



*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica*

PME-3211 – Mecânica dos Sólidos II

Aula #18

Prof. Dr. Clóvis de Arruda Martins

24/10/2023

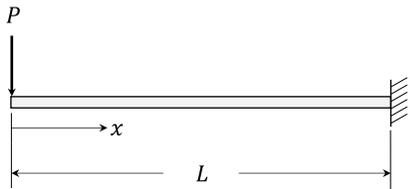


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Composição de esforços

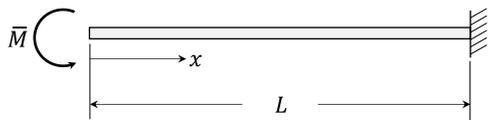
Calcular a energia complementar armazenada por uma viga em balanço quando submetida a três tipos de carregamentos diferentes:

i) uma força vertical P aplicada à sua extremidade livre:



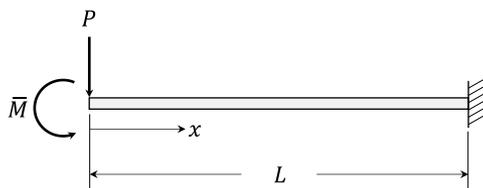
$$U_i^* = \frac{1}{2EI} \int_0^L M^2(x) dx = \frac{1}{2EI} \int_0^L (-Px)^2 dx = \frac{P^2 L^3}{6EI}$$

ii) um binário \bar{M} aplicado à sua extremidade livre:



$$U_{ii}^* = \frac{1}{2EI} \int_0^L M^2(x) dx = \frac{1}{2EI} \int_0^L (-\bar{M})^2 dx = \frac{\bar{M}^2 L}{2EI}$$

iii) uma força vertical P e um binário \bar{M} aplicados à sua extremidade livre:



$$U_{iii}^* = \frac{1}{2EI} \int_0^L M^2(x) dx = \frac{1}{2EI} \int_0^L (-\bar{M} - Px)^2 dx$$
$$\Rightarrow U_{iii}^* = \frac{P^2 L^3}{6EI} + \frac{P\bar{M}L^2}{2EI} + \frac{\bar{M}^2 L}{2EI}$$

$$U_{iii}^* \neq U_i^* + U_{ii}^*$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Exercício

A barra prismática da figura está suspensa pela extremidade superior e submetida ao seu peso próprio e a uma força P aplicada à sua extremidade inferior. Sabendo que o módulo de elasticidade do material da barra é E , a área de sua seção transversal é A e o seu peso por unidade de volume é γ , calcular a energia complementar armazenada nos seguintes casos:

a) $\gamma = 0$ e $P \neq 0$

a) $U^* = \frac{P^2 L}{2EA}$

b) $\gamma \neq 0$ e $P = 0$

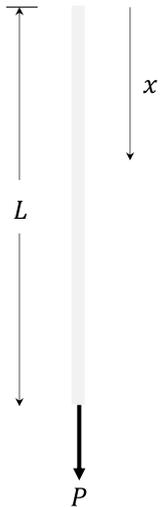
b) $U^* = \frac{\gamma^2 AL^3}{6E}$ (da aula #16)

c) $\gamma \neq 0$ e $P \neq 0$

c) $U^* = \frac{1}{2EA} \int_0^L N^2(x) dx$

$$N(x) = P + \gamma A(L - x)$$

$$\Rightarrow U^* = \frac{P^2 L}{2EA} + \frac{\gamma PL^2}{2E} + \frac{\gamma^2 AL^3}{6E}$$

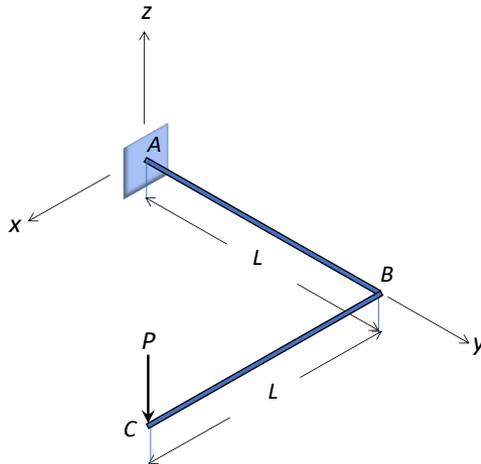




Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Exercício

A estrutura ABC da figura está contida em um plano horizontal. Ela é formada por uma barra dobrada em ângulo de 90° e engastada no ponto A. A estrutura está submetida apenas à força vertical P aplicada ao ponto C. Pede-se o deslocamento vertical do ponto C, desprezando a contribuição da força cortante à energia complementar.



Dado:

$$GI_P = \frac{4}{5}EI$$

- Energia Complementar:

$$U^* = U_{flexão}^* + U_{torção}^*$$

$$U_{flexão}^* = (U_{flexão}^*)_{AB} + (U_{flexão}^*)_{BC}$$

$$(U_{flexão}^*)_{AB} = \frac{1}{2EI} \int_0^L (Px)^2 dx = \frac{P^2 L^3}{6EI}$$

$$(U_{flexão}^*)_{BC} = (U_{flexão}^*)_{AB} = \frac{P^2 L^3}{6EI}$$

$$\Rightarrow U_{flexão}^* = \frac{P^2 L^3}{3EI}$$

$$U_{torção}^* = (U_{torção}^*)_{AB} = \frac{P^2 L^3}{2GI_P}$$

$$\Rightarrow U_{torção}^* = \frac{5P^2 L^3}{8EI}$$

$$\Rightarrow U^* = \frac{23P^2 L^3}{24EI}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

- Energia Complementar:

$$\Rightarrow U^* = \frac{23P^2L^3}{24EI}$$

- Trabalho:

$$W = \frac{1}{2}P\delta$$

- Deslocamento:

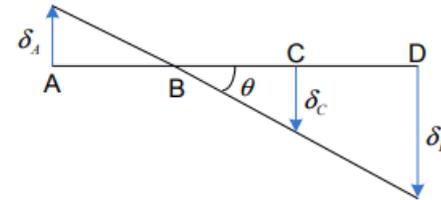
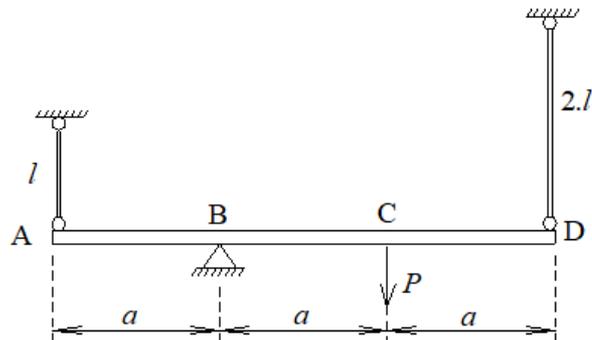
$$W = U = U^* \Rightarrow \frac{1}{2}P\delta = \frac{23P^2L^3}{24EI} \Rightarrow \delta = \frac{23PL^3}{12EI}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Exercício

A estrutura da figura é formada por duas hastes verticais, de mesma rigidez axial EA , e uma barra horizontal rígida (indeformável) $ABCD$. As hastes possuem comprimentos l e $2l$, conforme indicado na figura, e estão articuladas à barra horizontal, que se encontra simplesmente apoiada em B . Considerando que uma única força vertical de intensidade P seja aplicada em C , determine o ângulo de rotação θ da barra horizontal.



a) Trabalho realizado pela força P :

$$W = \frac{P\delta_C}{2} = \frac{P\theta a}{2}$$

b) Energia de deformação:

$$U = U^{(1)} + U^{(2)}$$

$$U^{(1)} = \frac{EA}{l} \frac{\delta_A^2}{2} = \frac{EA}{l} \frac{\theta^2 a^2}{2}$$

$$U^{(2)} = \frac{EA}{2l} \frac{\delta_D^2}{2} = \frac{EA}{l} \theta^2 a^2$$

$$\Rightarrow U = \frac{3EA}{2l} \theta^2 a^2$$

c) Princípio do Trabalho e da Energia:

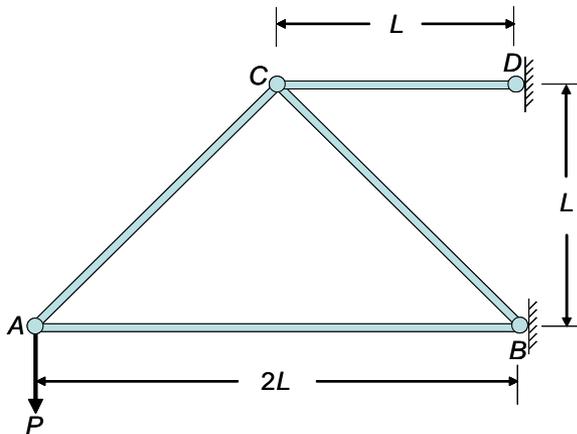
$$W = U \Rightarrow \theta = \frac{1}{3} \frac{P}{EA} \frac{l}{a}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Exercício

A treliça da figura é formada por barras com rigidez axial EA dada e está contida em um plano vertical. Sabendo que ela está submetida a uma força P aplicada ao seu nó A , pede-se determinar o deslocamento vertical do nó A .



- Forças nas barras:

$$F_{AC} = P\sqrt{2} \quad F_{AB} = -P \quad F_{BC} = -P\sqrt{2} \quad F_{CD} = 2P$$

- Energia complementar:

$$U^* = \sum_{i=1}^n \frac{N_i^2 l_i}{2EA}$$
$$= \frac{1}{2EA} [P^2 2L + 2P^2 L\sqrt{2} + 2P^2 L\sqrt{2} + 4P^2 L]$$

$$\Rightarrow U^* = \frac{P^2 L}{EA} [3 + 2\sqrt{2}]$$

- Deslocamento:

$$W = U = U^*$$

$$\Rightarrow \frac{P\delta}{2} = \frac{P^2 L}{EA} [3 + 2\sqrt{2}]$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{2PL}{EA} [3 + 2\sqrt{2}]$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referência

Martins, C.A. *Introdução ao Estudo das Energias de Deformação e Complementar*. Disponível no Moodle