilon_x \cos^2 \theta + \varepsilon_y \sin^2 \theta + \gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

A partir das leituras dos extensômetros podem-se calcular essas componentes:

$$\varepsilon_x = 100\mu$$

$$\varepsilon_y = 200\mu$$

$$\gamma_{xy} = 0$$

Como $\sigma_z = 0$, da Lei de Hooke:

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) = 80\text{MPa}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) = 100\text{MPa}$$

Como $\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, as tensões principais são:

$$\sigma_1 = 100\text{MPa}$$

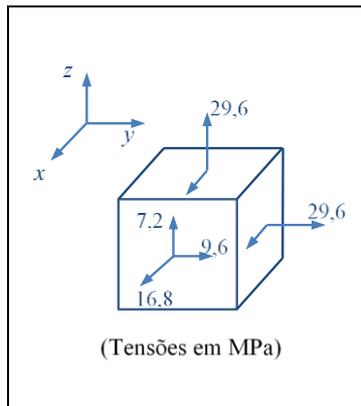
$$\sigma_2 = 80 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = 0$$

Como o material é dúctil, pode ser usado o Critério de Tresca:

$$FS = \frac{\sigma_e}{\sigma_1 - \sigma_3} = 2$$

Exercício 9:



Na figura ao lado está representado o estado de tensões em um dado ponto de um sólido deformável. Admitindo que o material seja isótropo e possua comportamento elástico-linear, determine:

- a) o tensor das pequenas deformações no ponto;
- b) a máxima distorção e o máximo alongamento possíveis de serem obtidos neste ponto;
- c) se existe uma fibra passando pelo ponto dado que tenha um alongamento $\varepsilon = 120 \mu$ e que não possua distorção com nenhuma outra direção inicialmente ortogonal à sua. Se existir tal fibra, indique sua direção, justificando a resposta.

São dados: $E = 200 \text{ GPa}$; $\nu = 0,25$.

Resolução:

a) O tensor das deformações no ponto é dado por:

$$[E] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{xz}/2 & \gamma_{yz}/2 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

onde as componentes do tensor são obtidas a partir da Lei de Hooke:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [16,8 - 0,25(29,6 + 29,6)] = 10 \mu$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [29,6 - 0,25(16,8 + 29,6)] = 90 \mu$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [29,6 - 0,25(16,8 + 29,6)] = 90 \mu$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} = \frac{2(1,25)}{2 \cdot 10^5} 9,6 = 120\mu$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xz} = \frac{2(1,25)}{2 \cdot 10^5} 7,2 = 90\mu$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{yz} = \frac{2(1,25)}{2 \cdot 10^5} 0 = 0$$

Logo:

$$[E] = \begin{bmatrix} 10 & 60 & 45 \\ 60 & 90 & 0 \\ 45 & 0 & 90 \end{bmatrix} \mu$$

b) Para o cálculo do máximo alongamento e da máxima distorção, precisamos determinar os alongamentos principais:

$$\begin{vmatrix} 10 - \varepsilon & 60 & 45 \\ 60 & 90 - \varepsilon & 0 \\ 45 & 0 & 90 - \varepsilon \end{vmatrix} = 0$$

Que leva à seguinte equação característica:

$$(90 - \varepsilon) \cdot (\varepsilon^2 - 100\varepsilon - 4725) = 0$$

cujas raízes são:

$$\varepsilon_1 = 135\mu \quad \varepsilon_2 = 90\mu \quad \varepsilon_3 = -35\mu$$

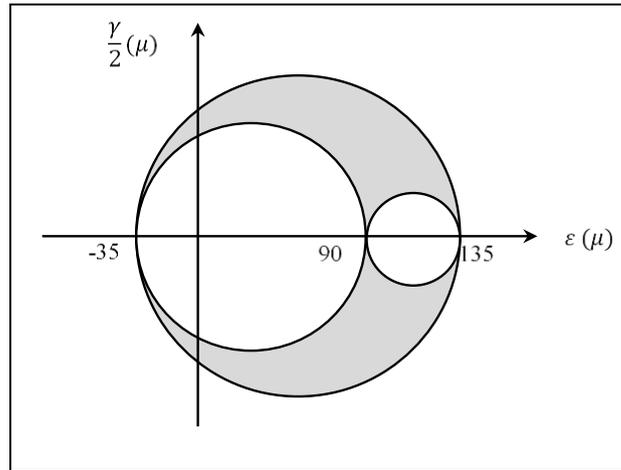
Assim, o maior alongamento possível (tanto em valor algébrico quanto em valor absoluto) é $\varepsilon_1 = 135\mu$.

E a maior distorção possível entre pares de fibras que passam pelo ponto é:

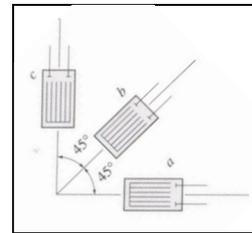
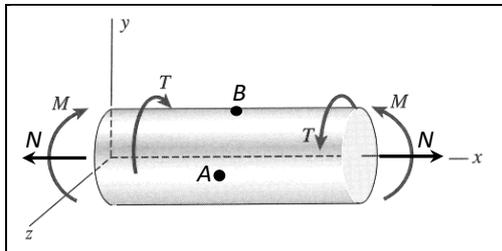
$$\gamma_{m\acute{a}x} = \varepsilon_1 - \varepsilon_3 = 170\mu$$

c) Se existisse tal fibra, sua direção seria a de uma das direções principais de deformação (uma vez que, pelo enunciado, não pode haver distorção entre a fibra dada e qualquer outra que seja ortogonal a ela). Ou seja, o alongamento da fibra deveria ser um alongamento principal. Contudo, como nenhum dos três alongamentos principais coincide com o valor dado de 120μ , concluímos que não existe nenhuma fibra que passa pelo ponto e que satisfaça as duas condições dadas.

Complementarmente, pode-se observar, pelos círculos de Mohr das deformações, que o par ordenado $(\varepsilon, \gamma/2) = (120\mu, 0)$ está situado fora da região delimitada pelos três círculos de Mohr, o que significa que não existe fibra que passa pelo ponto e tenha um alongamento de 120μ e distorção nula com as demais fibras.



Exercício 10:



A barra cilíndrica da figura tem comprimento L e diâmetro d . Nos pontos $A(L/2, 0, d/2)$ e $B(L/2, d/2, 0)$ foram coladas rosetas com extensômetros a 45° como a da figura, com o extensômetro a paralelo ao eixo x . Com a aplicação simultânea de um momento fletor M , um momento de torção T e uma força normal N , de valores desconhecidos, as leituras dos extensômetros no ponto A são:

$$\varepsilon_a = 500\mu \quad \varepsilon_b = 438\mu \quad \varepsilon_c = -124\mu$$

e as leituras dos extensômetros no ponto B são:

$$\varepsilon_a = -500\mu \quad \varepsilon_b = 62\mu \quad \varepsilon_c = 124\mu$$

Pede-se determinar os valores de M , T e N .

São dados:

- diâmetro da barra: $d = 4\text{cm}$
- módulo de elasticidade: $E = 200\text{GPa}$
- coeficiente de Poisson: $\nu = 0,25$
- usar $\pi = 3$

Resolução:

Para uma roseta com extensômetros a 45° (adotando um sistema de eixos local em que o eixo x coincide com a direção do extensômetro a e o eixo y coincide com a direção do extensômetro b):

$$\varepsilon_x = \varepsilon_a$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_c$$

$$\gamma_{xy} = 2 \varepsilon_b - (\varepsilon_a + \varepsilon_c)$$

Para o ponto A :

$$\varepsilon_x = 500\mu$$

$$\varepsilon_y = -124\mu$$

$$\gamma_{xy} = (2 * 438 - (500 - 124))\mu = 500\mu$$

Para o ponto B :

$$\varepsilon_x = -500\mu$$

$$\varepsilon_y = 124\mu$$

$$\gamma_{xy} = (2 * 62 - (-500 + 124))\mu = 500\mu$$

i) Cálculo de N :

Como a roseta A está na linha neutra, a deformação ε_x é devida apenas à força normal. Assim:

$$N = \sigma_x A = EA\varepsilon_x$$

$$A = 12\text{cm}^2$$

$$\Rightarrow N = 120\text{kN}$$

ii) Cálculo de M :

Para a roseta em B , a deformação da direção x é a soma da deformação devida à força normal (500μ) com a deformação devida à flexão. Assim, a deformação devida à flexão será:

$$\varepsilon_x = -1000\mu$$

Como:

$$\sigma_x = -\frac{Md}{2I}$$

$$\sigma_x = E\varepsilon_x$$

$$I = \frac{\pi d^4}{64} = 12\text{cm}^4$$

$$\Rightarrow M = 1200\text{Nm}$$

iii) Cálculo de T :

Para o cálculo de T pode ser usada tanto a distorção medida em A quanto em B (elas devem ser iguais):

Como:

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy};$$

$$\tau_{xy} = \frac{Td}{2I_P}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 80\text{GPa}$$

$$I_P = \frac{\pi d^4}{32} = 24\text{cm}^4$$

$$\Rightarrow T = 480\text{Nm}$$

Exercício 11:

Em uma lata de refrigerante fechada são colados dois extensômetros: um na direção circunferencial e outro na direção longitudinal. Nessa situação a leitura dos extensômetros é zerada. A lata tem diâmetro externo de 60mm, espessura de 0,2mm e é feita de alumínio com módulo de elasticidade $E = 75\text{GPa}$ e coeficiente de Poisson $\nu = 1/3$. Quando a lata é aberta a leitura do extensômetro circunferencial é $\varepsilon_c = -100\mu$. Pergunta-se:

- qual é a leitura do extensômetro longitudinal quando a lata é aberta?
- qual é a pressão interna do refrigerante na lata fechada?

Resolução:

A tensão longitudinal em um vaso de pressão cilíndrico é dada por:

$$\sigma_l = p \frac{r}{2t}$$

e a tensão circunferencial por:

$$\sigma_c = p \frac{r}{t}$$

Assim, pela Lei de Hooke:

$$\varepsilon_l = \frac{1}{E}(\sigma_l - \nu\sigma_c) = \frac{pr}{2Et}(1 - 2\nu)$$

e

$$\varepsilon_c = \frac{1}{E}(\sigma_c - \nu\sigma_l) = \frac{pr}{2Et}(2 - \nu)$$

Então, a relação entre ε_l e ε_c é:

$$\frac{\varepsilon_l}{\varepsilon_c} = \frac{1 - 2\nu}{2 - \nu}$$

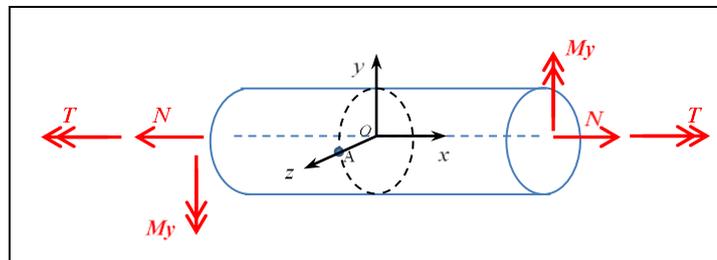
para $\nu = 1/3$:

$$\frac{\varepsilon_l}{\varepsilon_c} = \frac{1}{5} \Rightarrow \varepsilon_l = -20\mu$$

A pressão interna pode ser calculada diretamente a partir da expressão de ε_l ou da expressão de ε_c . Assim:

$$p = -\frac{2Et\varepsilon_c}{r(2 - \nu)} \Rightarrow p = 60kPa$$

Exercício 12:



A figura ilustra um segmento de uma barra de seção transversal circular cheia (diâmetro d) sobre a qual atuam os seguintes esforços (todos referidos ao sistema de eixos $Oxyz$ indicado):

- Uma força normal $N = 10P$;
- Um momento fletor $M_y = 2,5Pd$;
- Um momento torçor $T = 5Pd$.

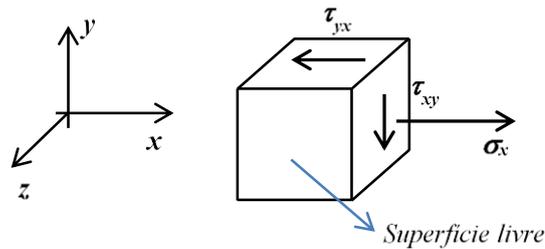
O material da barra possui módulo de elasticidade E e coeficiente de Poisson $\nu = 0,25$. Se um único extensômetro for colado sobre a superfície da barra no ponto $A = (0, 0, d/2)$ antes da aplicação dos esforços indicados, determine:

- a) o tensor das tensões e o tensor das deformações no ponto A após a aplicação dos esforços;

- b) os alongamentos principais no ponto A;
- c) a melhor orientação do extensômetro para que a leitura (em valor absoluto) seja a maior possível.

Resolução:

- a) o estado tensional no ponto A fica dado por:



onde:

$$\sigma_x = \frac{4N}{\pi d^2} + \frac{M_y}{\pi d^4} \frac{64}{2} d = \frac{4N}{\pi d^2} + \frac{32M_y}{\pi d^3}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{T}{(\pi d^4/32)} \frac{d}{2} = -\frac{16T}{\pi d^3}$$

ou seja,

$$\sigma_x = \frac{40P}{\pi d^2} + \frac{80P}{\pi d^2} = \frac{120P}{\pi d^2}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{80P}{\pi d^2}$$

Assim, o tensor das tensões no ponto A fica dado por:

$$[T] = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{40P}{\pi d^2}$$

Pela Lei de Hooke, teremos:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{120P}{E \pi d^2}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] = -\frac{\nu\sigma_x}{E} = -\frac{30P}{E \pi d^2}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = -\frac{\nu\sigma_x}{E} = -\frac{30P}{E \pi d^2}$$

e

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} = \frac{2,5}{E} \left(-\frac{80P}{\pi d^2} \right) = -\frac{200P}{E \cdot \pi d^2}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xz} = 0$$

e

$$\gamma_{yz} = \frac{2(1+\nu)}{E} \cdot \tau_{yz} = 0$$

Logo, o tensor das pequenas deformações fica dado por:

$$[E] = \begin{bmatrix} 12 & -10 & 0 \\ -10 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \frac{10P}{E \cdot \pi d^2}$$

b) os alongamentos principais no ponto A são dados por:

$$|[E] - \varepsilon \cdot [I]| = \begin{vmatrix} 12\beta - \varepsilon & -10\beta & 0 \\ -10\beta & -3\beta - \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & -3\beta - \varepsilon \end{vmatrix} = 0$$

onde:

$$\beta = \frac{10P}{E \cdot \pi d^2}$$

é uma deformação de referência (ou seja, todas as demais deformações são múltiplos de β).

Desta forma, teremos a equação característica e seus auto-valores:

$$-(3\beta + \varepsilon) \cdot (\varepsilon^2 - 9\beta\varepsilon - 136\beta^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon = -3\beta \\ \varepsilon = \frac{9\beta \pm 25\beta}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_1 = 17\beta \\ \varepsilon_2 = -3\beta \\ \varepsilon_3 = -8\beta \end{cases}$$

ou, de forma explícita,

$$\varepsilon_1 = \frac{170P}{E \cdot \pi d^2}$$

$$\varepsilon_2 = -\frac{30P}{E \cdot \pi d^2}$$

$$\varepsilon_3 = -\frac{80P}{E \cdot \pi d^2}$$

c) O maior alongamento possível que pode ser registrado pelo extensômetro deve ter a direção de \vec{n}_1 (direção principal associada ao alongamento $\varepsilon_1 = 17\beta$), a qual é dada por:

$$([E] - \varepsilon_1 \cdot [I]) \cdot \{\vec{n}_1\} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -5 & -10 & 0 \\ -10 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & -20 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} n_{x1} \\ n_{y1} \\ n_{z1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

De onde temos as relações:

$$n_{x1} + 2 \cdot n_{y1} = 0$$

$$n_{z1} = 0$$

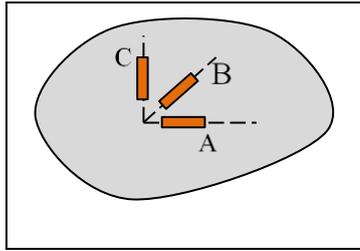
ou seja,

$$\vec{n}_1 = \frac{\{2, -1, 0\}^t}{\sqrt{5}} = \left\{ \frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}, 0 \right\}^t$$

Exercício 13:

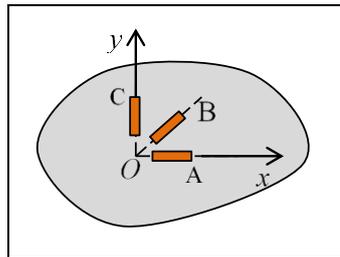
Uma roseta com 3 extensômetros a 45° (nomeados A, B e C) é utilizada para determinar as deformações em um ponto da superfície de uma dada estrutura, conforme indicado na figura, sendo obtidos os valores: $\varepsilon_A = \varepsilon_C = 210\mu$, $\varepsilon_B = 420\mu$. Admita condições de linearidade geométrica e que o material seja homogêneo, isótropo e tenha comportamento elástico-linear com constantes elásticas $E = 280 \text{ GPa}$ e $\nu = 0,4$. Pedem-se:

- a) o maior e o menor alongamento que pode ser medido neste ponto com auxílio de extensômetros e as direções em que eles ocorrem (indique estas direções em relação aos extensômetros A, B e C através de desenhos);
- b) a maior distorção entre as fibras que passam pelo ponto e cujos versores (tangentes às fibras) são paralelos à superfície da estrutura. Indique estas direções em relação aos extensômetros A, B e C em um desenho;
- c) o valor da maior tensão de cisalhamento no ponto (considerando todos os planos possíveis que passam pelo ponto) e as normais aos planos em que ela atua;
- d) considerando que o material tenha comportamento dúctil com tensão de escoamento 350 MPa , o fator de segurança com relação ao início de escoamento no ponto utilizando um critério apropriado. Justifique a escolha do critério adotado!

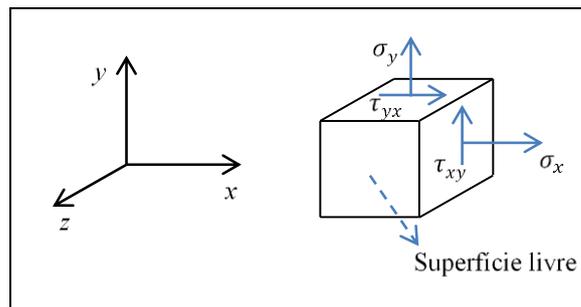


Resolução:

a) Consideremos o sistema de eixos $Oxyz$ como indicado abaixo (com o eixo Oz ortogonal à superfície da estrutura):



O estado tensional no ponto em questão fica dado por:



Consequentemente, o estado de deformações no ponto fica (utilizando a Lei de Hooke):

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu\sigma_y]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu\sigma_x]$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} [\sigma_x + \sigma_y]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

O tensor das deformações, no sistema xyz , fica então dado por:

$$[E] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & 0 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

E o alongamento segundo uma fibra cujo versor tangente seja dado por $\vec{n} = \{\cos\theta \ \sin\theta \ 0\}^t$ fica dado por:

$$\varepsilon(\theta) = \{\vec{n}\}^t [E] \{\vec{n}\}$$

Resultando:

$$[E] \cdot \{\vec{n}\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & 0 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \cos\theta + \gamma_{xy} \sin\theta/2 \\ \gamma_{xy} \cos\theta/2 + \varepsilon_y \sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

E, finalmente:

$$\varepsilon(\theta) = \varepsilon_x \cos^2\theta + \varepsilon_y \sin^2\theta + \gamma_{xy} \cos\theta \sin\theta$$

Pelos dados do problema, temos:

$$\varepsilon(0) = \varepsilon_x = \varepsilon_A$$

$$\varepsilon(\pi/2) = \varepsilon_y = \varepsilon_C$$

$$\varepsilon(\pi/4) = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \gamma_{xy}}{2} = \varepsilon_B$$

Assim, obtemos:

$$\varepsilon_x = 210\mu \quad , \quad \varepsilon_y = 210\mu \quad , \quad \gamma_{xy} = 420\mu$$

Finalmente, das três primeiras equações constitutivas, é imediato mostrar que:

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} [\sigma_x + \sigma_y] = -\frac{\nu}{(1-\nu)} (\varepsilon_x + \varepsilon_y)$$

Logo:

$$\varepsilon_z = -\frac{0,4}{0,6} (420\mu) = -280\mu$$

E o tensor das deformações fica:

$$[E] = \begin{bmatrix} 210 & 210 & 0 \\ 210 & 210 & 0 \\ 0 & 0 & -280 \end{bmatrix} \mu$$

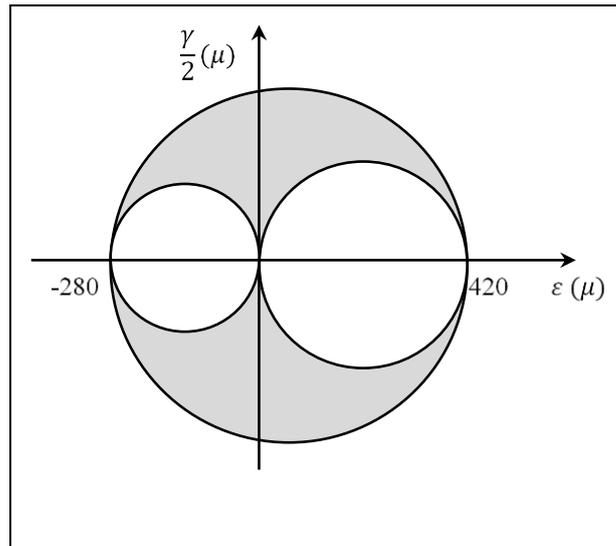
Os alongamentos principais correspondem aos autovalores do tensor das deformações obtidos por:

$$|[E] - \varepsilon[I]| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 210 - \varepsilon & 210 & 0 \\ 210 & 210 - \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & -280 - \varepsilon \end{vmatrix} = 0$$

Resultando:

$$-(280 + \varepsilon) \cdot (\varepsilon^2 - 420\varepsilon) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon = 420\mu = \varepsilon_1 \\ \varepsilon = 0 = \varepsilon_2 \\ \varepsilon = -280\mu = \varepsilon_3 \end{cases}$$

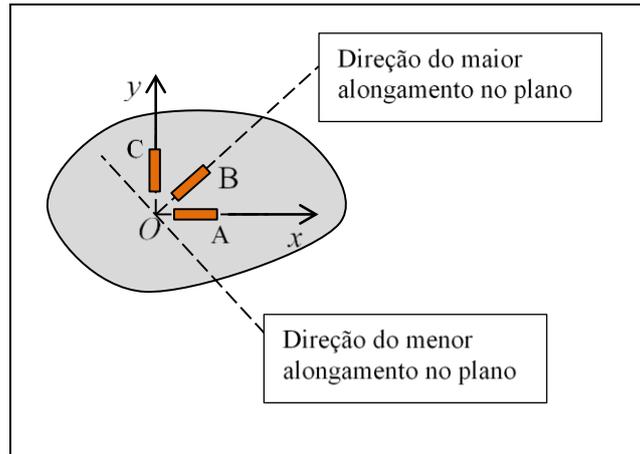
Os círculos de Mohr das deformações ficam:



Do exposto, podemos afirmar que:

- i) O maior alongamento que pode ser medido na superfície da estrutura por meio de extensômetros é 420μ e sua direção é a do extensômetro B (que coincide com a direção principal \vec{n}_1);
- ii) O menor alongamento que pode ser medido na superfície da estrutura por meio de extensômetros é 0μ e sua direção é ortogonal à direção do extensômetro B (que coincide com a direção principal \vec{n}_2).

Esquemáticamente:



b) dos círculos de Mohr podemos observar que a maior distorção entre as fibras que passam pelo ponto e cujos versores (tangentes às fibras) são paralelos à superfície da estrutura vale:

$$\gamma_{m\acute{a}x,plano} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 420\mu$$

Tal distorção ocorre entre as fibras que formam ângulos de 45° com as direções principais \vec{n}_1 e \vec{n}_2 , ou seja, irá ocorrer justamente entre as direções x e y do sistema de coordenadas $Oxyz$. De fato, vemos que:

$$\gamma_{m\acute{a}x,plano} = \gamma_{xy} = 420\mu$$

c) Aplicando novamente a Lei de Hooke, mas utilizando agora as direções principais de tensão e deformação, teremos:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)]$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)]$$

De onde obtemos (alternativamente):

$$\sigma_1 = \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 2G\varepsilon_1$$

$$\sigma_2 = \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 2G\varepsilon_2$$

$$\sigma_3 = \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 2G\varepsilon_3$$

onde:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} = \frac{0,4.280}{1,4.0,2} GPa = 400 GPa$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} = \frac{280}{2.1,4} \text{ GPa} = 100 \text{ GPa}$$

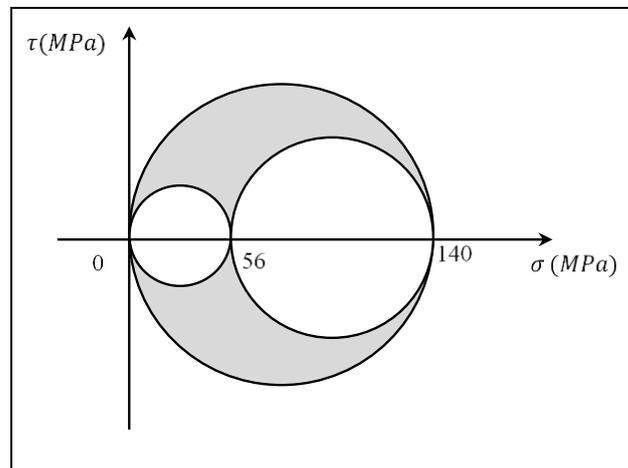
Daí:

$$\sigma_1 = \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 2G\varepsilon_1 = \frac{(400.140 + 200.420)}{1000} \text{ MPa} = 140 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 2G\varepsilon_2 = \frac{(400.140 + 0)}{1000} \text{ MPa} = 56 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 2G\varepsilon_3 = \frac{(400.140 - 200.280)}{1000} \text{ MPa} = 0 \text{ MPa}$$

Os círculos de Mohr das tensões ficam então dados por:



Do exposto verifica-se que a maior tensão de cisalhamento, considerando-se todos os planos que passam pelo ponto será:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 70 \text{ MPa}$$

A máxima tensão de cisalhamento ocorre sempre em planos cujas normais formam 45° entre as direções principais \vec{n}_1 e \vec{n}_3 . Neste caso, como as direções principais de tensão e de deformação são as mesmas, teremos:

$$\vec{n}_1 = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right\}^t$$

$$\vec{n}_3 = \{0, 0, 1\}^t$$

Assim, a máxima tensão de cisalhamento ocorre nos planos cujas normais são:

$$\vec{\xi} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{n}_1 + \vec{n}_3) = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}^t$$

e

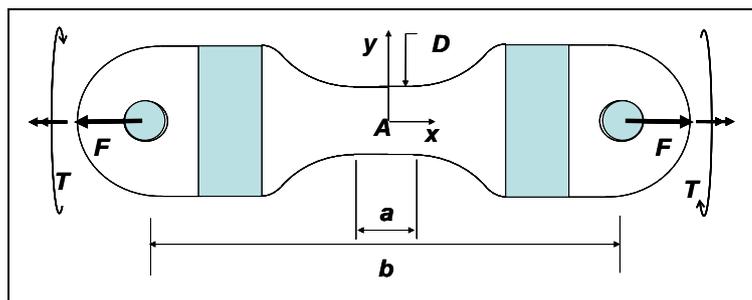
$$\vec{\eta} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{n}_1 - \vec{n}_3) = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right\}^t$$

d) Para materiais com comportamento dúctil podemos utilizar o Critério de Tresca (critério da máxima tensão de cisalhamento) ou o Critério de Von Mises (critério da máxima energia específica de distorção). O primeiro fornece resultados mais conservativos e, portanto, será o critério escolhido. Neste caso, o fator de segurança com relação ao início de escoamento no ponto será:

$$(FS) = \frac{\sigma_e}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{350}{140} = 2,5$$

Exercício 14:

Um dinamômetro de alta capacidade, projetado para medir cargas de tração de até 2000kN em sistemas de amarração de navios, é construído a partir da usinagem de uma peça de aço carbono, liga SAE4340 (ABNT4340), de alta resistência. O dinamômetro é inserido na linha através de duas manilhas ligadas a dois tornéis (distorcedores). Os pinos das manilhas, inseridos nos olhais, transmitem ao dinamômetro a carga de tração F , a ser medida. Os tornéis dão liberdade de giro ao conjunto, de forma a minimizar a aplicação de torção. O sensoriamento da carga de tração é feito indiretamente, através da medida de deformações, utilizando-se rosetas de extensômetros elétricos, que são coladas à superfície do “pescoço” da peça, em sua seção intermediária. São 4 conjuntos de rosetas, instalados a 90° entre si e ligadas eletricamente de forma a compensar deformações decorrentes de esforços outros que não os de tração. A calibração do dinamômetro é realizada em aparato de ensaio de tração.



Na fase de dimensionamento do dinamômetro, uma das preocupações do projetista é a definição do diâmetro D . Por um lado, deseja-se grande sensibilidade. Por outro, requer-se a resistência necessária. Admitindo que não haja qualquer imposição de flexão e que o material seja isotrópico e linear-elástico.

- a) a tensão normal à seção, σ_x , associada à tração F ;
- b) a tensão de cisalhamento, τ_{xy} , associada a um torque residual, de magnitude T ;

- c) o tensor das tensões $[T]$, segundo os eixos locais (x,y,z) ;
 d) as tensões principais;
 e) a máxima tensão de cisalhamento correspondente;
 f) as deformações principais.

Resolução:

a)

$$\sigma_x = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi R^2} = \frac{4F}{\pi D^2}$$

b)

$$\tau_{xy} = \frac{TR}{J_p} = \frac{T D/2}{\pi D^4/32} = \frac{16T}{\pi D^3}$$

c)

$$[T] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4F/\pi D^2 & 16T/\pi D^3 & 0 \\ 16T/\pi D^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

d) considerando as direções principais \vec{n}_1 e \vec{n}_2 no plano (x,y) :

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = \frac{2F}{\pi D^2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{64T^2}{F^2 D^2}} \right]$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\Rightarrow \sigma_2 = \frac{2F}{\pi D^2} \left[1 - \sqrt{1 + \frac{64T^2}{F^2 D^2}} \right]$$

e)

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{2F}{\pi D^2} \sqrt{1 + \frac{64T^2}{F^2 D^2}}$$

f)

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)) = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2) \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)) = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_1) \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E}(\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)) = -\frac{1}{E}\nu(\sigma_1 + \sigma_2)\end{aligned}$$

portanto

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{4F}{\pi D^2} \frac{1}{2E} \left((1 - \nu) + (1 + \nu) \sqrt{1 + \frac{64T^2}{F^2 D^2}} \right) \\ \varepsilon_2 &= \frac{4F}{\pi D^2} \frac{1}{2E} \left((1 - \nu) - (1 + \nu) \sqrt{1 + \frac{64T^2}{F^2 D^2}} \right) \\ \varepsilon_3 &= -\frac{4F}{\pi D^2} \frac{\nu}{E}\end{aligned}$$