

---

# **PME 3211 – Mecânica dos Sólidos II**

---

---

## **Introdução ao Estudo das Tensões**

---

---

***Prof. Dr. Clóvis de Arruda Martins***

---

---

***Agosto de 2020***

---

---

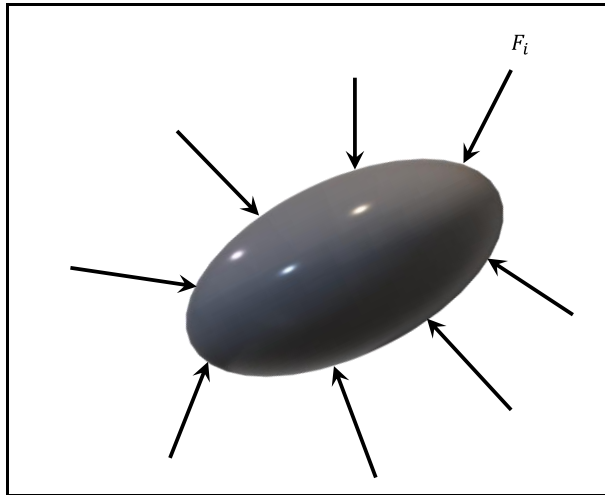
# 1 Apresentação

A presente apostila apresenta a primeira parte das notas de aula da disciplina Mecânica dos Sólidos II, que corresponde a uma introdução ao estudo das tensões. O conteúdo aqui presente é baseado no curso que venho ministrando há vários anos em parceria com o Prof. Dr. Roberto Ramos Jr. Boa parte do conteúdo desta apostila se baseia em notas de aulas ministradas pelo Prof. Ramos. Os exercícios aqui apresentados são questões de provas aplicadas nas disciplinas de Mecânica dos Sólidos.

---

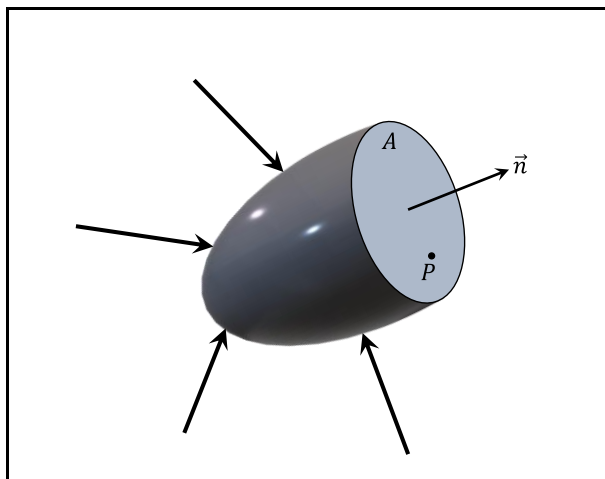
## 2 Conceito de Tensão

Seja o sólido genérico  $S$  representado na Figura 1, submetido a um sistema de forças externas  $F_i$  equilibrado.



**Figura 1 - Sólido genérico  $S$  submetido a um sistema equilibrado de forças  $F_i$ .**

Consideremos, agora, que o sólido  $S$  seja cortado por um plano  $\alpha$  que passa por um ponto  $P$  e é perpendicular a um versor  $\vec{n}$  (Figura 2). Para que a parte que foi separada de  $S$  continue em equilíbrio, é necessário que existam forças distribuídas sobre a área  $A$  que garantam esse equilíbrio. Essas forças são chamadas de *forças internas*. Essas forças representam a maneira como os esforços externos se distribuem pelo sólido.

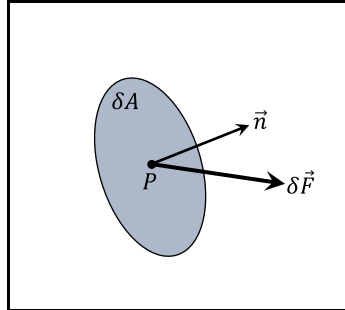


**Figura 2 - Sólido genérico  $S$  submetido a um sistema equilibrado de forças  $F_i$ .**

Um elemento de área infinitesimal  $\delta A$  tomado sobre  $\alpha$  em torno do ponto  $P$  estará submetido a uma força interna infinitesimal  $\delta \vec{F}$  (Figura 3). Essa força depende não só

do ponto  $P$ , mas também da direção  $\vec{n}$  do corte considerado. A rigor deve-se colocar essa força como função desses dois parâmetros:

$$\delta\vec{F} = \delta\vec{F}(P, \vec{n}) \quad . \quad (1)$$



**Figura 3 – Força interna  $\delta\vec{F}$  em um elemento de área  $\delta A$ .**

A força interna  $\delta\vec{F}$  é um vetor que pode ter qualquer direção, mas, como todo vetor pode ser decomposto em duas componentes: uma,  $F_n$ , que tem a direção do versor  $\vec{n}$  e outra,  $F_t$ , que é paralela ao plano do corte  $\alpha$ . Assim:

$$\delta\vec{F} = \delta F_n \vec{n} + \delta F_t \vec{t} \quad , \quad (2)$$

onde  $\vec{t}$  é um versor paralelo a  $\alpha$ .

A *tensão* no ponto  $P$ , que atua no plano perpendicular ao versor  $\vec{n}$ , é o vetor:

$$\vec{\rho}(P, \vec{n}) = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta\vec{F}(P, \vec{n})}{\delta A} \quad . \quad (3)$$

Note que a tensão tem a dimensão de força por unidade de área e que ela é uma propriedade do ponto  $P$  e da direção  $\vec{n}$ . Para conhecer o *estado de tensão* no ponto  $P$  é necessário conhecer o vetor  $\vec{\rho}$  em todas as direções. Cada ponto de um sólido pode estar submetido a um estado de tensão diferente.

O estudo das tensões que ocorrem nos pontos de uma estrutura é fundamental para saber se ela é capaz de resistir aos esforços externos aplicados sem sofrer nenhum dano.

Assim como a força interna, o vetor tensão  $\vec{\rho}$  também pode ser decomposto em duas componentes:

$$\vec{\rho} = \sigma \vec{n} + \tau \vec{t} \quad , \quad (4)$$

onde

$$\sigma = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta F_n}{\delta A} \quad (5)$$

---

e

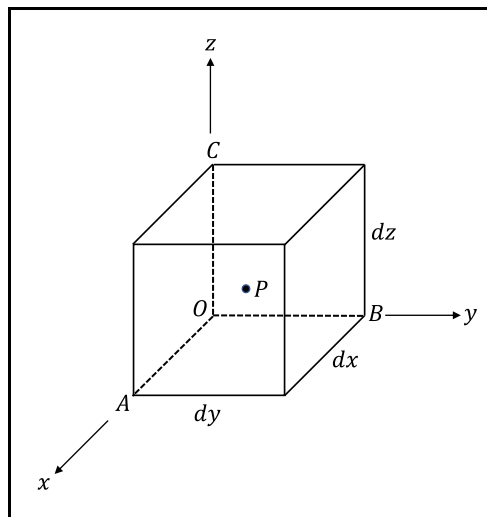
$$\tau = \lim_{\delta A \rightarrow 0} \frac{\delta F_t}{\delta A} \quad (6)$$

A componente  $\sigma$  recebe o nome de *tensão normal* e a componente  $\tau$  recebe o nome de *tensão cisalhante* ou *tensão de cisalhamento*. A decomposição da tensão nessas duas componentes não tem apenas significado geométrico pois os materiais têm limites de resistência diferentes quando submetidos a tensões normais ou tensões de cisalhamento.

### 3 Notação de Timoshenko

Vimos que a tensão é uma propriedade de um ponto  $P$  do corpo e que a tensão varia com o plano de corte, dado pelo seu versor normal  $\vec{n}$  e que para conhecer o estado de tensão em um ponto, é necessário conhecer o valor de  $\vec{\rho}$  para todas as direções.

Normalmente o estado de tensão em um ponto é representado por um elemento cúbico de dimensões infinitesimais. Imagine esse elemento como um cubo muito pequeno que foi retirado do corpo e que contém o ponto  $P$ . Como as suas dimensões são infinitesimais, no limite este cubo tende ao próprio ponto  $P$ . Associado a esse elemento de tensão, pode ser construído um sistema de coordenadas cartesianas  $Oxyz$ , conforme a Figura 4.



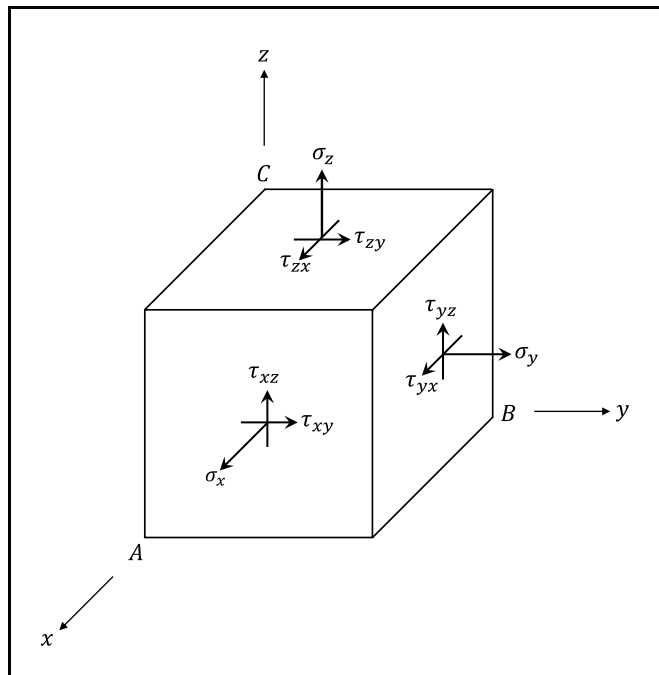
**Figura 4 – Elemento cúbico infinitesimal.**

No caso geral, cada face deste elemento estará submetida a uma tensão normal e a uma tensão de cisalhamento. Para cada face está perfeitamente definido um versor normal  $\vec{n}$ , mas para cada face pode haver infinitos vetores tangentes  $\vec{t}$ . Então, para representar bem a tensão normal em uma face, é necessário um único número, mas para representar bem a tensão de cisalhamento são necessários dois números. Assim, para representar as tensões em todas as faces do cubo, serão necessários seis valores de tensões normais e doze valores de tensões de cisalhamento e o problema de representação das tensões começa a ficar complicado!

Com essa finalidade, Timoshenko, que foi um grande cientista russo na área da Mecânica dos Sólidos criou uma notação que ficou conhecida como *Notação de Timoshenko*. A Figura 5 apresenta as tensões normais e as componentes de tensão de cisalhamento com seus sentidos positivos seguindo essa notação. As tensões normais são indicadas por  $\sigma_u$  onde  $u$  é o eixo do sistema cartesiano que é ortogonal à face onde ocorre essa tensão normal. Uma tensão normal é convencionalmente considerada como positiva

---

se for uma tensão de tração e é convencionada como negativa se for uma tensão de compressão.



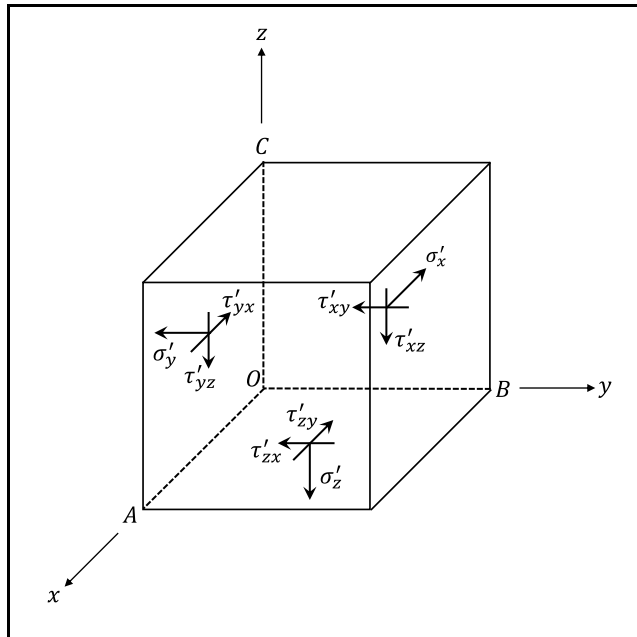
**Figura 5 – Notação de Timoshenko – Faces Positivas.**

Já as componentes de tensão de cisalhamento são representadas por dois índices,  $\tau_{uv}$ , onde  $u$  é o eixo ortogonal à face onde atua esta componente e  $v$  é o eixo que tem a mesma direção da componente.

As *faces positivas* do cubo são as que estão indicadas na Figura 5. Nelas o sentido positivo de uma tensão normal corresponde ao sentido positivo do eixo paralelo a ela. Nas faces positivas o sentido positivo das componentes de tensão de cisalhamento corresponde ao sentido positivo dos eixos que são paralelos a elas.

A Figura 6 traz o sentido positivo das tensões normais e das componentes de tensão de cisalhamento para as *faces opostas*. As faces opostas são aquelas em que uma tensão normal de tração (positiva) tem sentido contrário ao do eixo correspondente. Nessas faces, o sentido positivo das componentes de tensão de cisalhamento é contrário ao sentido positivo do eixo correspondente. Compare a Figura 5 com a Figura 6, para identificar a diferença. Note que para identificar as tensões nas faces opostas, foi usando um apóstrofo (').

A notação de Timoshenko é muito prática e é largamente utilizada. Note que para o ponto  $P$  foram representadas na notação de Timoshenko seis tensões normais e doze componentes de cisalhamento. Mas foram considerados apenas os planos que formam o elemento cúbico e são perpendiculares aos eixos coordenados. Mas e os outros planos, aqueles que são inclinados em relação aos eixos? Veremos mais adiante o que acontece.

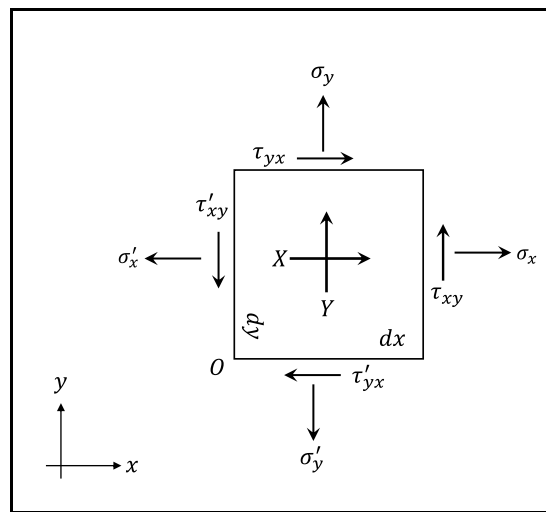


**Figura 6 – Notação de Timoshenko – Faces Opostas.**



## 4 Estado Plano de Tensão

O estado de tensão em um ponto  $P$  é um *estado plano de tensão* quando todas as componentes de tensão em uma determinada direção são nulas. A Figura 7 apresenta um elemento cúbico correspondente a um estado plano, olhado de frente. Comparando com a Figura 5 e com a Figura 6 nota-se que todas as componentes de tensão que tem  $z$  no índice são nulas e não estão representadas. As dezoito componentes de tensão do estado completo ficaram reduzidas a oito no estado plano. Na Figura 7,  $X$  e  $Y$  são forças distribuídas por unidade de volume aplicadas ao elemento cúbico. Essas forças são *forças de campo*, isto é, forças que atuam à distância como forças gravitacionais ou magnéticas.



**Figura 7 – Estado Plano de Tensão.**

O elemento cúbico da Figura 7 está em equilíbrio. Então a soma de todas as forças a ele aplicadas que tem a direção  $x$  é nula. Considerando que força é igual a tensão vezes a área em que ela está atuando e que a direção  $z$  é perpendicular ao plano da figura, resulta que:

$$-\sigma'_x dydz + \sigma_x dydz + \tau_{yx} dx dz - \tau'_{yx} dx dz + X dx dy dz = 0 \quad (7)$$

Dividindo-se essa equação por  $dz$ , obtém-se:

$$-\sigma'_x dy + \sigma_x dy + \tau_{yx} dx - \tau'_{yx} dx + X dx dy = 0 \quad (8)$$

Fazendo  $dy \rightarrow 0$  na equação (8) conclui-se que:

$$\tau'_{yx} = \tau_{yx} \quad (9)$$

Fazendo  $dx \rightarrow 0$  na equação (8) conclui-se que:

$$\sigma'_x = \sigma_x \quad . \quad (10)$$

O equilíbrio na direção  $y$  fornece uma relação semelhante:

$$-\tau'_{xy}dydz + \tau_{xy}dydz + \sigma_y dxdz - \sigma'_y dxdz + Ydxdydz = 0 \quad . \quad (11)$$

Dividindo-se essa equação por  $dz$ , obtém-se:

$$-\tau'_{xy}dy + \tau_{xy}dy + \sigma_y dx - \sigma'_y dx + Ydxdy = 0 \quad . \quad (12)$$

Fazendo  $dy \rightarrow 0$  na equação (12) conclui-se que:

$$\sigma'_y = \sigma_y \quad . \quad (13)$$

Fazendo  $dx \rightarrow 0$  na equação (12) conclui-se que:

$$\tau'_{xy} = \tau_{xy} \quad . \quad (14)$$

Por último, o equilíbrio dos momentos das forças aplicadas em relação ao ponto  $O$  fornece a equação:

$$\begin{aligned} & \sigma_y dxdz \frac{dx}{2} - \tau_{yx} dxdzdy + \tau_{xy} dydzdx \\ & - \sigma_x dydz \frac{dy}{2} - \sigma'_y dxdz \frac{dx}{2} + \sigma'_x dydz \frac{dy}{2} \\ & + Ydxdydz \frac{dx}{2} - Xdxdydz \frac{dy}{2} = 0 \quad . \quad (15) \end{aligned}$$

Dividindo (15) por  $dxdydz$  e levando em conta (10) e (13) obtém-se:

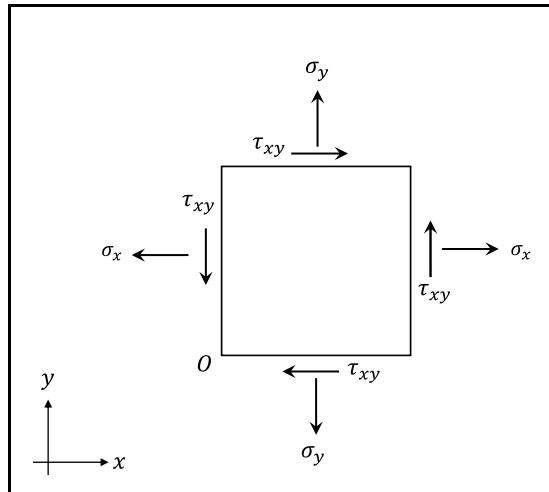
$$-\tau_{yx} + \tau_{xy} + Y \frac{dx}{2} - X \frac{dy}{2} = 0 \quad . \quad (16)$$

Fazendo  $dx \rightarrow 0$  e  $dy \rightarrow 0$  conclui-se que:

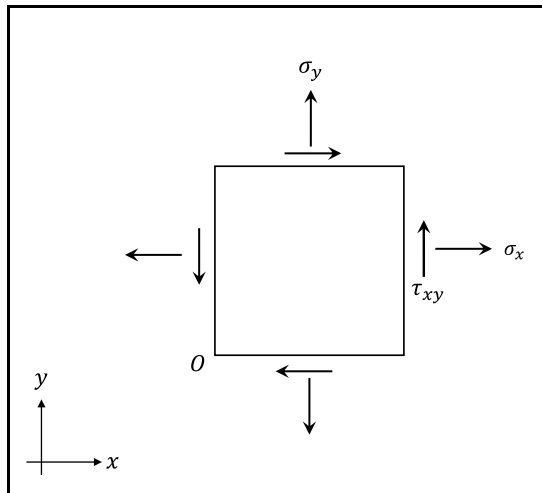
$$\tau_{yx} = \tau_{xy} \quad . \quad (17)$$

Note que (9), (10), (13), (14) e (17) permitem concluir que só existem três componentes de tensão distintas  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$  no estado plano. Assim a Figura 7 pode ser transformada na Figura 8. Muitas vezes a Figura 8 é ainda simplificada, identificando as componentes distintas apenas uma vez, como na Figura 9. Note, também que as conclusões aqui obtidas independem das forças de campo  $X$  e  $Y$ , pois elas desapareceram no processo de limite.

Repare, agora, no sentido das tensões de cisalhamento na Figura 9: este é o sentido positivo. Se o sentido da tensão de cisalhamento for alterado em uma das faces, obrigatoriamente será alterado nas outras.



**Figura 8 – Estado Plano de Tensão**



**Figura 9 – Estado Plano de Tensão.**

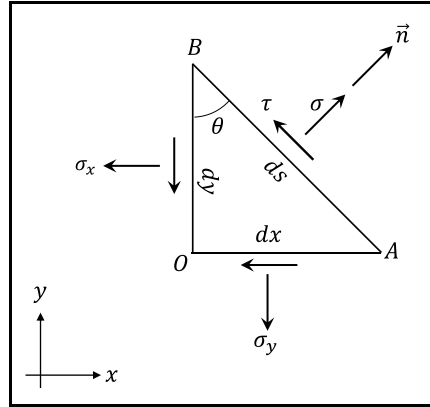
Vamos estudar, agora, o que acontece em um plano que está inclinado em relação aos eixos  $x$  e  $y$ . Para isso, em vez de retirar do corpo um elemento cúbico, vamos retirar um elemento na forma de um prisma triangular como na Figura 10, onde a face  $AB$  está inclinada de um ângulo  $\theta$  em relação ao plano vertical. A direção da face  $AB$  será indicada pelo seu vetor normal  $\vec{n}$ . A face  $AB$  estará sujeita a uma tensão normal  $\sigma$  e a uma tensão de cisalhamento  $\tau$ . Estas tensões podem ser calculadas a partir de  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$  montando as equações de equilíbrio do prisma. Note que na Figura 10 não foram consideradas forças de campo porque já sabemos que elas vão desaparecer no processo de limite.

Na direção  $x$  teremos, já simplificando a dimensão  $dz$ :

$$-\sigma_x dy - \tau_{xy} dx - \tau \operatorname{sen} \theta ds + \sigma \cos \theta ds = 0 \quad (18)$$

e na direção  $y$ :

$$-\tau_{xy}dy - \sigma_y dx + \tau \cos \theta ds + \sigma \sin \theta ds = 0 \quad . \quad (19)$$



**Figura 10 – Estado de tensão em um plano inclinado.**

Como:

$$dx = ds \sin \theta \quad (20)$$

e

$$dy = ds \cos \theta \quad , \quad (21)$$

a equação (18) pode ser reescrita como:

$$-\sigma_x \cos \theta - \tau_{xy} \sin \theta - \tau \sin \theta + \sigma \cos \theta = 0 \quad (22)$$

e a equação (19) como:

$$-\tau_{xy} \cos \theta - \sigma_y \sin \theta + \tau \cos \theta + \sigma \sin \theta = 0 \quad . \quad (23)$$

Multiplicando (22) por  $\cos \theta$  e somando com (23) multiplicada por  $\sin \theta$  chegamos à expressão que fornece o valor da tensão normal em função do ângulo  $\theta$ :

$$\sigma(\theta) = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad (24)$$

e multiplicando (22) por  $-\sin \theta$  e somando com (23) multiplicada por  $\cos \theta$  chegamos à expressão que fornece o valor da tensão de cisalhamento em função de  $\theta$ :

$$\tau(\theta) = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad . \quad (25)$$

## 5 Tensor das Tensões

Consideremos, agora, um estado completo de tensões. Olhando a Figura 5 e a Figura 6 verificamos que, para representar as tensões em todas as faces de um elemento cúbico em torno de um ponto  $P$  de um corpo, precisaríamos de dezoito componentes de tensão:  $\sigma_x, \sigma'_x, \sigma_y, \sigma'_y, \sigma_z, \sigma'_z, \tau_{xy}, \tau'_{xy}, \tau_{xz}, \tau'_{xz}, \tau_{yx}, \tau'_{yx}, \tau_{yz}, \tau'_{yz}, \tau_{zx}, \tau'_{zx}, \tau_{zy}$  e  $\tau'_{zy}$ . Mas o estudo do equilíbrio das forças que atuam sobre um elemento cúbico, aliado a um processo de limite como que foi feito para o estado duplo no item anterior, permite concluir que muitas dessas componentes são iguais. Assim:

$$\sigma'_x = \sigma_x \quad , \quad (26)$$

$$\sigma'_y = \sigma_y \quad , \quad (27)$$

$$\sigma'_z = \sigma_z \quad , \quad (28)$$

$$\tau'_{xy} = \tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau'_{yx} \quad , \quad (29)$$

$$\tau'_{xz} = \tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau'_{zx} \quad , \quad (30)$$

e

$$\tau'_{yz} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = \tau'_{zy} \quad . \quad (31)$$

Ou, seja, das dezoito componentes iniciais apenas seis são valores distintos. Usaremos apenas  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$ .

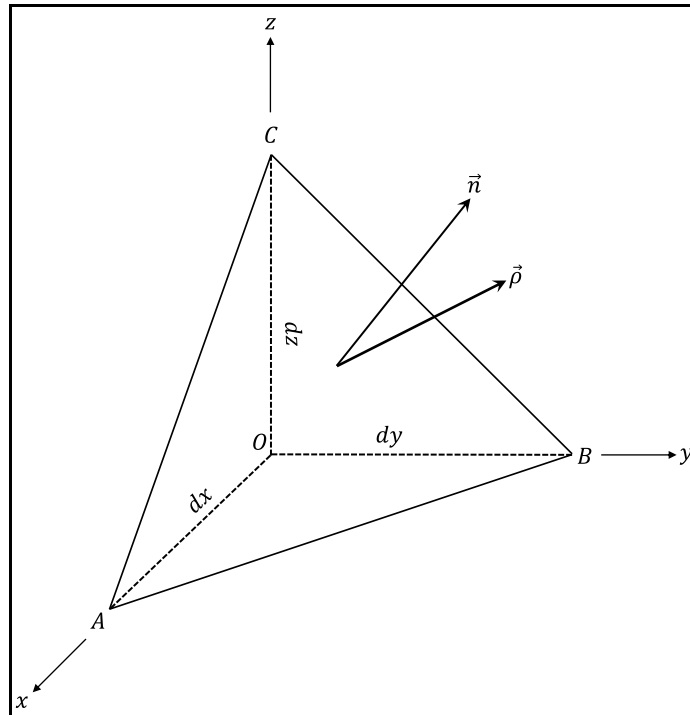
Vamos, agora, estudar as tensões em um plano inclinado em relação aos eixos, assim como fizemos no estado plano. Para isso vamos considerar um tetraedro retangular de dimensões infinitesimais que contém o ponto  $P$ , como está indicado na Figura 11. Nessa figura,  $\vec{\rho}$  é o vetor tensão aplicada à face  $ABC$  e que pode ser descrito por suas coordenadas cartesianas:

$$\vec{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \end{pmatrix} \quad . \quad (32)$$

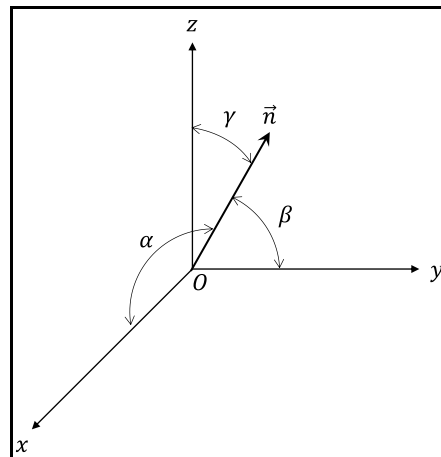
O versor  $\vec{n}$  é o versor normal à face  $ABC$  e que também pode ser descrito por suas coordenadas cartesianas:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{pmatrix} \quad , \quad (33)$$

onde  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  são os ângulos que o versor normal forma, respectivamente, com os eixos  $x, y$  e  $z$ , conforme a Figura 12.



**Figura 11 – Tetraedro infinitesimal em torno de P.**

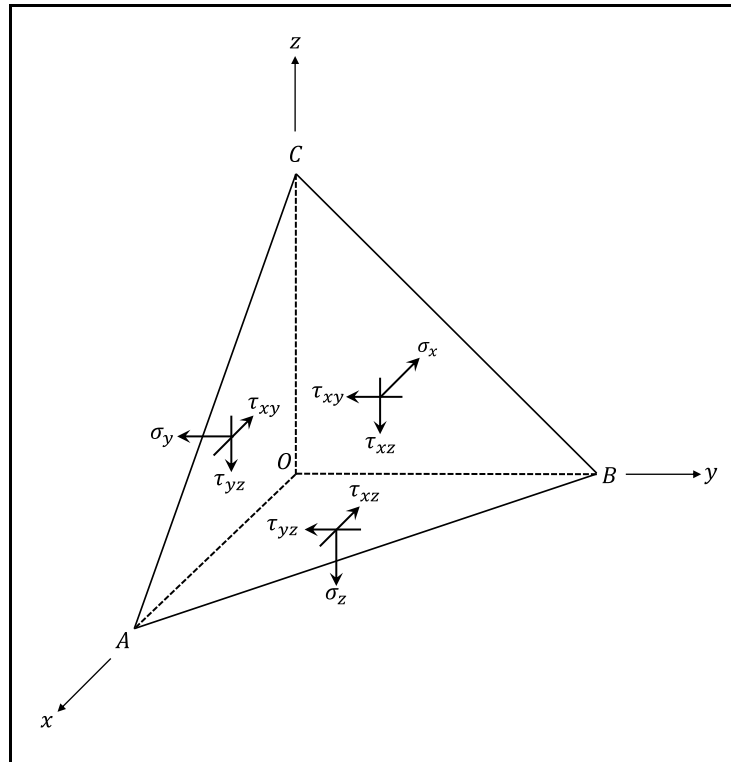


**Figura 12 – Ângulos que o versor normal forma com os eixos.**

Para calcular o vetor  $\vec{\rho}$  vamos considerar o equilíbrio do tetraedro. Na Figura 13 estão identificadas as componentes de tensão que atuam nas faces  $OAC$ ,  $OBC$  e  $OAB$ . As componentes de força que estão aplicadas a essas faces são as componentes de tensão multiplicadas pelas respectivas áreas. Sejam:

- $dS$  - área da face  $ABC$
- $dS_x$  - área da face  $OBC$
- $dS_y$  - área da face  $OAC$

- $dS_z$  – a área da face OAB.



**Figura 13 – Componentes de tensão nas faces.**

O equilíbrio de todas as forças aplicadas ao tetraedro na direção  $x$  fornece a equação:

$$\rho_x dS - \sigma_x dS_x - \tau_{xy} dS_y - \tau_{xz} dS_z = 0 \quad . \quad (34)$$

Mas

$$dS_x = dS \cos \alpha = n_x dS$$

$$dS_y = dS \cos \beta = n_y dS \quad (35)$$

$$dS_z = dS \cos \gamma = n_z dS \quad .$$

Então:

$$\rho_x = \sigma_x \cos \alpha + \tau_{yx} \cos \beta + \tau_{zx} \cos \gamma \quad . \quad (36)$$

De forma análoga, podemos montar as equações de equilíbrio na direção  $y$ :

$$\rho_y = \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{zy} n_z \quad (37)$$

e na direção  $z$ :

$$\rho_z = \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z \quad . \quad (38)$$

As equações (36), (37) e (38) podem ser agrupadas na forma matricial, levando em conta (29) a (31),

$$\begin{Bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} \quad (39)$$

Usando esta expressão, dado o valor da normal  $\vec{n}$  que mede a inclinação do plano em relação ao sistema de eixos cartesianos, podemos calcular o vetor tensão  $\vec{\rho}$ .

Mas que tipo de grandeza é, então, a tensão que atua em um ponto  $P$  de um corpo? Não é uma grandeza escalar, como a temperatura, que é medida apenas por um número real. Também não é um vetor, como a velocidade ou a aceleração, que são medidas por três números reais, as suas componentes em um sistema cartesiano.

A tensão em um ponto  $P$  é uma grandeza conhecida como *tensor*. Para representá-la é necessária uma matriz quadrada de ordem três. Vamos representar o tensor das tensões pela matriz:

$$[T] = [T]^t = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (40)$$

Em uma notação mais compacta (*notação tensorial*) podemos colocar a expressão (39) na forma:

$$\vec{\rho} = T[\vec{n}] \quad (41)$$

Que pode ser lida como: *a tensão  $\vec{\rho}$  é o tensor  $T$  aplicado a  $\vec{n}$* . Mas é só uma notação. A expressão (41) equivale à operação indicada em (39).

Lembrando de (4) e usando (41), podemos escrever a tensão normal no plano de normal  $\vec{n}$  como:

$$\sigma = T[\vec{n}] \cdot \vec{n} \quad (42)$$

que corresponde à operação algébrica:

$$\sigma = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} \quad (43)$$

Conhecida a tensão normal  $\sigma$  podemos calcular a tensão de cisalhamento  $\tau$ . De (4):

$$\rho^2 = \sigma^2 + \tau^2 \quad (44)$$

e, portanto,

$$\tau = \sqrt{\rho^2 - \sigma^2} \quad (45)$$



Enquanto o sinal da tensão normal é muito importante, porque muitos materiais têm comportamento diferentes quando submetidos a tensões de tração ou tensões de compressão, o sinal da tensão de cisalhamento não desempenha um papel fundamental.

A expressão tensorial (42) ou sua contrapartida matricial (43) são absolutamente gerais, valem para qualquer caso. Em particular, podemos aplicá-la ao estado plano de tensão contemplado no item anterior.

Voltado à figura Figura 10, a normal  $\vec{n}$ , no estado plano representado, pode ser escrita como:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \text{sen } \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (46)$$

e, portanto, de (39) ou (41):

$$\vec{\rho} = T[\vec{n}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \text{sen } \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (47)$$

e, portanto,

$$\vec{\rho} = \begin{pmatrix} \sigma_x \cos \theta + \tau_{xy} \text{sen } \theta \\ \tau_{xy} \cos \theta + \sigma_y \text{sen } \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (48)$$

Usando (48) em (42):

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x \cos \theta + \tau_{xy} \text{sen } \theta \\ \tau_{xy} \cos \theta + \sigma_y \text{sen } \theta \\ 0 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \text{sen } \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (49)$$

e, então,

$$\sigma(\theta) = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \text{sen}^2 \theta + 2\tau_{xy} \text{sen } \theta \cos \theta \quad , \quad (50)$$

que é exatamente igual a (24).

## 6 Tensões Principais

Um plano é chamado de *plano principal de tensão* se a tensão de cisalhamento neste plano é **nula**. A direção da normal a um plano principal de tensão é chamada de *direção principal de tensão* e a tensão normal que atua em um plano principal é chamada de *tensão principal*. No próximo item veremos por que as tensões principais são importantes, neste item aprenderemos a calcular as tensões e as direções principais de tensão.

Se a tensão de cisalhamento em um plano é nula, então, de (4)

$$\vec{\rho} = \sigma \vec{n} \quad (51)$$

ou

$$\vec{\rho} - \sigma \vec{n} = \vec{0} \quad (52)$$

ou, ainda, de (39),

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} - \sigma \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (53)$$

ou, finalmente,

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (54)$$

que é um sistema de três equações a três incógnitas  $n_x$ ,  $n_y$  e  $n_z$ .

O sistema linear de equações (54) obviamente tem uma solução trivial,

$$n_x = n_y = n_z = 0, \quad (55)$$

mas esta solução não tem significado físico pois, como  $\vec{n}$  é um versor, então, obrigatoriamente,

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1. \quad (56)$$

Então o sistema (54) tem que admitir mais de uma solução. Mas, para que um sistema de equações algébricas lineares como esse admita mais de uma solução, é necessário que o determinante de sua matriz seja nulo, ou seja,

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0. \quad (57)$$

Buscam-se então, quais são os valores de  $\sigma$  para que isso aconteça.

O determinante (57) pode ser expandido algebricamente, resultando na equação polinomial de terceiro grau, conhecida como equação característica:

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \quad , \quad (58)$$

onde

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad , \quad (59)$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} \quad (60)$$

e

$$I_3 = |T| \quad . \quad (61)$$

Como a matriz  $[T]$  é simétrica, prova-se, na Álgebra Linear, que a equação característica (58) admite sempre três raízes reais  $\sigma_1, \sigma_2$  e  $\sigma_3$ . Essas raízes não são necessariamente distintas e podem ser negativas, nulas ou positivas. Elas são as tensões principais, que foram definidas anteriormente, que correspondem às tensões normais que atuam nos planos em que as tensões de cisalhamento são nulas e agora sabemos que são apenas três.

Convencionou-se a seguinte ordem para as tensões principais:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad (62)$$

e esta convenção não é opcional, é obrigatória, deve ser sempre seguida porque é universal. Assim  $\sigma_1$  será sempre a maior tensão principal em valor algébrico e  $\sigma_3$  será sempre a menor delas.

Falta, agora, calcular as direções principais, que serão três, cada uma delas correspondente a uma das tensões principais. Vamos batizar as direções principais de  $\vec{n}_1, \vec{n}_2$  e  $\vec{n}_3$ , correspondendo, na ordem, a  $\sigma_1, \sigma_2$  e  $\sigma_3$ .

Vamos determinar  $\vec{n}_1$ . Sejam  $\bar{n}_x, \bar{n}_y$  e  $\bar{n}_z$  as suas componentes, isto é,

$$\vec{n}_1 = \begin{Bmatrix} \bar{n}_x \\ \bar{n}_y \\ \bar{n}_z \end{Bmatrix} \quad (63)$$

Para calculá-las temos que substituir  $\sigma$  por  $\sigma_1$  e  $\vec{n}$  por  $\vec{n}_1$  na expressão (54) :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_1 & \tau_{yx} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_1 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{n}_x \\ \bar{n}_y \\ \bar{n}_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (64)$$

e resolver esse sistema. Mas note que o determinante da matriz é nulo, porque nós mesmo impusemos. Então o sistema é indeterminado. Para resolvê-lo temos que

---

considerar apenas duas das equações que sejam independentes e adicionar uma terceira que é a condição que impõe módulo unitário ao versor  $\vec{n}_1$ :

$$\vec{n}_x^2 + \vec{n}_y^2 + \vec{n}_z^2 = 1 \quad , \quad (65)$$

e completa o sistema de três equações.

As direções principais  $\vec{n}_2$  e  $\vec{n}_3$  são determinadas de forma análoga.

Se você se lembrar da Álgebra Linear, você deve ter percebido que acabamos de resolver um problema de autovalores e autovetores: as tensões principais são os autovalores da matriz  $[T]$  e as direções principais são os seus autovetores e, como  $[T]$  é simétrica, os seus autovetores são ortogonais entre si, ou seja,

$$\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \perp \vec{n}_3 \quad . \quad (66)$$

Esta propriedade pode ser usada no cálculo das direções principais. Por exemplo, se  $\vec{n}_1$  e  $\vec{n}_2$  forem conhecidas, podemos calcular  $\vec{n}_3$  pelo produto vetorial:

$$\vec{n}_3 = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 \quad . \quad (67)$$

Note, também, que definimos direções principais e não sentidos principais. Então se  $\vec{n}_1$  representa uma direção principal, então  $-\vec{n}_1$  representa a mesma direção principal, ou seja, a ordem dos fatores no produto vetorial (67) não importa.

Uma outra propriedade importante, que pode ser mostrada com o uso de alguma álgebra é que os coeficientes  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  da equação característica (58) são invariantes em relação ao sistema de eixos cartesianos que foi usado. Ou seja, se tomarmos um elemento cúbico em torno do ponto  $P$  com outra orientação, ou seja, com outro sistema cartesiano, as componentes de tensão e, conseqüentemente, a matriz  $[T]$  podem ser diferentes, mas, a equação característica será a mesma, as tensões principais serão as mesmas e as direções principais também serão as mesmas.

## 7 Círculos de Mohr

Como vimos no capítulo 5, podemos calcular o vetor tensão  $\vec{\rho}$  para qualquer direção em torno de um ponto  $P$  usando (41). Mais quais serão as tensões normais máxima e mínima em  $P$ ? Qual será a tensão de cisalhamento máxima? Para cada valor de  $\vec{n}$  temos um par  $(\sigma, \tau)$ . Será que temos que calcular o vetor tensão para todas as direções  $\vec{n}$ , para determinar os valores máximos e mínimos das tensões normais e de cisalhamento? Para responder a essas perguntas, vamos determinar qual é o lugar geométrico de todos os pares  $(\sigma, \tau)$  possíveis.

A Figura 14 traz um elemento cúbico orientado com as direções principais, de forma que os eixos  $x, y$  e  $z$  têm, respectivamente, as direções de  $\vec{n}_1, \vec{n}_2$  e  $\vec{n}_3$ . Com essa orientação, as faces do elemento são planos principais e não haverá tensão de cisalhamento em nenhuma delas.

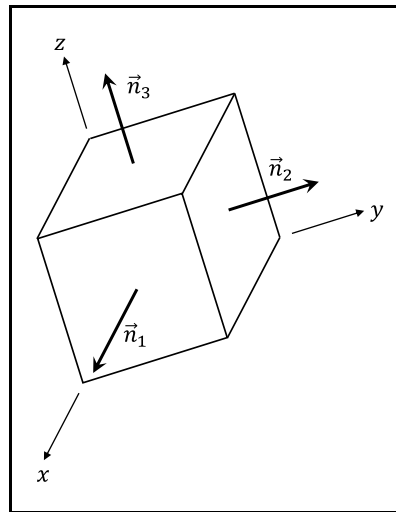


Figura 14 – Elemento cúbico orientado segundo as direções principais.

Nessa condição, a matriz  $[T]$  que representa o tensor das tensões será diagonal:

$$[T] = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (68)$$

e a tensão  $\vec{\rho}$ , para uma dada direção  $\vec{n}$  será:

$$\vec{\rho} = \begin{Bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 n_x \\ \sigma_2 n_y \\ \sigma_3 n_z \end{Bmatrix} \quad (69)$$

Então a tensão normal  $\sigma$  poderá ser escrita como:

$$\sigma = \vec{\rho} \cdot \vec{n} = \sigma_1 n_x^2 + \sigma_2 n_y^2 + \sigma_3 n_z^2 \quad . \quad (70)$$

Por outro lado, como

$$\rho^2 = \sigma^2 + \tau^2 \quad , \quad (71)$$

então, usando (69),

$$\sigma_1^2 n_x^2 + \sigma_2^2 n_y^2 + \sigma_3^2 n_z^2 = \sigma^2 + \tau^2 \quad . \quad (72)$$

Por outro, lado, como  $\vec{n}$  é um versor,

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 \quad . \quad (73)$$

As equações (70), (72) e (73) podem ser agrupadas no sistema de equações algébricas:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x^2 \\ n_y^2 \\ n_z^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma \\ \sigma^2 + \tau^2 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad , \quad (74)$$

onde as incógnitas são  $n_x^2$ ,  $n_y^2$  e  $n_z^2$  que, obviamente, tem que ser positivas. Ou seja, dado o par  $(\sigma, \tau)$ , o sistema permite calcular a qual normal  $\vec{n}$  ele corresponde. Para resolver esse sistema vamos supor que as tensões normais são distintas, ou seja, que

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \quad . \quad (75)$$

Podemos fazer essa hipótese sem perder a generalidade, porque analisaremos mais tarde os casos em que há tensões principais repetidas. Colocada esta hipótese, podemos resolver (74), obtendo:

$$n_x^2 = \frac{(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) + \tau^2}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} \geq 0 \quad , \quad (76)$$

$$n_y^2 = \frac{(\sigma - \sigma_3)(\sigma - \sigma_1) + \tau^2}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)} \geq 0 \quad (77)$$

e

$$n_z^2 = \frac{(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2) + \tau^2}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)} \geq 0 \quad . \quad (78)$$

Em virtude de (75), o denominador de (76) é positivo, então o seu numerador também tem que ser positivo ou nulo, ou seja,

$$(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) + \tau^2 \geq 0 \quad . \quad (79)$$

Também em virtude de (75), o denominador de (77) é negativo, então o seu numerador tem que ser negativo ou nulo, ou seja,

$$(\sigma - \sigma_3)(\sigma - \sigma_1) + \tau^2 \leq 0 \quad . \quad (80)$$

Por último, em virtude de (75), o denominador de (78) é positivo, então o seu numerador deve ser positivo ou nulo, ou seja,

$$(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2) + \tau^2 \geq 0 \quad . \quad (81)$$

As expressões (79), (80) e (81), após transformações algébricas, podem ser rescritas, respectivamente, como:

$$\left[ \sigma - \left( \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right) \right]^2 + \tau^2 \geq \left( \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2 \quad , \quad (82)$$

$$\left[ \sigma - \left( \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right) \right]^2 + \tau^2 \leq \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \right)^2 \quad (83)$$

e

$$\left[ \sigma - \left( \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right) \right]^2 + \tau^2 \geq \left( \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2 \quad , \quad (84)$$

facilitando a sua interpretação geométrica. Assim a expressão (82) é a equação da região externa ao círculo de centro

$$C_1 = \left( \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, 0 \right) \quad (85)$$

e raio

$$R_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \quad , \quad (86)$$

incluindo a sua borda. A expressão (83) é a equação do círculo de centro

$$C_2 = \left( \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, 0 \right) \quad (87)$$

e raio

$$R_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad , \quad (88)$$

incluindo a sua borda e a expressão (84) é a equação da região externa ao círculo de centro

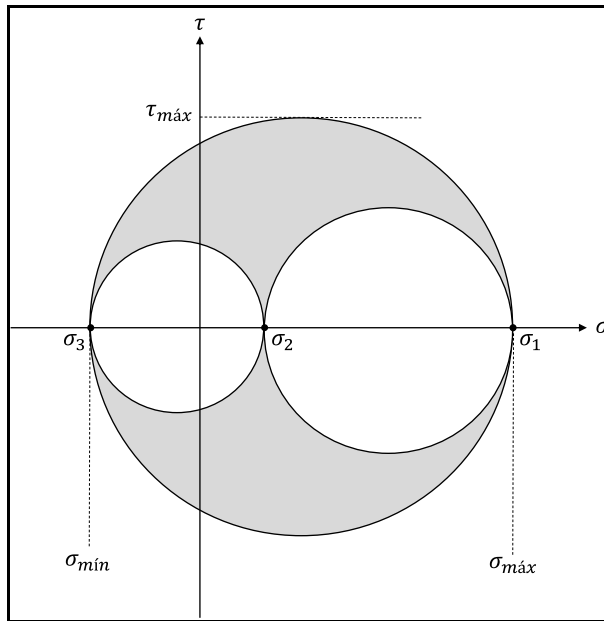
$$C_3 = \left( \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0 \right) \quad (89)$$

e raio

$$R_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad , \quad (90)$$

incluindo a sua borda.

O lugar geométrico dos pares  $(\sigma, \tau)$  tem que obedecer, simultaneamente, às inequações (82), (83) e (84). Este lugar geométrico está representado na Figura 15. E forma os chamados *Círculos de Mohr*. Nessa figura, a região cinza corresponde aos pares  $(\sigma, \tau)$  possíveis em um determinado ponto  $P$  da estrutura. Cada ponto dessa região corresponde a uma certa direção  $\vec{n}$ . Note que os sinais das tensões principais nela desenhadas são totalmente arbitrários. Todas as tensões principais podem ser negativas, nulas ou positivas.



**Figura 15 – Círculos de Mohr.**

Os Círculos de Mohr permitem calcular os valores limite da tensão normal e da tensão de cisalhamento. Podemos concluir, diretamente da Figura 15 que o maior valor da tensão normal é  $\sigma_1$  e que o menor valor da tensão normal é  $\sigma_3$ . O valor máximo da tensão de cisalhamento corresponde ao raio da circunferência mais externa, ou seja,

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad . \quad (91)$$

Note que os Círculos de Mohr não permitem determinar, diretamente, a qual valor de  $\vec{n}$  corresponde um determinado ponto  $(\sigma, \tau)$  mas, para determinar esse valor podem ser usadas as expressões (76) a (78). Mas as circunferências que delimitam o lugar geométrico da Figura 15 têm uma interpretação geométrica simples. Assim, a circunferência de centro  $C_1$  e raio  $R_1$  corresponde a  $n_x$  igual a zero na base  $(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)$ , ou seja, a todos os versores  $\vec{n}$  que são ortogonais a  $\vec{n}_1$  (lembre que a inequação (82) veio da inequação (76)). Da mesma forma, a circunferência de centro  $C_2$  e raio  $R_2$  corresponde aos versores  $\vec{n}$  que são ortogonais ao versor  $\vec{n}_2$  e a circunferência de centro  $C_3$  e raio  $R_3$ , aos versores que são ortogonais a  $\vec{n}_3$ .



Também os Círculos de Mohr permitem concluir que a tensão de cisalhamento máxima corresponde a um valor de tensão normal no centro do círculo externo, ou seja,

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \quad (92)$$

Substituindo esse último valor, juntamente, com o valor da tensão de cisalhamento máxima, que aparece em (91), nas expressões (76), (77) e (78), conclui-se que o valor máximo da tensão de cisalhamento, em módulo, ocorre para:

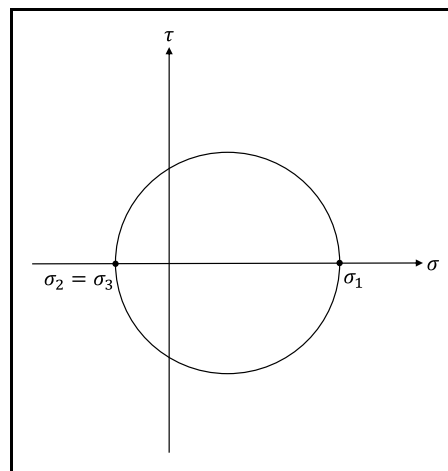
$$\vec{n} = \left( \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \quad (93)$$

na base  $(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)$ . Ou seja, ocorre para direções de  $\vec{n}$  que estejam a  $45^\circ$  simultaneamente das direções de  $\vec{n}_1$  e  $\vec{n}_3$ .

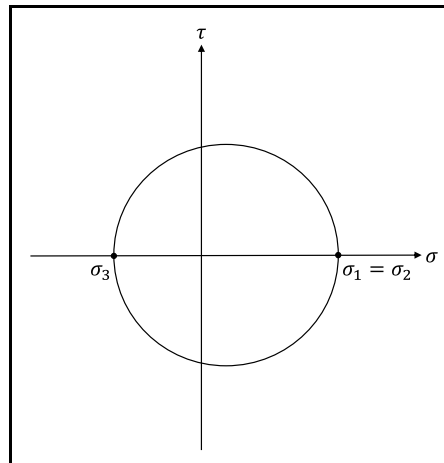
Para deduzir os Círculos de Mohr, fizemos a hipótese de que as três tensões principais eram distintas (ver (75)). Vamos retirar essa hipótese, considerando que pode haver tensões principais iguais. Três casos podem ocorrer:

- i)  $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$
- ii)  $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$
- iii)  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$

Nos dois primeiros casos existe uma tensão principal repetida. Este caso é conhecido como *estado duplo de tensão*. No terceiro caso, todas as tensões principais são iguais: é o *estado hidrostático de tensão*. Para determinar o que acontece nesses casos, basta aplicar um processo de limite aos Círculos de Mohr da Figura 15. Assim, para o caso i façamos  $\sigma_3 \rightarrow \sigma_2$  e obteremos a circunferência da Figura 16 e para o caso ii é só fazer  $\sigma_1 \rightarrow \sigma_2$  para obter a circunferência da Figura 17. Ou seja, no estado duplo de tensão os Círculos de Mohr degeneram-se em uma circunferência.

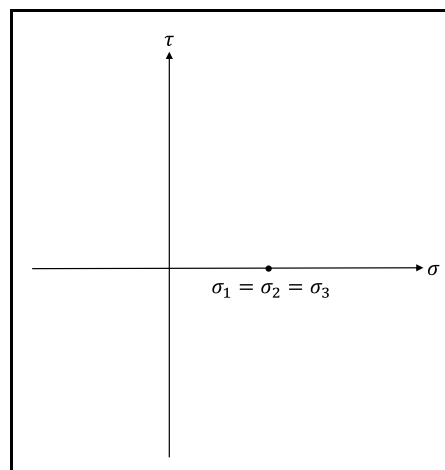


**Figura 16 – Círculo de Mohr para  $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ .**



**Figura 17 – Círculo de Mohr para  $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$ .**

Finalmente, para o caso iii, estado hidrostático, os Círculos de Mohr degeneram-se em um único ponto, como na Figura 18. Note que, para o estado hidrostático, não existe tensão de cisalhamento para nenhuma direção.



**Figura 18 – Círculo de Mohr para o estado hidrostático.**

## 8 Círculos de Mohr – Estado Plano

Vamos voltar ao estado de tensão que estudamos no Capítulo 4, o estado plano representado na Figura 8. Como não há tensão de cisalhamento no plano ortogonal a  $z$ , esse plano é um plano principal de tensão e a direção  $z$  é uma direção principal. Então os versores normais que são paralelos ao plano  $xy$  são ortogonais a uma das direções principais, ou seja, os pares  $(\sigma, \tau)$  correspondentes a esse estado plano podem ser representados por uma circunferência, conforme vimos no capítulo anterior. Suponhamos, por exemplo, que a direção  $z$  corresponda à direção principal  $\vec{n}_3$ . Nesse caso, o estado plano de tensão estará representado pela circunferência da Figura 19.

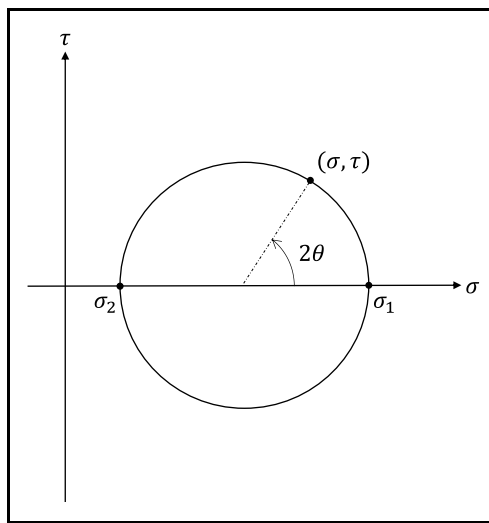


Figura 19 – Círculo de Mohr – estado plano.

Suponhamos que  $\theta$  seja o ângulo formado entre um versor qualquer  $\vec{n}$  paralelo ao plano  $xy$  e a direção principal  $\vec{n}_1$ . Então, usando (24), podemos escrever:

$$\sigma(\theta) = \sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_2 \sin^2 \theta \quad . \quad (94)$$

Usando as relações trigonométricas:

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \quad (95)$$

e

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \quad , \quad (96)$$

então:

$$\sigma(\theta) = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\theta \quad (97)$$

Por outro lado, de (25),

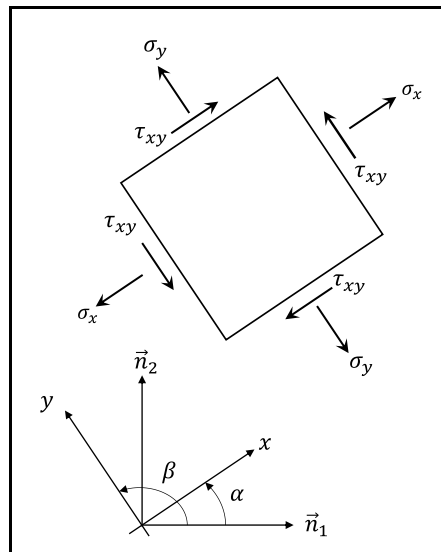
$$\tau(\theta) = -(\sigma_1 - \sigma_2) \sin \theta \cos \theta = -\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2} \sin 2\theta \quad (98)$$

Se trocarmos o sinal de (98), teremos

$$\tau(\theta) = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2} \sin 2\theta \quad (99)$$

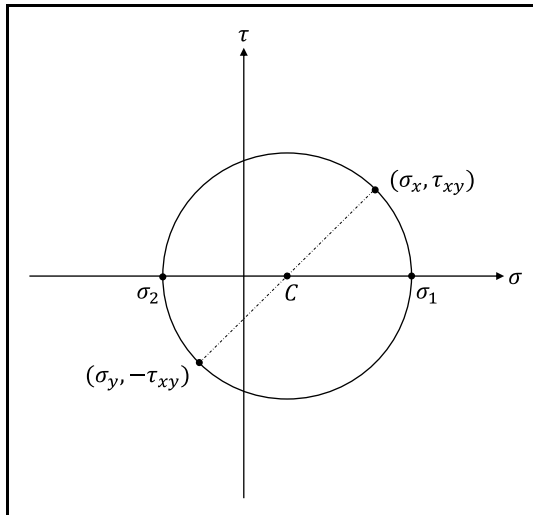
As expressões (97) e (99) são as equações da circunferência da Figura 19 parametrizada no ângulo  $\theta$ . A troca de sinal foi necessária, uma vez que os Círculo de Mohr no estado plano as tensões de cisalhamento não obedecem à notação de Timoshenko. No Círculo de Mohr, a tensão de cisalhamento será positiva se tiver o sentido horário e negativa se tiver o sentido anti-horário.

Vamos considerar o estado de plano de tensão representado na Figura 20, onde o eixo  $x$  forma um ângulo  $\alpha$  com  $\vec{n}_1$  e o eixo  $y$  forma um ângulo  $\beta = \alpha + 90^\circ$  com a mesma direção. Então, os pontos  $(\sigma_x, \tau_{xy})$  e  $(\sigma_y, -\tau_{xy})$  são diametralmente opostos no Círculo de Mohr.



**Figura 20 – Elemento de tensão – estado plano**

Dáí surge o *Método Gráfico* para desenhar o Círculo de Mohr no estado plano. Conhecidos  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$ , basta plotar os pares  $(\sigma_x, \tau_{xy})$  e  $(\sigma_y, -\tau_{xy})$  e unir esses dois pontos para definir o centro  $C$  e o raio  $R$  do Círculo de Mohr, conforme a Figura 21. Este é o chamado *Método Gráfico* para construir o Círculo de Mohr.



**Figura 21 – Círculo de Mohr – método gráfico.**

---

## 9 Vasos de Pressão de Parede Fina

Como uma aplicação do estudo das tensões, vamos estudar neste capítulo os *Vasos de Pressão de Parede Fina*. Vasos de pressão são recipientes projetados para armazenar ou transportar fluidos (líquidos ou gases) sob pressão. À nossa volta, podemos observar vários exemplos de vasos de pressão: botijões de gás, cilindros de oxigênio, cabines de aeronaves, corpos de submarinos, tubulações etc. Os vasos de pressão normalmente são esféricos ou cilíndricos. Os vasos de pressão esféricos podem resistir a pressões mais altas. A forma esférica é a forma “natural” de um vaso de pressão, veja, por exemplo, uma bola de sabão. Mas os vasos cilíndricos acabam sendo mais práticos para muitas aplicações porque são mais fáceis de transportar e armazenar.

Um vaso de pressão é dito *de parede fina* quando a espessura  $t$  de sua parede é muito menor que o seu raio  $r$ . Usualmente dizemos que um vaso é de parede fina quando

$$\frac{r}{t} > 10 \quad (100)$$

Para estudar o estado de tensão em vasos de pressão de parede fina podem ser usados modelos aproximados em que a espessura  $t$  é desprezada face ao raio  $r$ . Se  $r_{ext}$  for o raio externo do vaso,  $r_{méd}$  for o seu raio médio e  $r_{int}$  o seu raio interno, esses modelos consideram que todos esses valores são aproximadamente iguais, ou seja,

$$r_{ext} \cong r_{méd} \cong r_{int} = r \quad (101)$$

e, por isso, vamos utilizar unicamente a letra  $r$  para representar o raio do vaso de pressão.

Devemos notar que a teoria a ser aqui apresentada não serve para representar as tensões que ocorrem em pontos de singularidade dos vasos de pressão, como na proximidade de orifícios e válvulas, onde a concentração de tensões requer modelos mais sofisticados para a sua análise.

### 9.1 Vasos de Pressão Esféricos de Parede Fina

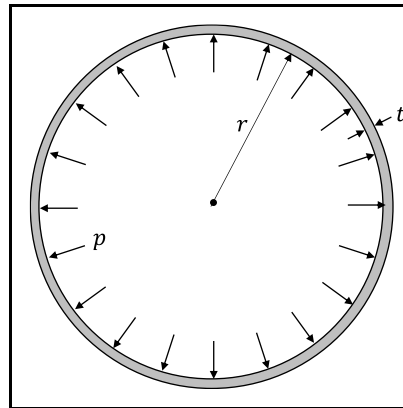
A Figura 22 apresenta um esquema de um vaso de pressão esférico de raio  $r$  e espessura  $t$  submetido a uma pressão  $p$ . Entenda-se, aqui, a pressão  $p$  como a diferença entre a pressão interna e a pressão externa.

Façamos um corte diametral no vaso de pressão, que contém o fluido em seu interior, resultando na Figura 23. Sobre toda a área do corte atua a pressão  $p$ . Sobre a parede do vaso atuam tensões de tração  $\sigma_m$  cuja resultante deve equilibrar a resultante  $P$  da pressão. Pela simetria do problema, podemos concluir que a tensão  $\sigma_m$  é constante ao longo da circunferência. O modelo de parede fina assume, como hipótese, que  $\sigma_m$

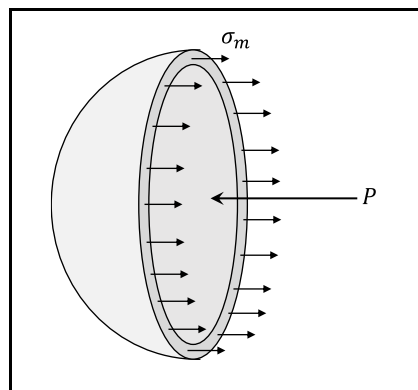
também é constante ao longo da espessura. A tensão  $\sigma_m$  assim definida é conhecida como *tensão de membrana*.

Da Figura 23 a resultante das forças de pressão  $P$  é

$$P = \pi r^2 p \quad (102)$$



**Figura 22 – Vaso de pressão esférico.**



**Figura 23 – Corte diametral do vaso esférico.**

e a resultante das tensões de membrana é

$$R = 2\pi r t \sigma_m \quad (103)$$

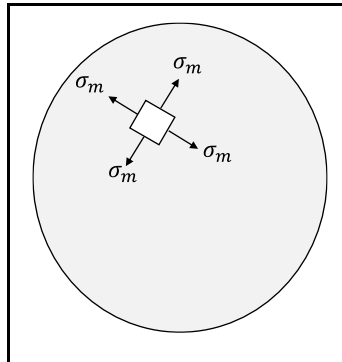
O equilíbrio impõe que:

$$R = P \quad (104)$$

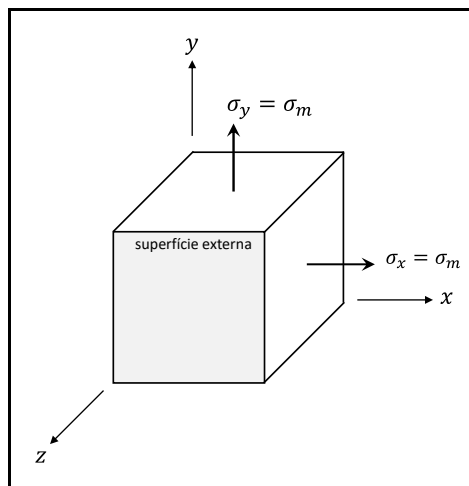
e, portanto, de (102) e (103),

$$\sigma_m = \frac{pr}{2t} \quad (105)$$

Note que, dada a simetria perfeita da esfera, o resultado obtido não depende do corte que foi efetuado. Assim, um elemento cúbico infinitesimal na superfície do vaso esférico terá a representação da Figura 24. Se esse elemento cúbico for retirado da superfície, teremos a representação da Figura 25.



**Figura 24 – Tensões na superfície do vaso esférico.**



**Figura 25 – Elemento cúbico retirado da superfície externa.**

Este elemento cúbico permite concluir, diretamente, que as tensões principais em qualquer ponto da superfície externa do vaso são:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_m = \frac{pr}{2t} \quad (106)$$

e

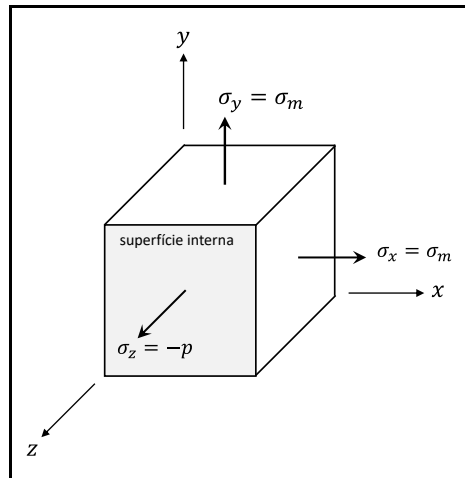
$$\sigma_3 = 0 \quad (107)$$

Assim, a tensão de cisalhamento máxima, em qualquer ponto da superfície é

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{\sigma_1}{2} = \frac{\sigma_m}{2} = \frac{pr}{4t} \quad (108)$$



Um elemento cúbico retirado da superfície interna do vaso está representado na Figura 26. A única diferença que aparece é a pressão  $p$  aplicada à face interna do vaso.



**Figura 26 – Elemento cúbico retirado da superfície interna.**

O elemento cúbico da face interna permite concluir, diretamente, que as tensões principais em qualquer ponto da superfície interna do vaso são:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_m = \frac{pr}{2t} \quad (109)$$

e

$$\sigma_3 = -p \quad (110)$$

Assim, a tensão de cisalhamento máxima, em qualquer ponto da superfície é

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{\sigma_1 + p}{2} = \frac{pr}{4t} + \frac{p}{2} = \frac{pr}{4t} \left(1 + \frac{2t}{r}\right) \quad (111)$$

Mas, o modelo de parede fina, despreza a espessura quando comparada com o raio e, assim,

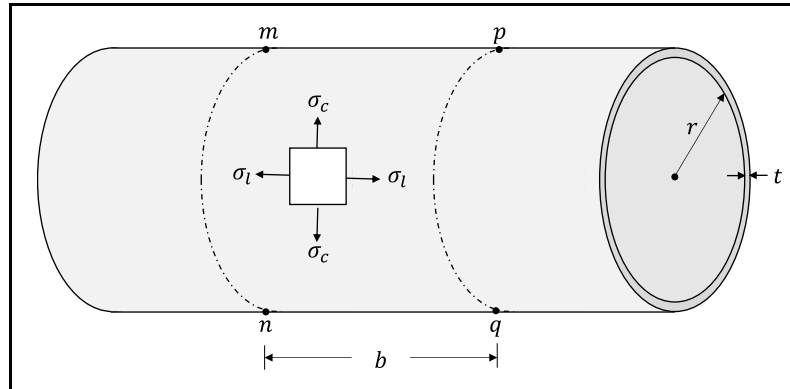
$$\tau_{m\acute{a}x} \cong \frac{pr}{4t} \quad (112)$$

Podemos, então, concluir que as tensões na superfície externa e na superfície interna são as mesmas.

## 9.2 Vasos de Pressão Cilíndricos de Parede Fina

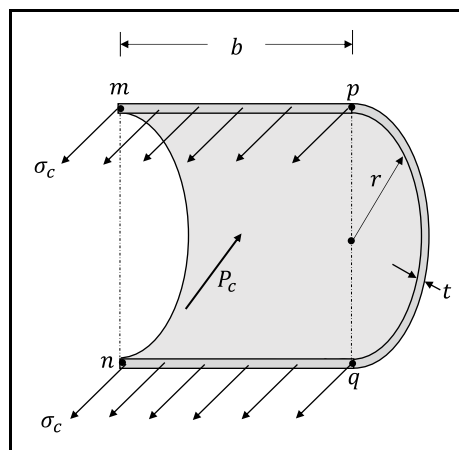
Um trecho de um vaso cilíndrico de parede fina está representado na Figura 27. Na sua superfície externa está representado um elemento de tensão com faces paralelas e perpendiculares ao eixo de simetria do cilindro. Note que agora não temos apenas um valor de tensão, como a tensão de membrana no vaso cilíndrico, mas dois, a

tensão circunferencial  $\sigma_c$  e a tensão longitudinal  $\sigma_l$ . Para calcular cada uma delas, faremos um corte diferente no vaso.



**Figura 27 – Vaso de pressão cilíndrico de parede fina.**

Primeiramente cortamos o trecho de vaso de comprimento  $b$  por um plano vertical que contém o eixo do cilindro, conforme a Figura 28. A tensão circunferencial  $\sigma_c$  é constante ao longo do comprimento do cilindro, por simetria. A hipótese de parede fina supõe, também, que ela seja constante ao longo da espessura da parede.



**Figura 28 – Corte por um plano vertical que contém o eixo do cilindro.**

Assim, a resultante da tensão circunferencial pode ser escrita como:

$$R_c = 2tb\sigma_c \quad (113)$$

e a resultante da pressão aplicado ao elemento como:

$$P_c = 2rbp \quad (114)$$

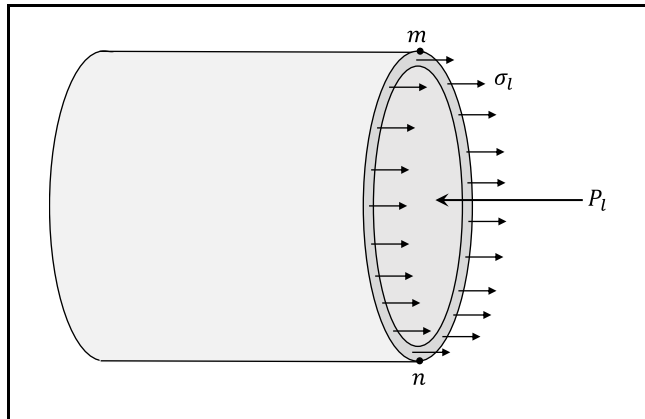
O equilíbrio impõe que:

$$R_c = P_c \quad (115)$$

e, portanto,

$$\sigma_c = \frac{pr}{t} \quad (116)$$

Para calcular a tensão longitudinal  $\sigma_l$  fazemos um corte por um plano vertical ortogonal ao eixo do cilindro, conforme a Figura 29. Por simetria, a tensão longitudinal é constante ao longo da circunferência e a hipótese de parede fina assume que ela seja constante ao longo da espessura.



**Figura 29 – Corte por um plano vertical ortogonal ao eixo do cilindro.**

Assim, a resultante das tensões longitudinais pode ser escrita como:

$$R_l = 2\pi r t \sigma_l \quad (117)$$

e a resultante da pressão, como,

$$P_l = \pi r^2 p \quad (118)$$

O equilíbrio impõe que:

$$R_l = P_l \quad (119)$$

e, portanto,

$$\sigma_l = \frac{pr}{2t} \quad (120)$$

Um elemento cúbico retirado da superfície externa do vaso de pressão está esquematizado na Figura 30. A partir desse elemento e das expressões (116) e (120) podemos calcular as tensões principais em um ponto qualquer da superfície externa do vaso de pressão:

$$\sigma_1 = \sigma_c = \frac{pr}{t} \quad (121)$$

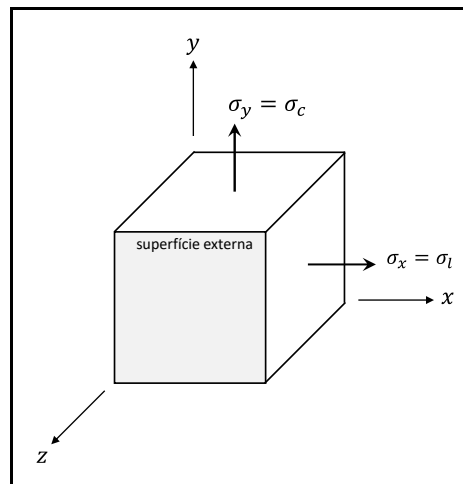
$$\sigma_2 = \sigma_l = \frac{pr}{2t} \quad (122)$$

e

$$\sigma_3 = 0 \quad (123)$$

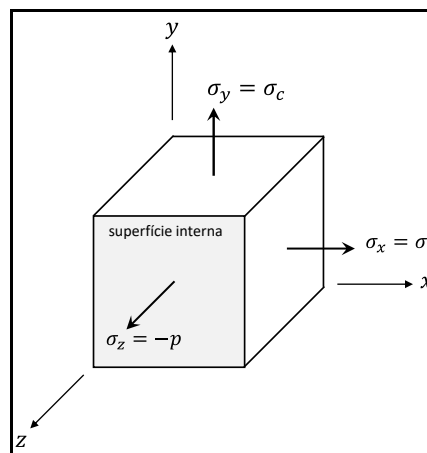
Assim, a tensão de cisalhamento máxima, em qualquer ponto da superfície externa é

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{pr}{2t} \quad (124)$$



**Figura 30 – Elemento cúbico retirado da superfície externa.**

Um elemento cúbico retirado da superfície interna do vaso está representado na Figura 31. A única diferença que aparece é a pressão  $p$  aplicada à face interna do vaso.



**Figura 31 – Elemento cúbico retirado da superfície interna.**

O elemento cúbico da face interna permite concluir, diretamente, que as tensões principais em qualquer ponto da superfície interna do vaso são:

---

$$\sigma_1 = \sigma_c = \frac{pr}{t} \quad , \quad (125)$$

$$\sigma_2 = \sigma_l = \frac{pr}{2t} \quad (126)$$

e

$$\sigma_3 = -p \quad . \quad (127)$$

Assim, a tensão de cisalhamento máxima, em qualquer ponto da superfície externa é

$$\tau_{máx} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{pr}{2t} + \frac{p}{2} = \frac{pr}{2t} \left(1 + \frac{t}{r}\right) \quad . \quad (128)$$

Mas, o modelo de parede fina, despreza a espessura quando comparada com o raio e, assim,

$$\tau_{máx} \cong \frac{pr}{2t} \quad . \quad (129)$$

Podemos, então, concluir que as tensões na superfície externa e na superfície interna são as mesmas.

---

## 10 Critérios de Resistência

*Critério de Resistência* ou *Critério de Falha* é uma função matemática que visa a quantificar se um determinado material resiste aos esforços aplicados sem falhar. Uma *falha*, ou *não resistência* é um termo muito genérico que depende do tipo de material e do tipo de aplicação de uma estrutura. Falha pode ser fratura, esmagamento, escoamento, deformação excessiva, deslocamento excessivo etc.

Neste curso, um critério de falha é uma função de componentes do tensor das tensões, que indicaremos por  $\mathbb{F}([T])$  tal que:

- $\mathbb{F}([T]) < c \Leftrightarrow$  o material resiste aos esforços aplicados
- $\mathbb{F}([T]) = c \Leftrightarrow$  o material alcançou seu limite de resistência
- $\mathbb{F}([T]) > c \Leftrightarrow$  o material não resiste aos esforços aplicados

onde  $c$  é uma constante do material.

O fator de segurança  $FS$  pode ser escrito como:

$$FS = \frac{c}{\mathbb{F}([T])} \quad (130)$$

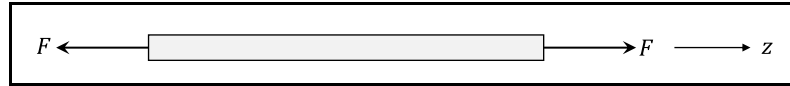
### 10.1 Critério de Tresca (1868)

O *Critério de Tresca* ou *Critério da Tensão de Cisalhamento Máxima* é um critério empírico que foi desenvolvido para materiais dúcteis. Um *material dúctil* é um material que sofre escoamento antes de romper, ou seja, apresenta uma grande deformação antes de romper. Grande parte dos metais têm comportamento dúctil.

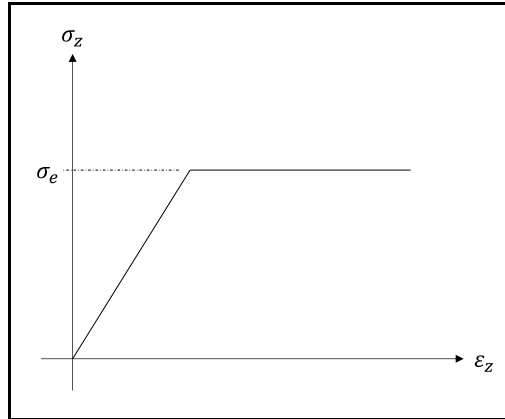
O Critério de Tresca supõe que a tensão de cisalhamento máxima é quem governa a resistência dos materiais. De forma matemática, para o critério de Tresca,

$$\mathbb{F}([T]) = \tau_{m\acute{a}x} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \quad (131)$$

A constante  $c$  é calculada a partir do ensaio de tração de uma barra representado na Figura 32. A partir desse ensaio é obtida a curva da tensão de tração  $\sigma_z$  em função da deformação  $\varepsilon_z$  apresentada de forma simplificada na Figura 33. A partir dessa curva é possível obter a tensão de tração  $\sigma_e$  correspondente ao escoamento do material.



**Figura 32 – Ensaio de tração de uma barra.**



**Figura 33 – Curva tensão-deformação simplificada.**

No instante em que o material atinge a tensão de escoamento, o estado de tensão em um ponto da barra pode ser representado pelo tensor das tensões:

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_e \end{bmatrix} \quad (132)$$

Nesta situação, as tensões principais são:

$$\sigma_1 = \sigma_e \quad (133)$$

e

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0 \quad (134)$$

A tensão de cisalhamento máxima, quando o material atinge o escoamento é, então,

$$\tau_{máx} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_e}{2} \quad (135)$$

Este valor é escolhido como tensão de cisalhamento limite no Critério de Tresca, ou seja,

$$c = \frac{\sigma_e}{2} \quad (136)$$

O fator de segurança (130) no Critério de Tresca é, então, dado por:

$$FS = \frac{\sigma_e}{\sigma_1 - \sigma_3} \quad (137)$$

---

## 10.2 Critério de Rankine (1876)

O *Critério Rankine* é um critério empírico que foi desenvolvido para materiais frágeis. Um *material frágil* é um material em que ocorre ruptura abrupta, como uma fratura, antes de aparecerem deformações grandes. Como exemplos de materiais frágeis, podemos citar materiais cerâmicos, como o vidro, concreto, pedra e ferro fundido.

Segundo o Critério de Rankine a material sofre ruptura quando a tensão de tração atinge um valor limite. De forma matemática, para o critério de Rankine,

$$F([T]) = \sigma_1 \quad (138)$$

e

$$c = f_t \quad (139)$$

onde  $f_t$  é o limite de ruptura a tração do material, determinado experimentalmente.

Para o Critério de Rankine o fator de segurança (130) é, então,

$$FS = \frac{f_t}{\sigma_1} \quad (140)$$

## 10.3 Critério de von Mises (1913)

O *Critério de von Mises* ou *Critério da Energia de Distorção Máxima* é um critério que, como o Critério de Tresca foi desenvolvido para materiais dúcteis. O Critério de von Mises postula que um material dúctil atinge seu limite de resistência quando a energia de distorção atinge um valor limite. Ainda não estudamos a energia de distorção, mas podemos apresentar uma definição matemática do Critério de von Mises e aplicar essa definição. Assim, para o Critério de von Mises,

$$F([T]) = \sigma_{eq} \quad (141)$$

onde  $\sigma_{eq}$  é a *Tensão Equivalente de von Mises* ou, simplesmente, *Tensão de von Mises*, dada pela fórmula:

$$\sigma_{eq} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} \quad (142)$$

Como no Critério de Tresca, a constante  $c$  é determinada a partir do ensaio de tração. Aplicando as tensões principais determinadas em (133) e (134) na fórmula da Tensão de von Mises, obtemos:

$$c = \sigma_e \quad (143)$$



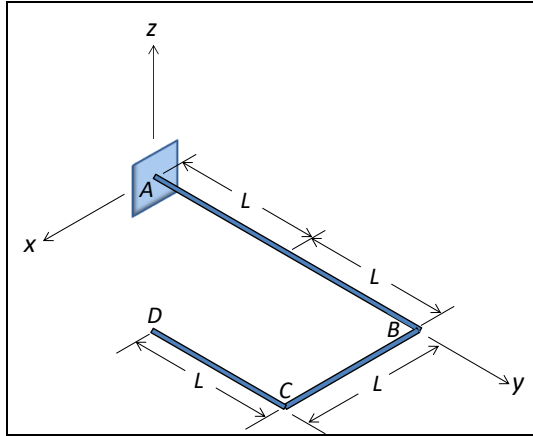
---

Assim, o fator de segurança no Critério de von Mises é:

$$FS = \frac{\sigma_e}{\sigma_{eq}} \quad (144)$$

# 11 Exercícios Resolvidos

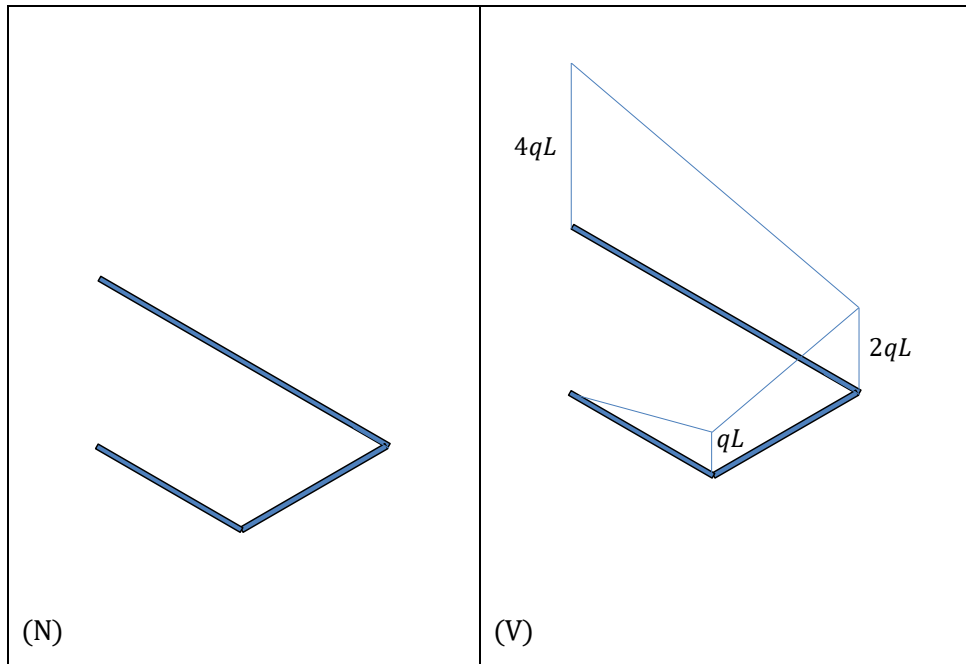
## Exercício 1:

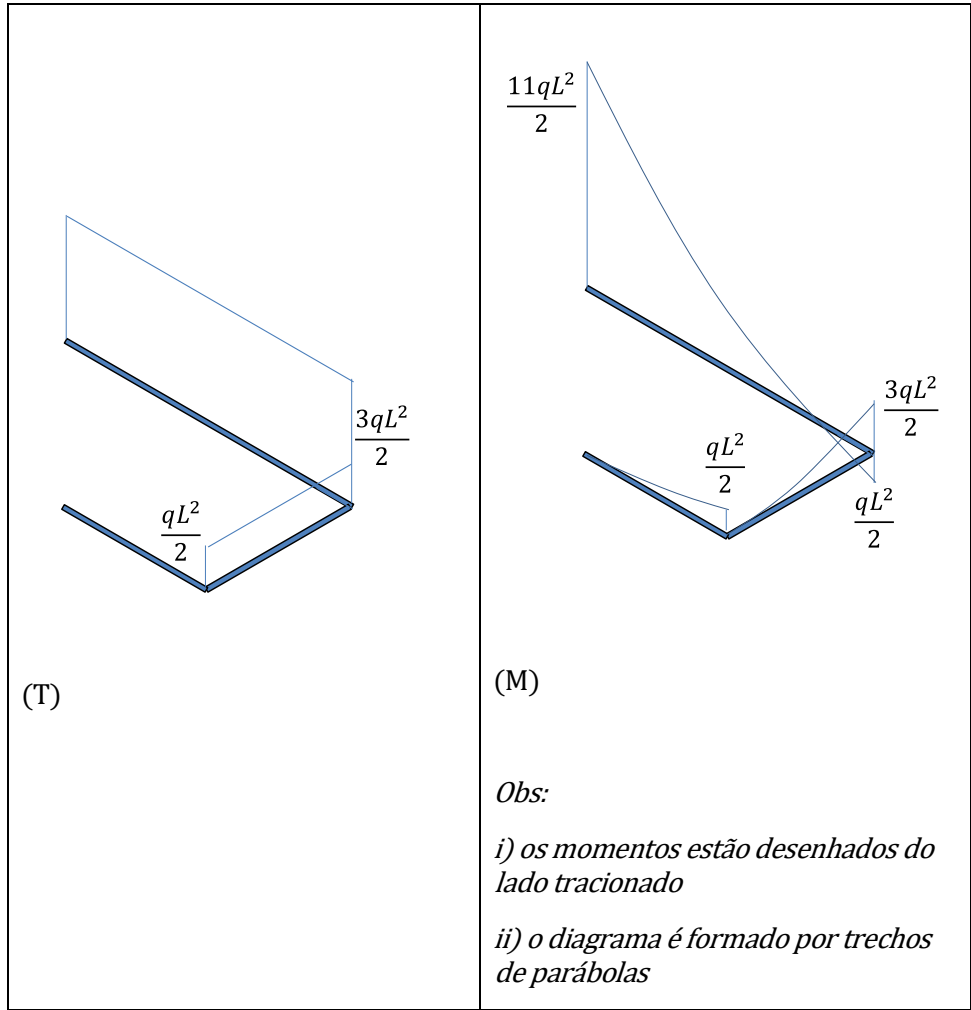


A viga ABCD da figura está contida em um plano horizontal. Ela é formada por um arame com seção circular de raio  $R$ , dobrado em ângulos de  $90^\circ$ , e está engastada no ponto A. A viga está submetida apenas ao seu peso próprio  $q$  por unidade de comprimento. Pedem-se:

- os diagramas de esforços solicitantes na viga;
- o estado de tensões no ponto de coordenadas  $(0, 0, R)$  representado em um elemento cúbico orientado segundo os eixos  $xyz$ .

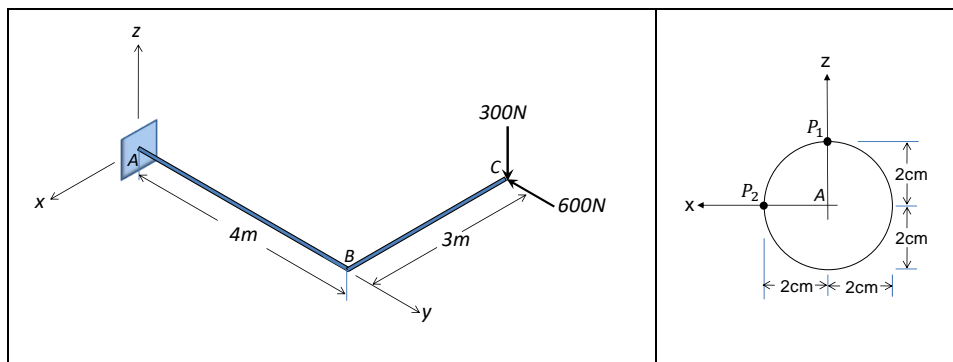
## Resolução:



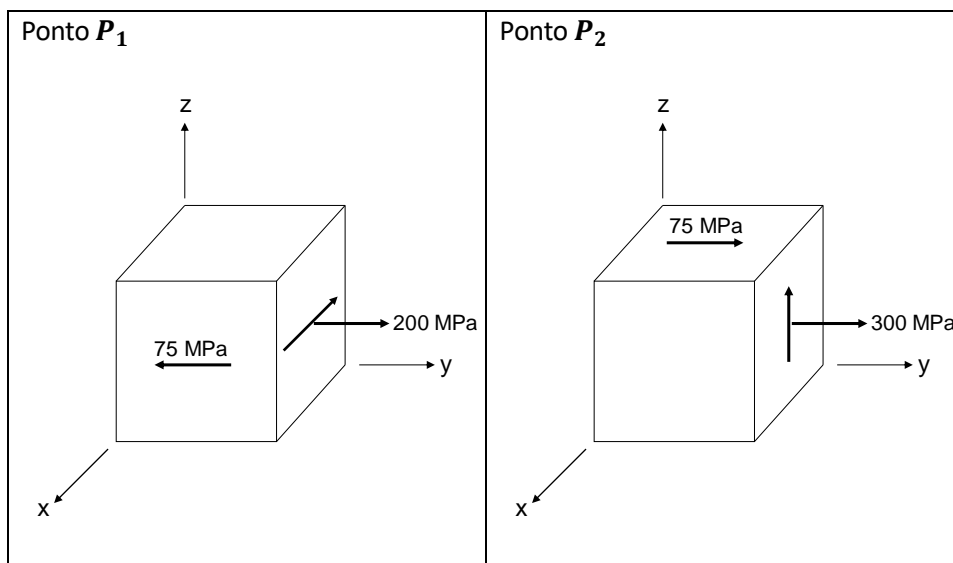


## **Exercício 2:**

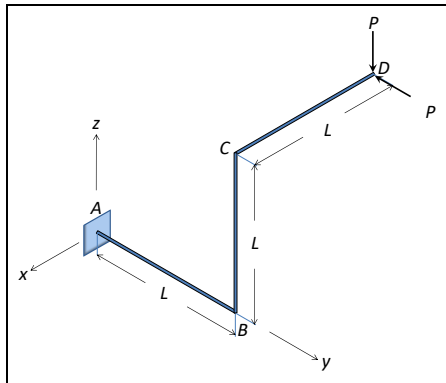
A viga ABC da figura é horizontal. O trecho BC forma um ângulo de  $90^\circ$  com o trecho AB. A viga é prismática, tem seção circular com 2cm de raio e tem as dimensões indicadas na figura. Na sua extremidade C estão aplicadas duas forças com os sentidos indicados: uma força vertical de magnitude 300N e outra, horizontal, paralela ao trecho AB e de magnitude 600N. Pede-se determinar o estado de tensão nos pontos  $P_1$  e  $P_2$  da seção A cujas posições estão indicadas na figura. As tensões devidas à força normal e à força cortante podem ser desprezadas, por serem pequenas. Adotar a aproximação  $\pi = 3$ .



## **Resolução:**



**Exercício 3:**



A estrutura da figura é formada por uma barra dobrada de seção circular e peso desprezível. Os comprimentos indicados são medidos ao longo do eixo do arame. Pede-se:

- montar os diagramas de esforços solicitantes;
- representar o estado de tensão, por meio de um cubo orientado pelo mesmo sistema de eixos indicado, para cada um dos pontos abaixo:

$$P_1 = (-L/2, L, L+r); \quad P_2 = (0, L+r, L/2);$$

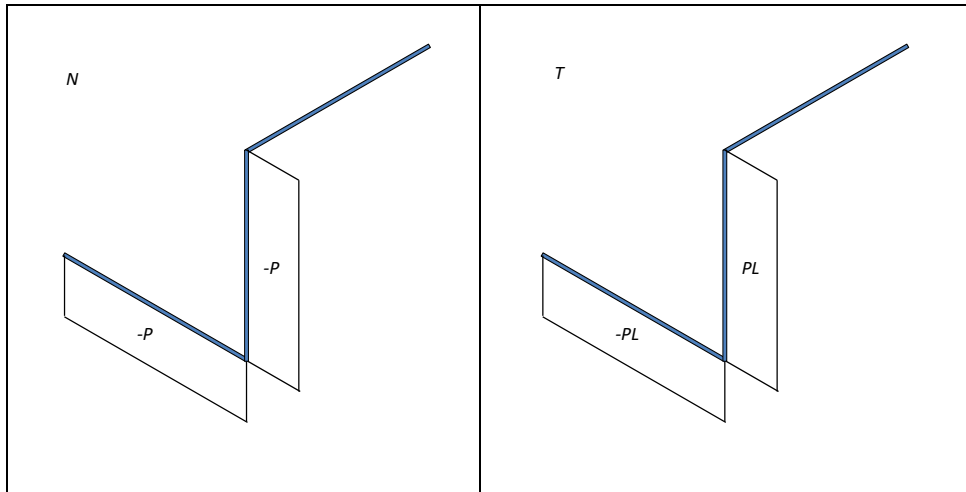
$$P_3 = (0, L/2, r); \quad P_4 = (r, L/2, 0)$$

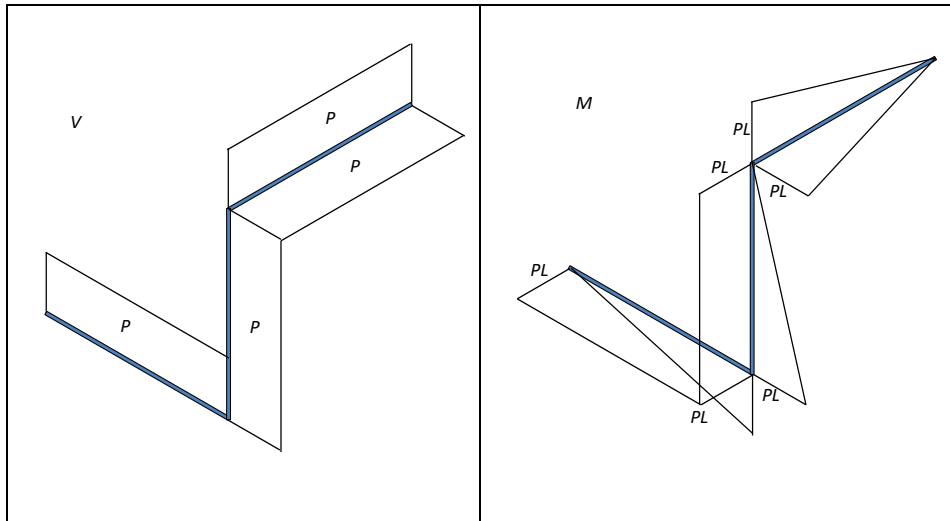
São dados:

- raio  $r$  do arame: 2cm
- área da seção transversal do arame:  $12\text{cm}^2$
- momento polar de inércia:  $24\text{cm}^4$
- força  $P$ : 600N
- comprimento  $L=2\text{m}$

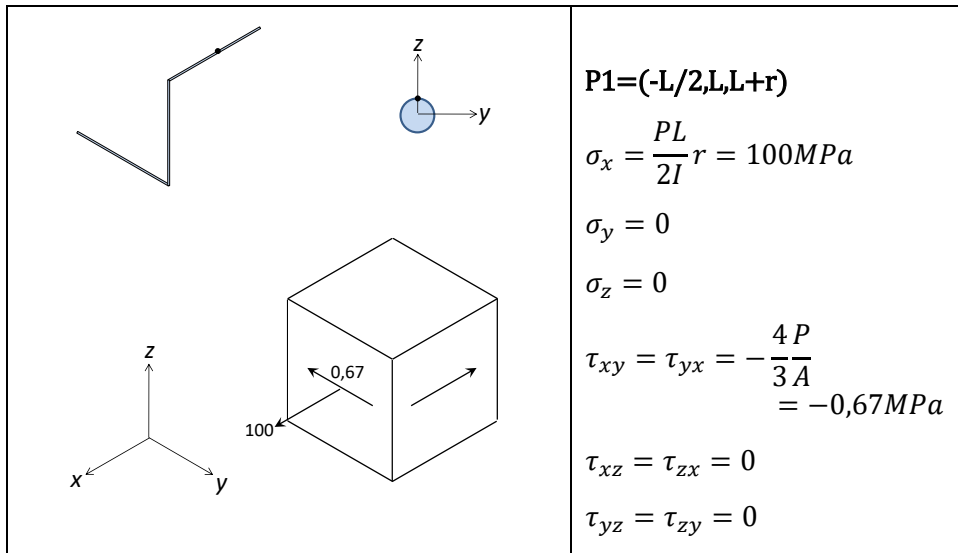
**Resolução:**

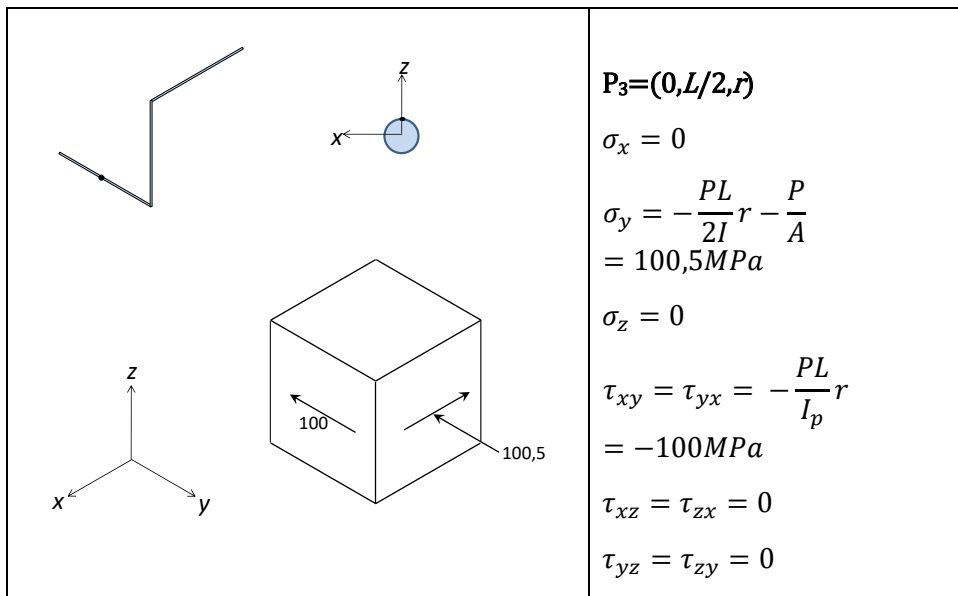
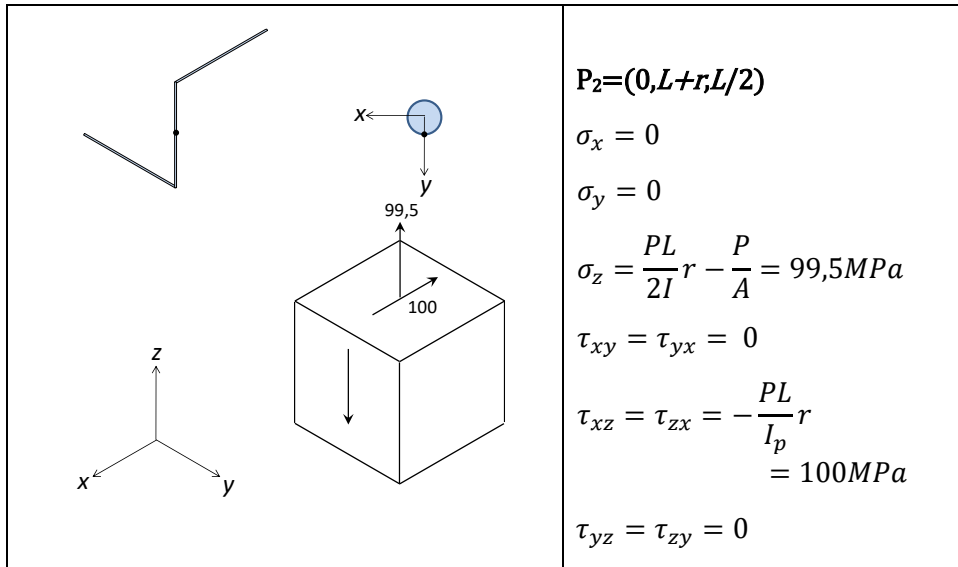
a)

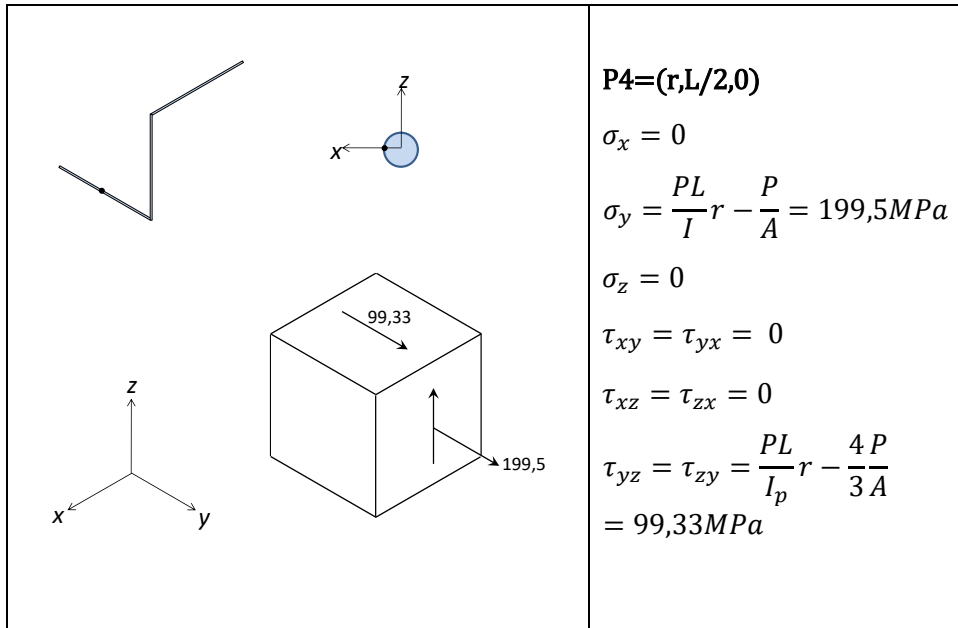




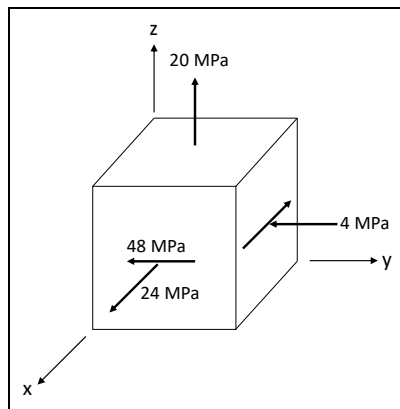
b)







#### **Exercício 4:**



O cubo elementar da figura representa o estado de tensões em um ponto  $P$  de um corpo. Pede-se, para esse ponto:

- montar a matriz  $T$  que representa o tensor das tensões na base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ;
- calcular as tensões principais  $\sigma_1, \sigma_2$  e  $\sigma_3$ ;
- calcular as direções principais  $\vec{n}_1, \vec{n}_2$  e  $\vec{n}_3$ ;
- calcular a máxima tensão de cisalhamento;
- montar os círculos de Mohr;
- sendo  $\vec{n}$  a normal a um plano em que a tensão normal é  $\sigma = -10MPa$  e a tensão de cisalhamento é, em módulo,  $\tau = 30MPa$ , obtenha a relação entre  $\vec{n}$  e as direções principais  $\vec{n}_1, \vec{n}_2$  e  $\vec{n}_3$ , usando os círculos de Mohr.

#### **Resolução:**

a)  $[T] = \begin{bmatrix} 24 & -48 & 0 \\ -48 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} MPa$



---

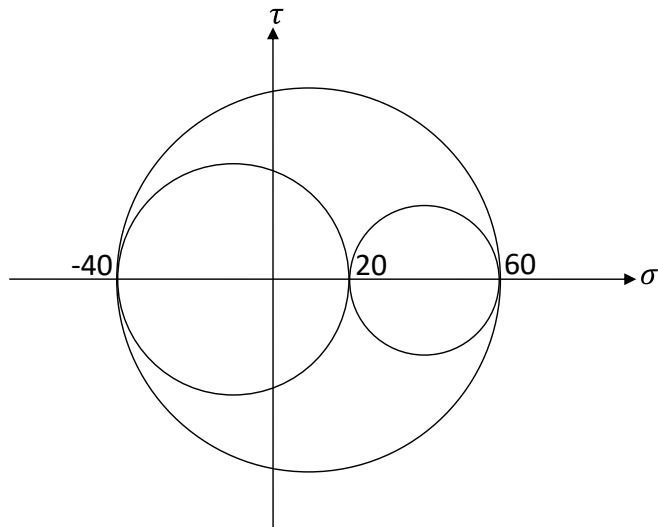
b)  $\sigma_1 = 60MPa$ ;  $\sigma_2 = 20MPa$ ;  $\sigma_3 = -40MPa$

c)  $\vec{n}_1 = (-0,8; 0,6; 0)$ ;  $\vec{n}_2 = (0; 0; 1)$ ;  $\vec{n}_3 = (0,6; 0,8; 0)$

d)

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 50MPa$$

e)



f) Os pontos em questão correspondem exatamente aos pontos da circunferência de centro

$$\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}$$

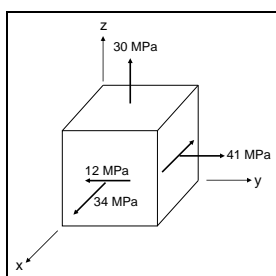
e raio

$$\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$$

que estão mais distantes do eixo dos  $\sigma$ . Portanto:

$$\pm \vec{n} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{n}_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{n}_3$$

### **Exercício 5:**



O cubo elementar da figura representa o estado de tensões em um ponto  $P$  de uma estrutura. A tensão de escoamento do material dessa estrutura é de 150MPa em tração e de 50MPa em cisalhamento. Seu limite de resistência à compressão é de 100MPa. Pede-se:

- determinar qual é o fator de segurança nesse ponto;
- calcular as direções normais aos planos em que ocorre o valor máximo da tensão de cisalhamento.

### **Resolução:**

a) Para conhecer as tensões máximas de compressão, tração e cisalhamento, é necessário calcular as tensões principais:

$$[T] = \begin{bmatrix} 34 & -12 & 0 \\ -12 & 41 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 34 - \lambda & -12 & 0 \\ -12 & 41 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 30 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 50MPa \\ \sigma_2 = 30MPa \\ \sigma_3 = 25MPa \end{cases}$$

Como todas as tensões principais são positivas, não há compressão em nenhum plano.

A tensão máxima de tração é  $\sigma_1$ . Assim, o fator de segurança à tração será:

$$FS_t = \frac{150}{\sigma_1} = \frac{150}{50} = 3$$

A tensão máxima de cisalhamento é:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 12,5 MPa$$

Assim, o fator de segurança ao cisalhamento é:

$$FS_\tau = \frac{50}{\tau_{max}} = \frac{50}{12,5} = 4$$

O fator de segurança da estrutura no ponto considerado será o menor valor entre os fatores de segurança calculados:

$$FS = \min\{FS_t, FS_\tau\} = \min\{3, 4\} = 3$$

b) Os planos em que ocorrem as tensões de cisalhamento máximas são ortogonais a  $\vec{n}_2$  e suas normais formam ângulo de  $45^\circ$  com as direções  $\vec{n}_1$  e  $\vec{n}_3$ :

$$\vec{n} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{n}_1 \pm \vec{n}_3)$$

Para calcular essas direções, é necessário calcular primeiro as direções principais:

$$\begin{bmatrix} 34 - \lambda_i & -12 & 0 \\ -12 & 41 - \lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & 30 - \lambda_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_{x,i} \\ n_{y,i} \\ n_{z,i} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix};$$

$$n_{i,x}^2 + n_{i,y}^2 + n_{i,z}^2 = 1$$

Resultando em

$$\vec{n}_1 = \left( \frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, 0 \right)$$

$$\vec{n}_2 = (0, 0, 1)$$

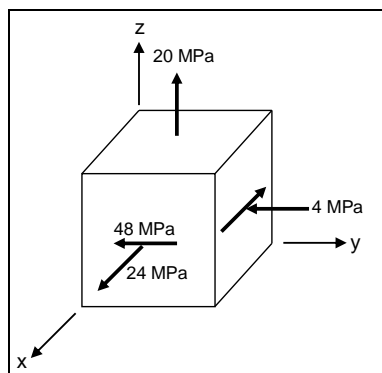
$$\vec{n}_3 = \left( \frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0 \right)$$

Assim:

$$\vec{n} = \pm \frac{\sqrt{2}}{10} (7, -1, 0)$$

$$\vec{n} = \pm \frac{\sqrt{2}}{10} (1, 7, 0)$$

### **Exercício 6:**



O cubo elementar da figura representa o estado de tensões em um ponto  $P$  de um corpo. Pede-se, para esse ponto:

- montar a matriz  $T$  que representa o tensor das tensões;
- calcular as tensões principais;
- calcular as direções principais de tensão;
- calcular a máxima tensão de cisalhamento;
- montar os círculos de Mohr;

f) sendo  $\vec{n}$  a normal a um plano em que a tensão normal é  $\sigma = -10\text{MPa}$  e a tensão de cisalhamento, em módulo, é  $|\tau| = 30\text{MPa}$ , obtenha a relação entre  $\vec{n}$  e as direções principais, usando os círculos de Mohr.

**Resolução:**

a)  $[T] = \begin{bmatrix} 24 & -48 & 0 \\ -48 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}$

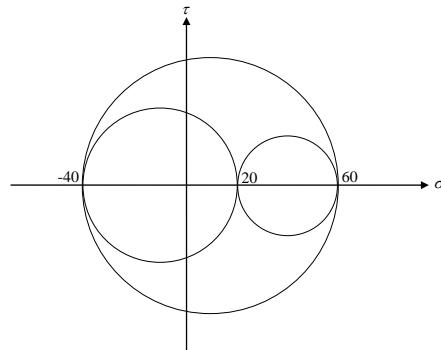
b)  $\sigma_1 = 60\text{MPa}; \sigma_2 = 20\text{MPa}; \sigma_3 = -40\text{MPa}$

c)  $\vec{n}_1 = (-0,8; 0,6; 0); \vec{n}_2 = (0; 0; 1); \vec{n}_3 = (0,6; 0,8; 0)$

d)

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 50\text{MPa}$$

e)



f) Os pontos em questão correspondem exatamente aos pontos da circunferência de centro

$$\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}$$

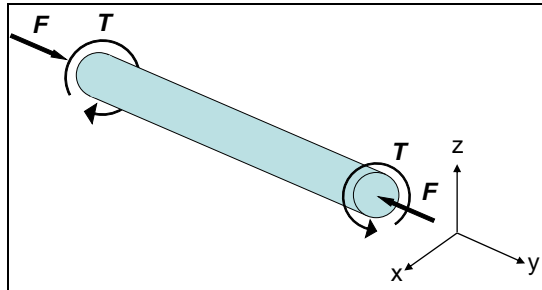
e raio

$$\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$$

que estão mais distantes do eixo dos  $\sigma$ . Portanto:

$$\pm \vec{n} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{n}_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{n}_3$$

**Exercício 7:**

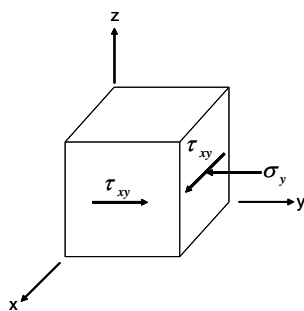


O eixo homogêneo da figura tem diâmetro  $d$  e está submetido a uma força axial  $F$  e a um momento de torção  $T$ . Pedem-se:

- as tensões em um ponto da superfície do eixo representadas em um elemento orientado segundo os eixos indicados;
- o tensor das tensões no mesmo ponto;
- as tensões principais;
- a máxima tensão normal de tração;
- a máxima tensão normal de compressão;
- a máxima tensão de cisalhamento.

**Resolução:**

a)



$$\sigma_y = -\frac{F}{A} \Rightarrow \sigma_y = -\frac{4F}{\pi d^2}$$

$$\tau_{xy} = \frac{T d}{I_p 2}$$

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} \Rightarrow \tau_{xy} = \frac{16T}{\pi d^3}$$

b)

---


$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{16T}{\pi d^3} & 0 \\ \frac{16T}{\pi d^3} & -\frac{4F}{\pi d^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c)

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \frac{16T}{\pi d^3} & 0 \\ \frac{16T}{\pi d^3} & -\frac{4F}{\pi d^2} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda \left( \lambda^2 + \frac{4F}{\pi d^2} \lambda - \frac{256T^2}{\pi^2 d^6} \right) = 0$$

$$\sigma_1 = \frac{2}{\pi d^2} \left( -F + \sqrt{F^2 + 64 \frac{T^2}{d^2}} \right)$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = -\frac{2}{\pi d^2} \left( F + \sqrt{F^2 + 64 \frac{T^2}{d^2}} \right)$$

d)

$$\sigma_{\text{máx,tração}} = \sigma_1 = \frac{2}{\pi d^2} \left( -F + \sqrt{F^2 + 64 \frac{T^2}{d^2}} \right)$$

e)

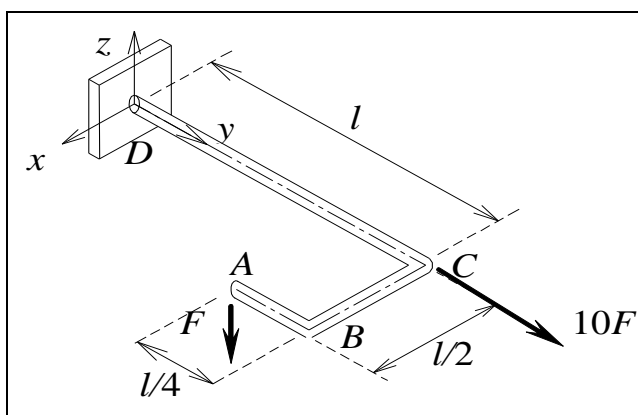
$$\sigma_{\text{máx}} |\sigma_3| = \frac{2}{\pi d^2} \left( F + \sqrt{F^2 + 64 \frac{T^2}{d^2}} \right)$$

f)

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{2}{\pi d^2} \sqrt{F^2 + 64 \frac{T^2}{d^2}}$$

---

**Exercício 8:**



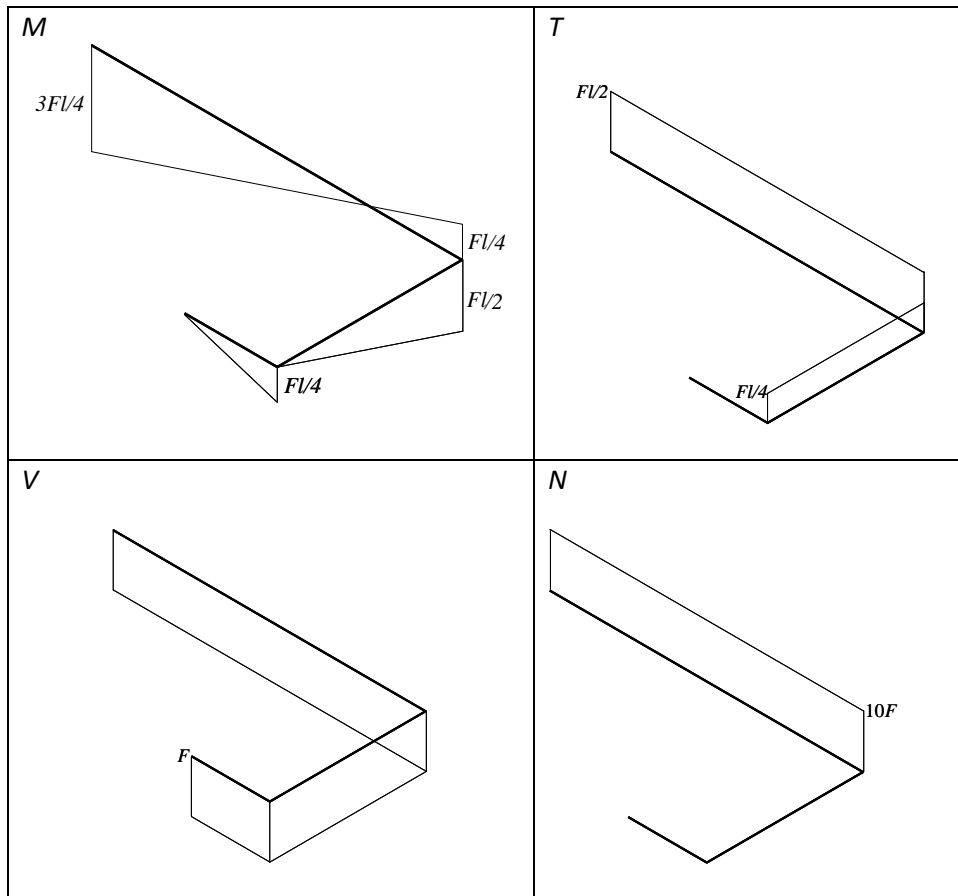
A estrutura plana da figura é formada por barras de diferentes comprimentos, mas de mesma seção transversal (seção circular cheia com diâmetro  $d = 2r$ ). A seção D encontra-se engastada e sobre a seção A atua uma força vertical (perpendicular ao plano da estrutura) de intensidade  $F$ . Na seção C atua uma força horizontal, de intensidade  $10F$ , na mesma direção e sentido do eixo  $y$ . Pede-se:

- obter os diagramas de esforços solicitantes da estrutura ( $M$ ,  $T$ ,  $V$  e  $N$ );
- indicar num elemento infinitesimal 3D, com lados paralelos aos eixos  $xyz$ , o estado de tensões no ponto  $P$  de coordenadas  $P = (0, 0, r)$  que se encontra na seção D. Pede-se indicar os eixos  $xyz$  junto ao elemento e, no elemento, os sentidos corretos das tensões e a magnitude das mesmas;
- com base no estado de tensões obtido construa, graficamente, os círculos de Mohr das tensões;
- determine os valores da máxima tensão de compressão, da máxima tensão de tração e da máxima tensão de cisalhamento que atuam no ponto  $P$ , e os planos sobre os quais estas tensões atuam.

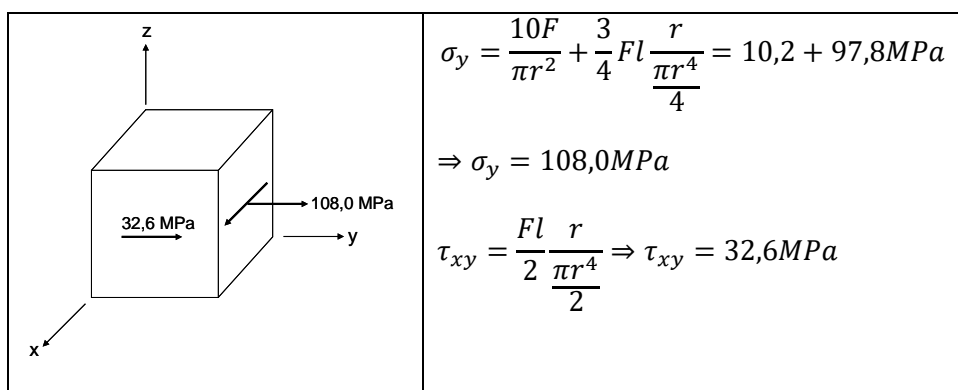
Dados:  $F = 500 \text{ N}$ ,  $l = 400 \text{ mm}$ ,  $d = 2r = 25 \text{ mm}$

**Resolução:**

a)

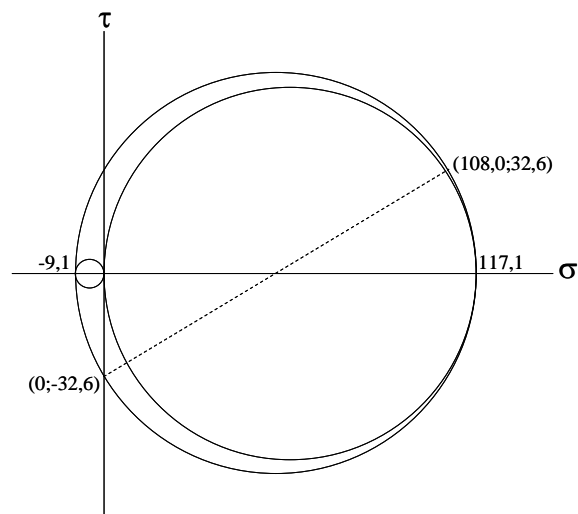


b)





c)



Centro da circunferência externa: (0;54,1) MPa

Raio da circunferência externa: 63,1 MPa

d) dos Círculos de Mohr:

$$\begin{cases} \sigma_1 = 117,1 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = 0 \text{ MPa} \\ \sigma_3 = -9,1 \text{ MPa} \end{cases}$$

Portanto:

i) máxima tensão de compressão:  $|\sigma_3| = 9,1 \text{ MPa}$

ii) máxima tensão de tração:  $\sigma_1 = 117,1 \text{ MPa}$

iii) máxima tensão de cisalhamento:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 63,1 \text{ MPa}$$

iv) normal ao plano de máxima tensão de tração:

$$\tan 2\alpha = \frac{32,6}{\frac{108,0}{2}} \Rightarrow \alpha = 15,6^\circ \Rightarrow \vec{n}_1 = \pm(-0,27; 0,96; 0)$$

v) normal ao plano de máxima tensão de compressão:

$$\vec{n}_2 = (0; 0; 1); \quad n_3 \perp \vec{n}_2 \text{ e } n_3 \perp \vec{n}_1 \Rightarrow \vec{n}_3 = \pm(0,96; 0,27; 0)$$

vi) normal ao plano de máxima tensão de cisalhamento:

---

$$\vec{n} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{n}_1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{n}_3$$

### **Exercício 9:**

Um tanque cilíndrico está sendo projetado para uma pressão interna de 12MPa, com um fator de segurança 2,0 em relação ao escoamento. A tensão de escoamento do seu material é de 300MPa em tração e 180MPa em cisalhamento. Se o diâmetro do tanque for 150mm, qual será a espessura de parede exigida?

### **Resolução:**

A tensão de tração admissível é:

$$\sigma_{t,adm} = \frac{300}{2} = 150MPa$$

e a tensão de cisalhamento admissível é:

$$\tau_{adm} = \frac{180}{2} = 90MPa$$

Para um vaso de pressão de parede fina, submetido apenas a uma pressão interna, as tensões principais em um ponto da parede são:

$$\sigma_1 = \sigma_c = \frac{pR}{t}$$

$$\sigma_2 = \sigma_L = \frac{pR}{2t}$$

$$\sigma_3 = 0$$

A tensão de tração máxima  $\sigma_1$ . Então, para respeitar o limite de tração admissível, a espessura mínima deverá ser:

$$t = \frac{pR}{\sigma_{t,adm}} = \frac{12 \times 75}{150} = 6mm$$

A tensão de cisalhamento máxima é:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{pR}{2t}$$

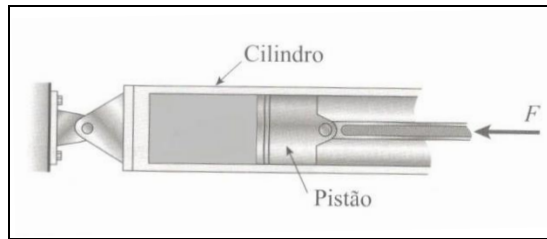
Assim a espessura mínima que o tubo deve ter, para respeitar a tensão de cisalhamento admissível é:

$$t = \frac{pR}{2\tau_{adm}} = \frac{12 \times 75}{2 \times 90} = 5mm$$

---

O valor mínimo da espessura que respeita os dois limites é 6mm.

**Exercício 10:**



Um cilindro cheio de óleo é pressionado por um pistão de diâmetro  $d$ , ao qual está aplicada uma força  $F$ , como mostrado na figura. A máxima tensão de cisalhamento admissível na parede do cilindro é  $\tau_{adm}$ . Determine a espessura mínima que deve ter a parede do cilindro.

**Resolução:**

Pressão do óleo:

$$p = \frac{F}{A} = \frac{4F}{\pi d^2}$$

Tensões principais (note que, neste caso, a tensão longitudinal é nula):

$$\sigma_1 = \sigma_c = \frac{pd}{2t}; \sigma_2 = \sigma_L = 0; \sigma_3 = 0$$

Tensão de cisalhamento máxima:

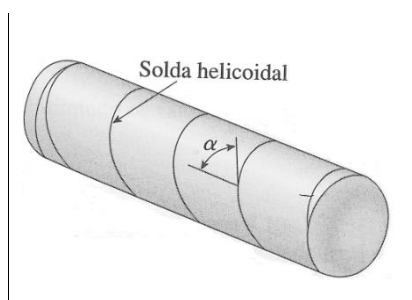
$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{pd}{4t} = \frac{F}{\pi t d}$$

A tensão de cisalhamento máxima deve ser menor que a tensão admissível:

$$\tau_{max} < \tau_{adm} \Rightarrow \frac{F}{\pi t d} < \tau_{adm}$$

$$\Rightarrow t > \frac{F}{\pi d \tau_{adm}}$$

### **Exercício 11:**



Um vaso de pressão cilíndrico é construído a partir de uma placa de aço longa e fina, enrolando-se a placa de aço em torno de um mandril e então se soldando ao longo das bordas da placa para fazer uma junção helicoidal, conforme a figura. A solda helicoidal faz um ângulo  $\alpha = 45^\circ$  com o eixo longitudinal. O vaso tem raio interno  $r = 1,8$  m e espessura da parede  $t = 20$  mm. A pressão interna  $p$  é 800 kPa. Pede-se calcular:

- a) a tensão circunferencial na parede cilíndrica do vaso;
- b) a tensão longitudinal na parede cilíndrica do vaso;
- c) a tensão de cisalhamento máxima na parede cilíndrica do vaso;
- d) a tensão normal que age perpendicularmente à solda;
- e) a tensão de cisalhamento que age paralelamente à solda.

### **Resolução:**

a)

$$\sigma_c = \frac{pr}{t} = \frac{800 * 1,8}{0,02} \text{ kPa} \Rightarrow \sigma_c = 72 \text{ MPa}$$

b)

$$\sigma_L = \frac{1}{2} \sigma_c \Rightarrow \sigma_L = 36 \text{ MPa}$$

c)

$$\sigma_1 = \sigma_c; \sigma_2 = \sigma_L; \sigma_3 = 0;$$

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \Rightarrow \tau_{\text{máx}} = 36 \text{ MPa}$$

d) e e)

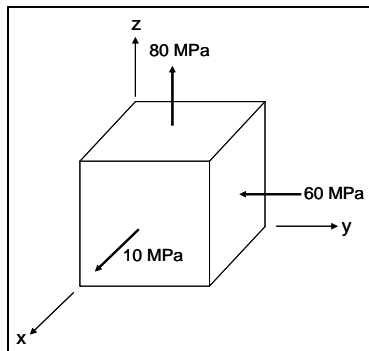
$$[T] = \begin{bmatrix} 72 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \vec{n} = \cos \alpha \vec{i} - \sin \alpha \vec{j};$$

$$\vec{\rho} = T[\vec{n}] = 72 \cos \alpha \vec{i} - 36 \sin \alpha \vec{j};$$

$$\sigma = \vec{\rho} \cdot \vec{n} = 72 \cos^2 \alpha + 36 \sin^2 \alpha; \alpha = 45^\circ \Rightarrow \sigma_w = 54 \text{ MPa}$$

$$\tau^2 = \rho^2 - \sigma^2 \Rightarrow \tau_w = 18 \text{ MPa}$$

### Exercício 12:



A figura representa o estado de tensões em um ponto  $P$  de um sólido. Sabendo que a tensão de escoamento do material de que é feito esse sólido é  $\sigma_e = 400 \text{ MPa}$ , pede-se:

- determinar o fator de segurança usando o critério de Tresca (Máxima tensão de cisalhamento) para o ponto  $P$ ;
- determinar o fator de segurança usando o critério de Von Mises (Máxima Energia de Distorção) para o ponto  $P$ .

### Resolução:

As tensões principais são:

$$\sigma_1 = 80 \text{ MPa}; \sigma_2 = 10 \text{ MPa}; \sigma_3 = -60 \text{ MPa}$$

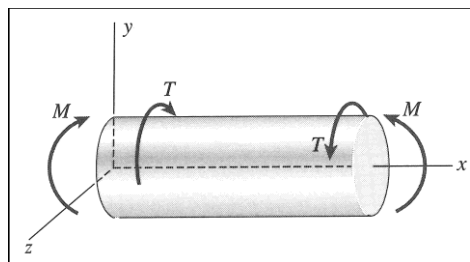
a)

$$FS = \frac{\sigma_e}{\sigma_1 - \sigma_3} = 2,86$$

b)

$$FS = \frac{\sigma_e}{\sigma_{eq}} = \frac{\sqrt{2}\sigma_e}{\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}} = 3,30$$

### Exercício 13:



Um vaso de pressão cilíndrico de parede fina com extremidades planas está submetido a uma pressão interna  $p$ , a um torque  $T$  e a um momento fletor  $M$  conforme a figura. O raio externo do cilindro é  $R$  e a espessura de sua parede é  $t$ . É dado o momento polar em relação ao centro da seção transversal do vaso:  $I_p = 2\pi R^3 t$ .

Dados:

$$p = 4 \text{ MPa} \quad R = 40 \text{ cm}$$

$$T = 128\pi \text{ kN.m} \quad t = 1 \text{ cm}$$

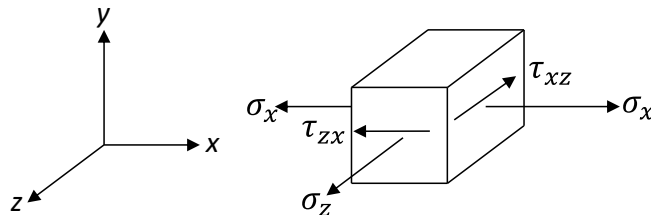
$$M = 32\pi \text{ kN.m}$$

---

Pede-se determinar o fator de segurança em um ponto  $P$  situado na parte mais inferior da superfície externa do vaso ( $y = -R$ ), distante das tampas.

**Resolução:**

Estado de tensão no ponto  $P$ :



onde:

$$\sigma_x = \frac{pR}{2t} + \frac{MR}{\pi R^3 t} = (80 + 20) \text{MPa} \Rightarrow \sigma_x = 100 \text{MPa}$$

$$\sigma_z = \frac{pR}{t} \Rightarrow \sigma_z = 160 \text{MPa}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = -\frac{TR}{2\pi R^3 t} \Rightarrow = -40 \text{MPa}$$

Assim, o tensor das tensões no ponto  $P$  fica dado por:

$$[T] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \Rightarrow [T] = \begin{bmatrix} 100 & 0 & -40 \\ 0 & 0 & 0 \\ -40 & 0 & 160 \end{bmatrix}$$

As tensões principais no ponto  $P$  são:

$$\sigma_1 = 180 \text{MPa}$$

$$\sigma_2 = 80 \text{MPa}$$

$$\sigma_3 = 0$$

Como o material é dúctil, pode ser usado o critério de Tresca:

$$FS = \frac{\sigma_e}{\sigma_1 - \sigma_3} \Rightarrow 1,5$$

### Exercício 14:



Um tanque cilíndrico pressurizado com extremidades esféricas é carregado por torques  $T = 128\pi Nm$  e forças de tração  $F = 4,8\pi kN$  conforme a figura. O tanque tem raio médio  $r = 40mm$  e espessura de parede  $t = 2mm$ . A pressão interna é  $p = 3MPa$ . Sabendo que a tensão de escoamento do material do tanque é  $\sigma_e = 200MPa$ , pede-se determinar o **fator de segurança** em um ponto da parede lateral do tanque.

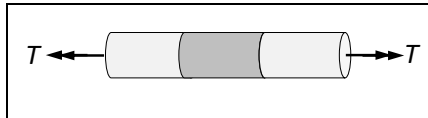
Nota: usar a fórmula do momento polar de inércia para um tubo de parede fina ( $I_p = 2\pi r^3 t$ )

### Resolução:

Usando o Critério de Tresca:  $FS = 2,5$

Usando o Critério de Von Mises:  $FS = \frac{5\sqrt{3}}{3} \cong 2,89$

### Exercício 15:



O eixo da figura é formado por dois materiais. Nas extremidades o material é dúctil, com tensão de escoamento  $\sigma_y = 300MPa$ . Na parte central o material é frágil, com tensão de ruptura  $\sigma_r = 200MPa$ . O eixo tem diâmetro  $d = 2cm$  e momento polar  $I_p = 1,6cm^4$ . Sabendo que está aplicado ao eixo um torque  $T = 160Nm$ , determine qual é o fator de segurança.

### Resolução:

Um ponto de um eixo em torção pura está submetido a um estado de tensão que pode ser representado pela matriz:

$$\begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim as tensões principais serão:

---

$$\sigma_1 = \tau$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = -\tau$$

onde

$$\tau = \frac{T r}{I_p}$$

As maiores tensões principais ocorrerão na face externa do eixo e serão dadas por

$$\sigma_1 = \frac{T d}{2 I_p} = \frac{160 \times 2 \times 10^{-2}}{2 \times 1,6 \times 10^{-8}} \times 10^{-6} = 100 \text{MPa}$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = -\frac{T d}{2 I_p} = -100 \text{MPa}$$

i) Como as extremidades são feitas de um material dúctil, um critério de falha adequado é o Critério de Tresca:

$$FS = \frac{\sigma_y}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{\sigma_y}{2\tau} = \frac{\sigma_y I_p}{T d}$$

em valores numéricos:

$$FS = \frac{300 \times 10^6 \times 1,6 \times 10^{-8}}{160 \times 2 \times 10^{-2}} = 1,5$$

(alternativamente pode ser adotado o critério de von Mises)

ii) Como a parte central é feita de um material frágil, um critério de falha adequado é o critério de Rankine:

$$FS = \frac{\sigma_r}{\sigma_1} = \frac{\sigma_r 2 I_p}{T d}$$

em valores numéricos:

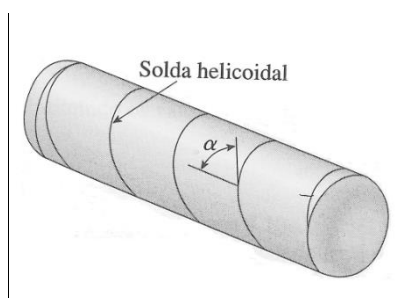
$$FS = \frac{200 \times 10^6 \times 2 \times 1,6 \times 10^{-8}}{160 \times 2 \times 10^{-2}} = 2$$

iii) O fator de segurança do eixo será o mínimo entre i e ii, então:

$$FS = 1,5$$



### **Exercício 16:**



Um tubo de raio  $R$  é construído a partir de uma chapa de aço longa e fina, de espessura  $t \ll R$ , enrolando-se a chapa de aço em torno de um mandril e soldando-se ao longo das bordas da chapa para fazer uma junção helicoidal, conforme a figura. A solda helicoidal faz um ângulo  $\alpha$  com o eixo longitudinal e é feita com um material dúctil, com tensão de escoamento  $\sigma_y$ . Determinar a faixa de valores de  $\alpha$  para que o fator de segurança na solda seja no mínimo igual a  $FS$ , quando o eixo está submetido a um momento de torção  $T$ .

Dados:  $\pi = 3, \quad t = 1\text{mm},$   
 $R = 4\text{cm}, \quad FS = 2,$   
 $T = 2,4 \text{ kNm}, \quad \sigma_y = 500\text{MPa}$

### **Resolução:**

A máxima tensão de cisalhamento  $\tau$  devida ao momento de torção  $T$  ocorre na superfície externa do eixo. Então

$$\tau = \frac{TR}{I_p}$$

Como  $t \ll R$ , então

$$I_p = 2\pi t R^3$$

e, portanto,

$$\tau = \frac{T}{2\pi t R^2} = 250\text{MPa}$$

O estado de tensão em um ponto da superfície externa do eixo pode ser representado pela matriz

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se  $\vec{i}$  for um versor paralelo à linha central do eixo e  $\vec{j}$ , o versor ortogonal à solda é dado por:

$$\vec{n} = \text{sen}\alpha\vec{i} + \text{cos}\alpha\vec{j}$$

---

Então o vetor tensão em um ponto da solda é

$$\vec{\rho}_w = \tau(\cos\alpha\vec{i} + \sin\alpha\vec{j})$$

A tensão normal será:

$$\sigma_w = \vec{\rho}_w \cdot \vec{n} = 2\tau \sin\alpha \cos\alpha = \tau \sin 2\alpha$$

a tensão tangencial será dada por:

$$\tau_w = \pm\sqrt{\rho_w^2 - \sigma_w^2} = \pm\tau\cos 2\alpha$$

Supondo que a falha ocorra por cisalhamento na direção da solda:

$$|\tau_w| \leq \frac{\sigma_y}{2FS}$$

e, portanto,

$$|\cos 2\alpha| \leq \frac{\sigma_y}{2FS\tau} = \frac{1}{2} \Rightarrow 60^\circ \leq 2\alpha \leq 120^\circ \Rightarrow 30^\circ \leq \alpha \leq 60^\circ$$

(Outros critérios de falha poderiam ser adotados, como, por exemplo, máxima tensão de tração na solda)