Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

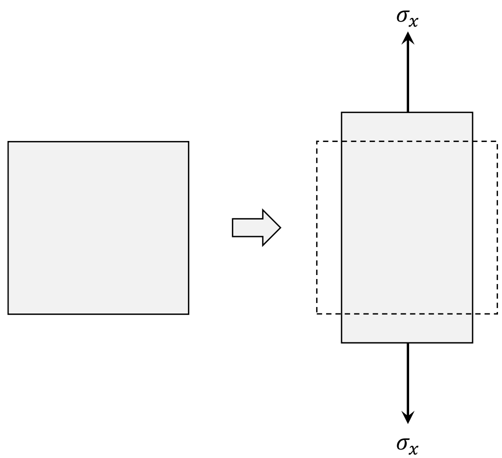
PME-3211 – Mecânica dos Sólidos II

Aula #11

Prof. Dr. Clóvis de Arruda Martins

26/09/2023

Lei de Hooke – Alongamentos



- Para material de comportamento *elástico linear*

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \quad \text{ou} \quad \varepsilon_x = \frac{1}{E}\sigma_x$$

- Nas direções transversais

$$\varepsilon_y = -\frac{\nu}{E}\sigma_x \quad \text{e} \quad \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}\sigma_x$$

- O *módulo de elasticidade* E e o *coeficiente de Poisson* são propriedades do material

- No estado de tensão completo

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right]$$

Lei de Hooke – Alongamentos

- As equações

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right]$$

permitem calcular os deslocamentos em função das tensões

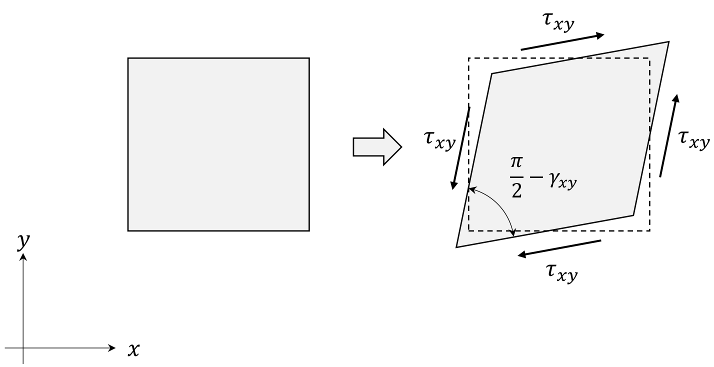
- Mas esse sistema de equações pode ser invertido, para calcular as tensões a partir das deformações:

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_x + \nu\left(\varepsilon_y + \varepsilon_z\right)\right]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_y + \nu\left(\varepsilon_x + \varepsilon_z\right)\right]$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_z + \nu\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y\right)\right]$$

Lei de Hooke - Distorções



- Para material de comportamento elástico e linear:

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} \qquad \gamma_{xz} = \frac{1}{G}\tau_{xz}$$

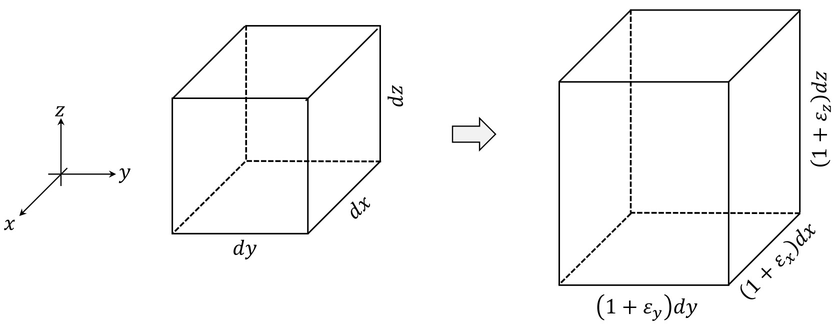
$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz}$$

- G é o *módulo de elasticidade ao cisalhamento* ou, simplesmente, *módulo de cisalhamento*

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

- Note que, se *x*, *y* e *z* forem direções principais de tensões, pela lei de Hooke também serão direções principais de deformações

Dilatação volumétrica



- Volume inicial

$$V_0 = dxdydz$$

- Volume após a deformação

$$V = (1+\varepsilon_x)dx(1+\varepsilon_y)dy(1+\varepsilon_z)dz$$

- Variação de volume

$$\delta V = V - V_0$$
$$= (1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z)dxdydz$$
$$-dxdydz$$

- Para pequenas deformações

$$\delta V = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)dxdydz$$

- Deformação por unidade de volume ou *deformação volumétrica*

$$e = \frac{\delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

- Em função das tensões

$$e = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

- Note que para $\nu = 0{,}5$ o material é incompressível

Exercício

Uma placa retangular em tensão biaxial está submetida a tensões normais $\sigma_x = 65\ MPa$ e $\sigma_y = -20\ MPa$. A placa tem dimensões 200 x 300 x 15 mm e é feita de alumínio com $E = 75GPa$ e $\nu = 0,33$.

a) Determine a distorção máxima no plano da placa $\gamma_{máx}$

b) Determine a variação Δt na espessura da placa

c) Determine a variação ΔV no volume da placa

a)

$$\sigma_z = 0$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\ \sigma_y) = 955\mu = \varepsilon_1$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\ \sigma_x) = -553\mu = \varepsilon_3$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) = -198\mu = \varepsilon_2$$

$$\gamma_{máx} = \varepsilon_1 - \varepsilon_3 = 1508\mu$$

b)

$$\Delta t = \varepsilon_z\ t\ = 2{,}97 \cdot 10^{-3}\ mm$$

c)

$$\delta V = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)\ a\ b\ c = 184\ mm^3$$

Exercício

Uma placa de magnésio em tensão biaxial está submetida a tensões de tração $\sigma_x = 30\ MPa$ e $\sigma_y = 15\ MPa$. As deformações correspondentes na placa são $\varepsilon_x = 550\mu$ e $\varepsilon_y = 100\mu$. Determine o coeficiente de Poisson ν e o módulo de elasticidade E do material.

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\sigma_y\right)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\sigma_x\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y} = \frac{\sigma_x - \nu\sigma_y}{\sigma_y - \nu\sigma_x}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_x\sigma_y - \nu\varepsilon_x\sigma_x = \varepsilon_y\sigma_x - \nu\varepsilon_y\,\sigma_y$$

$$\Rightarrow \nu\left(\varepsilon_x\sigma_x - \varepsilon_y\sigma_y\right) = \varepsilon_x\sigma_y - \varepsilon_y\sigma_x$$

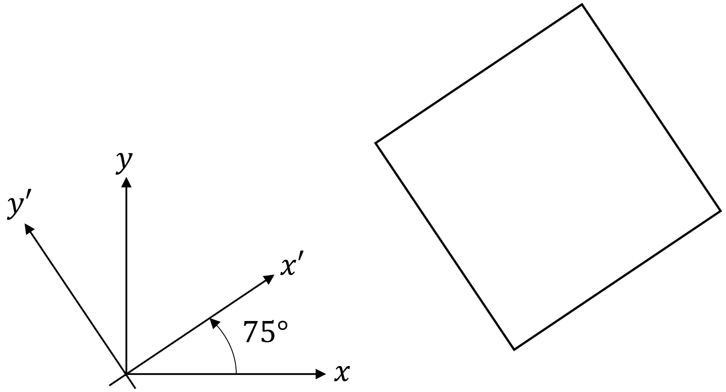
$$\Rightarrow \nu = \frac{\varepsilon_x\sigma_y - \varepsilon_y\sigma_x}{\varepsilon_x\sigma_x - \varepsilon_y\sigma_y} \quad \Rightarrow \nu = 0{,}35$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{\varepsilon_x}\left(\sigma_x - \nu\sigma_y\right)$$

$$\Rightarrow E = 45\ GPa$$

Exercício

Um elemento de material em estado plano de deformações está submetido às deformações $\varepsilon_x = 480\mu$, $\varepsilon_y = 70\mu$ e $\gamma_{xy} = 420\mu$.
Determine:
a) as deformações para um elemento orientado em um ângulo de $75°$,
b) as deformações principais
c) a distorção máxima



a)

$$[E] = \begin{bmatrix} 480 & 210 \\ 210 & 70 \end{bmatrix} \mu$$

$$\varepsilon_{x'} = \begin{Bmatrix} \cos 75 \\ \operatorname{sen} 75 \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} 480 & 210 \\ 210 & 70 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos 75 \\ \operatorname{sen} 75 \end{Bmatrix} \mu$$
$$= 202\mu$$

$$\varepsilon_{y'} = \begin{Bmatrix} -\operatorname{sen} 75 \\ \cos 75 \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} 480 & 210 \\ 210 & 70 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\operatorname{sen} 75 \\ \cos 75 \end{Bmatrix} \mu$$
$$= 348\mu$$

(Note que $\varepsilon_x + \varepsilon_y = \varepsilon_{x'} + \varepsilon_{y'}$)

$$\gamma_{x'y'} = 2 * \begin{Bmatrix} \cos 75 \\ \operatorname{sen} 75 \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} 480 & 210 \\ 210 & 70 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\operatorname{sen} 75 \\ \cos 75 \end{Bmatrix} \mu$$
$$= -569\mu$$

Exercício

Um elemento de material em estado plano de deformações está submetido às deformações $\varepsilon_x = 480\mu$, $\varepsilon_y = 70\mu$ e $\gamma_{xy} = 420\mu$.

Determine:

a) as deformações para um elemento orientado em um ângulo de $75°$,

b) as deformações principais

c) a distorção máxima

b)

$$\begin{vmatrix} 480-\varepsilon & 210 \\ 210 & 70-\varepsilon \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (480-\varepsilon) * (70-\varepsilon) - 210^2 = 0$$

$$\Rightarrow \varepsilon^2 - 550\varepsilon - 10500 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_1 = 568\mu \\ \varepsilon_2 = 0 \\ \varepsilon_3 = -18\mu \end{cases}$$

(Note que $\varepsilon_x + \varepsilon_y = \varepsilon_1 + \varepsilon_3$)

c)

$$\gamma_{máx} = \varepsilon_1 - \varepsilon_3 = 586\mu$$

Referência

Martins, C.A. *Introdução ao Estudo das Deformações.* Disponível no Moodle

Gere, J.M. & Goodno, B.J. *Mecânica dos Materiais* – 7ª edição – Capítulos 7