



*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo  
Departamento de Engenharia Mecânica*

*PME-3211 – Mecânica dos Sólidos II*

*Aula #15*

*Prof. Dr. Clóvis de Arruda Martins*

*10/10/2023*



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

***Critério de von Mises (1913)***

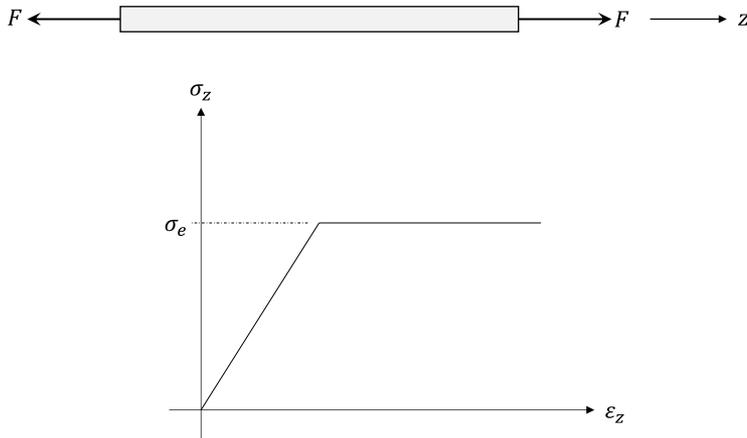
- Postula que um material dúctil atinge o seu limite de resistência quando a energia acumulada pela distorção atinge um certo valor limite
- Também é chamado de *Critério da Energia de Distorção Máxima*
- Equivale a dizer que o que governa a resistência de materiais dúcteis é a *Tensão Equivalente de von Mises*

$$F([T]) = \sigma_{eq} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}$$



## Critério de von Mises

- Ensaio de tração



- Quando o material atinge o escoamento

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_e \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \sigma_1 = \sigma_e \\ \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \end{array}$$

$$\sigma_{eq} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}$$

$$\mathbb{C} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_e - 0)^2 + (\sigma_e - 0)^2 + (0 - 0)^2}$$

$$\mathbb{C} = \sigma_e$$

$$FS = \frac{\sigma_e}{\sigma_{eq}}$$



**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

**Exercício**

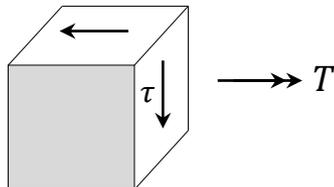
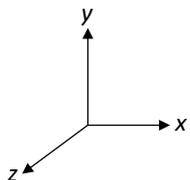
Uma liga de alumínio com tensão de escoamento de  $255 \text{ MPa}$  deve ser usada em um eixo de acionamento para que transmita  $50 \text{ hp}$  a  $1800 \text{ rpm}$ . Usando um fator de segurança igual a 2, determine o menor diâmetro que deve ter o eixo usando o critério de von Mises.

$$P = 50 \text{ hp} = 50 \times 745,7 \text{ W} = 37285 \text{ W}$$

$$\omega = 1800 \text{ rpm} = 1800 \times \frac{2\pi}{60} \text{ rad/s} = 188,5 \text{ rad/s}$$

$$P = T \times \omega \Rightarrow T = \frac{P}{\omega} \Rightarrow T = 198 \text{ Nm}$$

$$\tau = \frac{T d}{I_p 2} = \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{1008}{d^3} \quad \begin{array}{l} \tau \rightarrow \text{Pa} \\ d \rightarrow \text{m} \end{array}$$



$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & -\tau & 0 \\ -\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \sigma_1 = \tau \\ \sigma_2 = 0 \\ \sigma_3 = -\tau \end{array}$$

$$\sigma_{eq} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}$$

$$\sigma_{eq} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\tau^2 + 4\tau^2 + \tau^2} \Rightarrow \sigma_{eq} = \sqrt{3} \tau$$

$$FS = \frac{\sigma_e}{\sigma_{eq}}$$

$$\Rightarrow 2 = \frac{255 \times 10^6}{\sqrt{3}} \frac{d^3}{1008}$$

$$\Rightarrow d = 0,024 \text{ m}$$

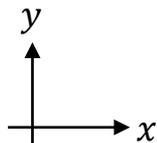
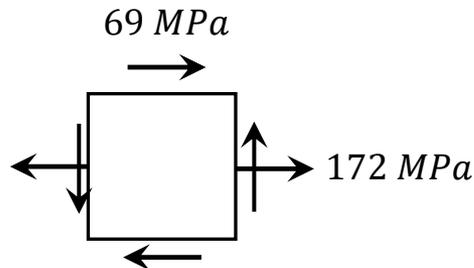


**Escola Politécnica da Universidade de São Paulo**  
**Departamento de Engenharia Mecânica**

**Exercício**

O elemento infinitesimal mostra as tensões no ponto crítico de uma estrutura. Determine o menor limite de escoamento que deve ter o material usando:

- a) o critério de von Mises
- b) o critério de Tresca



$$[T] = \begin{bmatrix} 172 & 69 & 0 \\ 69 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_1 = 196 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = -24 \text{ MPa}$$

a) 
$$\sigma_{eq} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}$$
$$\sigma_{eq} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(196)^2 + (196 + 24)^2 + (24)^2} = 209 \text{ MPa}$$

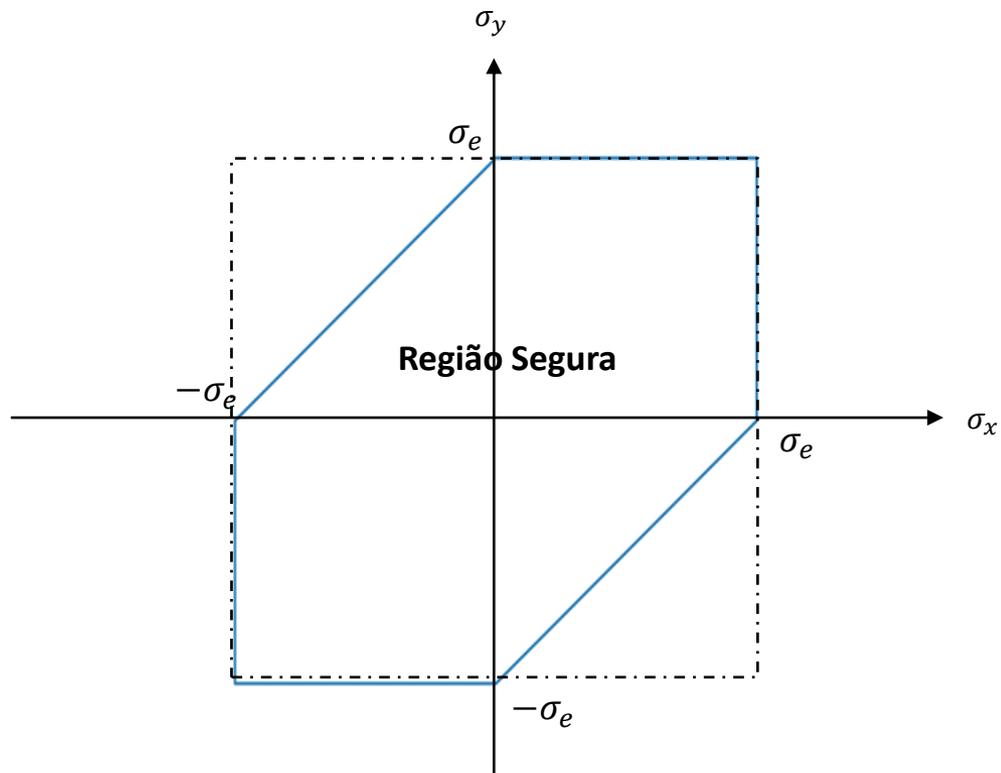
$$\sigma_e \geq \sigma_{eq} \Rightarrow \sigma_e \geq 209 \text{ MPa}$$

b) 
$$\sigma_e \geq \sigma_1 - \sigma_3 \Rightarrow \sigma_e \geq 220 \text{ MPa}$$



***Critério de Tresca – Estado Plano de Tensões***

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_e$$



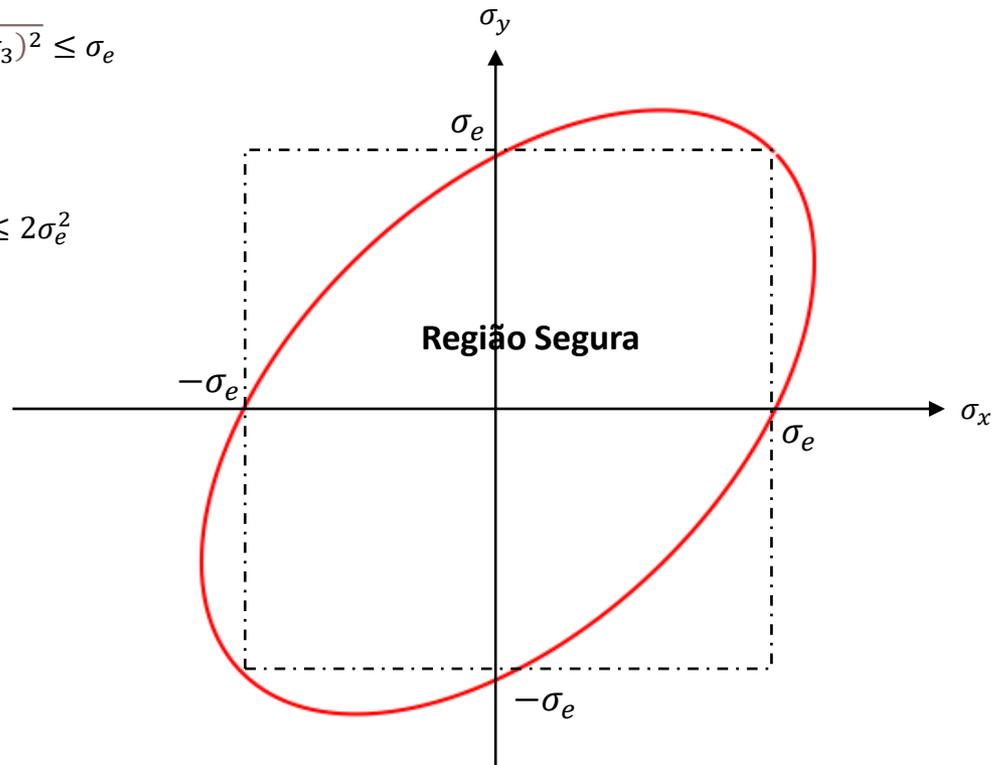


***Critério de von Mises – Estado Plano de Tensões***

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} \leq \sigma_e$$

ou

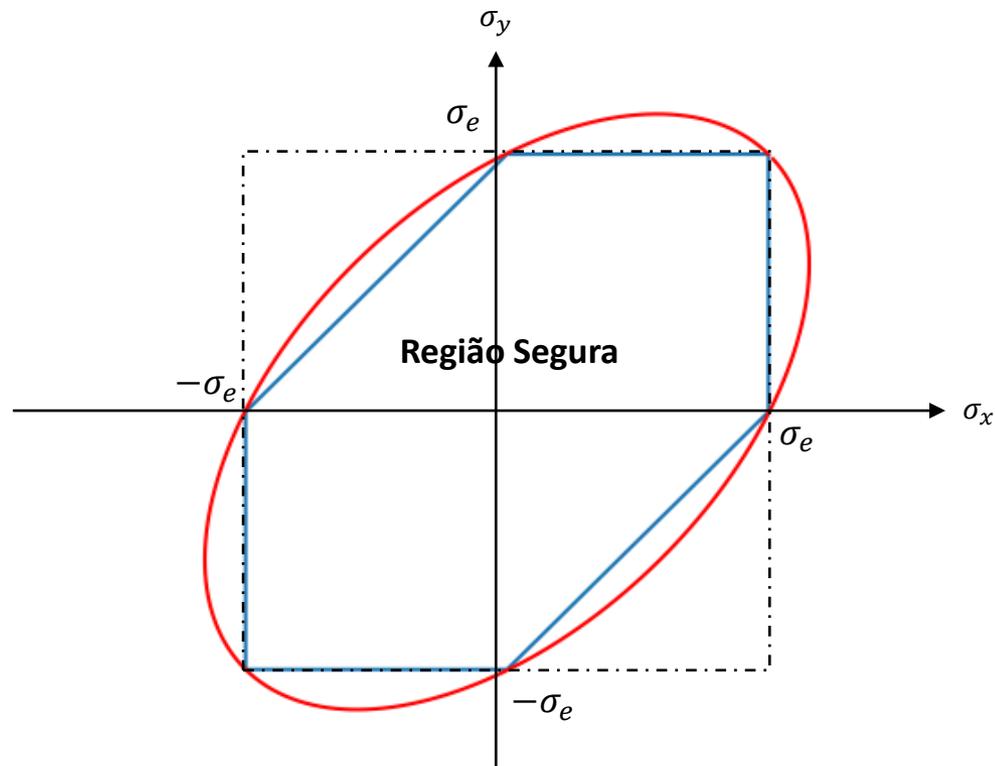
$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \leq 2\sigma_e^2$$





*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*  
*Departamento de Engenharia Mecânica*

***Comparação entre critérios de Tresca e von Mises – Estado Plano de Tensões***





***Escola Politécnica da Universidade de São Paulo***  
***Departamento de Engenharia Mecânica***

***Referência***

Martins, C.A. *Introdução ao Estudo das Tensões*. Disponível no Moodle