



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3211 – Mecânica dos Sólidos II

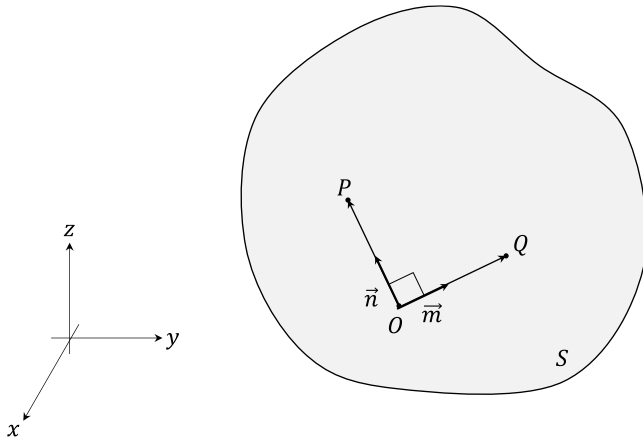
Aula #10

Prof. Dr. Clóvis de Arruda Martins

20/09/2023



Distorção entre duas direções perpendiculares



$$d\vec{r}_P = (P - O) = \begin{Bmatrix} dx_P \\ dy_P \\ dz_P \end{Bmatrix}$$

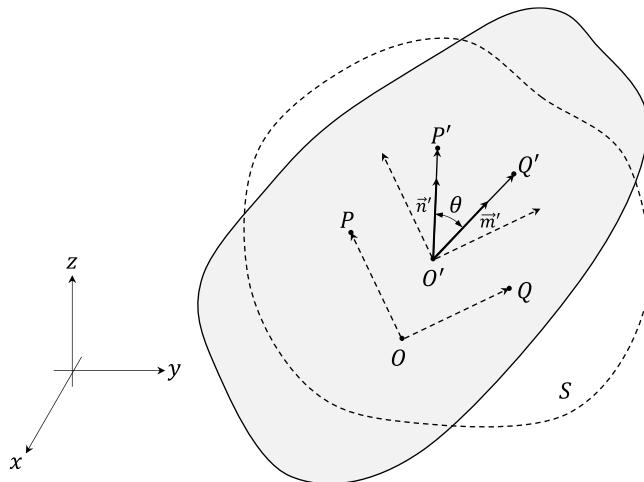
$$\vec{n} = \frac{(P - O)}{|P - O|} = \frac{d\vec{r}_P}{dr_P} = \frac{1}{dr_P} \begin{Bmatrix} dx_P \\ dy_P \\ dz_P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}$$

$$d\vec{r}_Q = (Q - O) = \begin{Bmatrix} dx_Q \\ dy_Q \\ dz_Q \end{Bmatrix}$$

$$\vec{m} = \frac{(Q - O)}{|Q - O|} = \frac{d\vec{r}_Q}{dr_Q} = \frac{1}{dr_Q} \begin{Bmatrix} dx_Q \\ dy_Q \\ dz_Q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{Bmatrix}$$

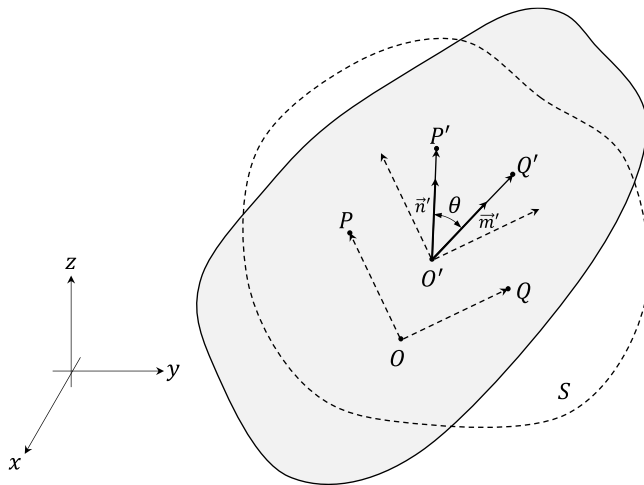
$$\vec{n}' = \frac{(P' - O')}{|P' - O'|}$$

$$\vec{m}' = \frac{(Q' - O')}{|Q' - O'|}$$





Distorção entre duas direções perpendiculares



$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \gamma$$

$$\cos \theta = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \gamma \right) = \sin \gamma$$

Para pequenas deformações

$$\gamma = \cos \theta$$

Mas

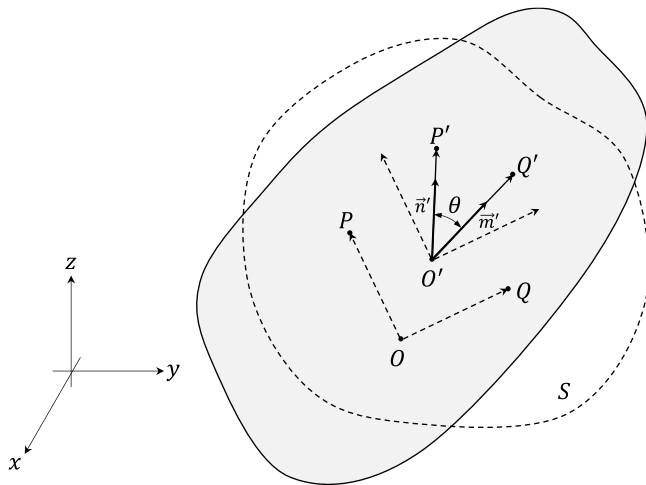
$$\vec{n}' \cdot \vec{m}' = \cos \theta$$

Então:

$$\gamma = \vec{n}' \cdot \vec{m}'$$



Distorção entre duas direções perpendiculares



$$|P' - O'| = (1 + \varepsilon_P)|P - O| = (1 + \varepsilon_P)dr_P$$

$$\vec{n}' = \frac{(P' - P) + (P - O) - (O' - O)}{(1 + \varepsilon_P)dr_P}$$

$$(P' - P) = \begin{pmatrix} u(P) \\ v(P) \\ w(P) \end{pmatrix}$$

$$(O' - O) = \begin{pmatrix} u(O) \\ v(O) \\ w(O) \end{pmatrix}$$

$$\vec{n}' = \frac{1}{dr_P(1 + \varepsilon_P)} \left[\begin{pmatrix} dx_P \\ dy_P \\ dz_P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u(P) - u(O) \\ v(P) - v(O) \\ w(P) - w(O) \end{pmatrix} \right]$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Distorção entre duas direções perpendiculares

$$\vec{n}' = \frac{1}{dr_P(1 + \varepsilon_P)} \left[\begin{pmatrix} dx_P \\ dy_P \\ dz_P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u(P) - u(O) \\ v(P) - v(O) \\ w(P) - w(O) \end{pmatrix} \right]$$

$$u(P) - u(O) = \frac{\partial u}{\partial x} dx_P + \frac{\partial u}{\partial y} dy_P + \frac{\partial u}{\partial z} dz_P$$

$$v(P) - v(O) = \frac{\partial v}{\partial x} dx_P + \frac{\partial v}{\partial y} dy_P + \frac{\partial v}{\partial z} dz_P$$

$$w(P) - w(O) = \frac{\partial w}{\partial x} dx_P + \frac{\partial w}{\partial y} dy_P + \frac{\partial w}{\partial z} dz_P$$

$$n'_x = \frac{dx_P + \frac{\partial u}{\partial x} dx_P + \frac{\partial u}{\partial y} dy_P + \frac{\partial u}{\partial z} dz_P}{dr_P(1 + \varepsilon_P)}$$

$$n'_x = \frac{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y + \frac{\partial u}{\partial z} n_z}{(1 + \varepsilon_P)}$$

Pequenas deformações:

$$n'_x = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon_P\right) n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y + \frac{\partial u}{\partial z} n_z$$

Analogamente:

$$n'_y = \frac{\partial v}{\partial x} n_x + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} - \varepsilon_P\right) n_y + \frac{\partial v}{\partial z} n_z$$

$$n'_z = \frac{\partial w}{\partial x} n_x + \frac{\partial w}{\partial y} n_y + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} - \varepsilon_P\right) n_z$$

$$m'_x = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon_Q\right) m_x + \frac{\partial u}{\partial y} m_y + \frac{\partial u}{\partial z} m_z$$

$$m'_y = \frac{\partial v}{\partial x} m_x + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} - \varepsilon_Q\right) m_y + \frac{\partial v}{\partial z} m_z$$

$$m'_z = \frac{\partial w}{\partial x} m_x + \frac{\partial w}{\partial y} m_y + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z} - \varepsilon_Q\right) m_z$$



Distorção entre duas direções perpendiculares

$$\gamma(\vec{n}, \vec{m}) = n'_x m'_x + n'_y m'_y + n'_z m'_z$$

Então:

Considerando pequenas deformações:

$$\begin{aligned} \gamma(\vec{n}, \vec{m}) &= (1 - \varepsilon_P - \varepsilon_Q)(n_x m_x + n_y m_y + n_z m_z) \\ &+ 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} n_x m_x + \frac{\partial v}{\partial y} n_y m_y + \frac{\partial w}{\partial z} n_z m_z \right) \\ &+ \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_y m_x + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) n_z m_x \\ &+ \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_x m_y + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) n_x m_z \\ &+ \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) n_y m_z + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) n_z m_y \end{aligned}$$

Como:

$$n_x m_x + n_y m_y + n_z m_z = 0$$

$$\begin{aligned} \gamma(\vec{n}, \vec{m}) &= 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} n_x m_x + \frac{\partial v}{\partial y} n_y m_y + \frac{\partial w}{\partial z} n_z m_z \right) \\ &+ \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_y m_x + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) n_z m_x \\ &+ \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_x m_y + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) n_x m_z \\ &+ \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) n_y m_z + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) n_z m_y \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \gamma(\vec{n}, \vec{m}) &= 2(\varepsilon_x n_x m_x + \varepsilon_y n_y m_y + \varepsilon_z n_z m_z) \\ &+ \gamma_{xy}(n_y m_x + n_x m_y) \\ &+ \gamma_{xz}(n_z m_x + n_x m_z) \\ &+ \gamma_{yz}(n_y m_z + n_z m_y) \end{aligned}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Distorção entre duas direções perpendiculares

$$\begin{aligned}
 \gamma(\vec{n}, \vec{m}) &= 2(\varepsilon_x n_x m_x + \varepsilon_y n_y m_y + \varepsilon_z n_z m_z) \\
 &+ \gamma_{xy}(n_y m_x + n_x m_y) \\
 &+ \gamma_{xz}(n_z m_x + n_x m_z) \\
 &+ \gamma_{yz}(n_y m_z + n_z m_y)
 \end{aligned}
 \Rightarrow \gamma(\vec{n}, \vec{m}) = 2 \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}$$

$$=$$

$$\gamma(\vec{n}, \vec{m}) = 2 \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{Bmatrix}$$

Na forma tensorial:

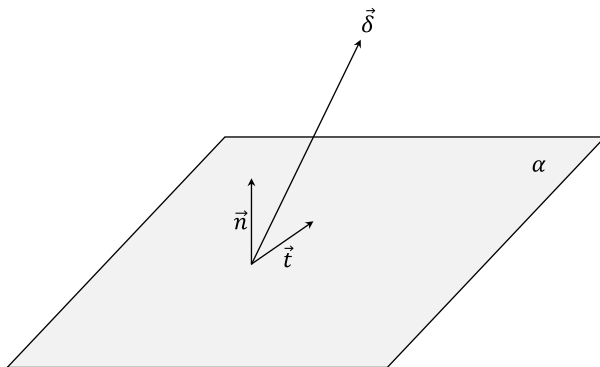
$$\gamma(\vec{n}, \vec{m}) = 2(E[\vec{n}] \cdot \vec{m}) = 2(E[\vec{m}] \cdot \vec{n})$$



Vetor deformação

- Definição

$$\vec{\delta}(\vec{n}) = E[\vec{n}]$$



$\vec{n}$ e $\vec{t}$ são versores

- Componentes

$$\vec{\delta}(\vec{n}) = a \vec{n} + b \vec{t}$$

$$a = \vec{\delta}(\vec{n}) \cdot \vec{n} = E[\vec{n}] \cdot \vec{n} = \varepsilon(\vec{n})$$

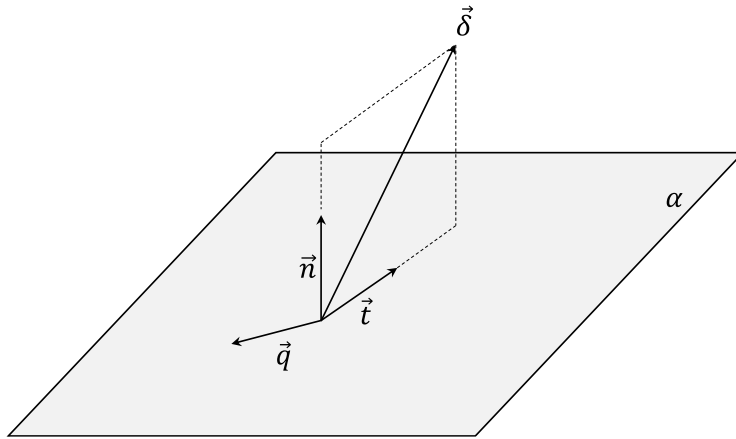
$$b = \vec{\delta}(\vec{n}) \cdot \vec{t} = E[\vec{n}] \cdot \vec{t} = \frac{1}{2} \gamma(\vec{n}, \vec{t})$$

$$\Rightarrow \vec{\delta}(\vec{n}) = \varepsilon(\vec{n}) \vec{n} + \frac{1}{2} \gamma(\vec{n}, \vec{t}) \vec{t}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Distorção máxima



- Seja o versor $\vec{q} \parallel \alpha$

- Então:

$$|\gamma(\vec{n}, \vec{q})| \leq |\gamma(\vec{n}, \vec{t})|$$

- Prova:

$$\begin{aligned}\gamma(\vec{n}, \vec{q}) &= 2E[\vec{n}] \cdot \vec{q} = 2\vec{\delta}(\vec{n}) \cdot \vec{q} \\ &= 2 \left(\varepsilon(\vec{n})\vec{n} + \frac{1}{2}\gamma(\vec{n}, \vec{t})\vec{t} \right) \cdot \vec{q} \\ &= \gamma(\vec{n}, \vec{t})(\vec{t} \cdot \vec{q})\end{aligned}$$

mas

$$|\vec{t} \cdot \vec{q}| \leq 1$$

então:

$$|\gamma(\vec{n}, \vec{q})| \leq |\gamma(\vec{n}, \vec{t})|$$

- Notação:

$$\bar{\gamma}(\vec{n}) = \gamma(\vec{n}, \vec{t})$$



Deformações principais e direções principais de deformação

- $\vec{m}$ é uma direção principal de deformação se for nula a distorção entre $\vec{m}$ e qualquer direção ortogonal a $\vec{m}$, ou seja, se:

$$\vec{\delta}(\vec{m}) = \varepsilon \vec{m}$$

- Então:

$$E[\vec{m}] - \varepsilon \vec{m} = 0$$

- Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{Bmatrix} - \varepsilon \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y - \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z - \varepsilon \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Deformações principais e direções principais de deformação

- O sistema de equações algébricas lineares:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y - \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z - \varepsilon \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- Admite a solução trivial:

$$m_x = m_y = m_z = 0$$

- Para que ele tenha mais de uma solução é necessário que:

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y - \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z - \varepsilon \end{vmatrix} = 0$$



Deformações principais e direções principais de deformação

- Equação característica:

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y - \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z - \varepsilon \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \varepsilon^3 - K_1\varepsilon^2 + K_2\varepsilon - K_3 = 0$$

onde:

$$K_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$K_2 = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \varepsilon_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix}$$

$$K_3 = |E|$$

são invariantes



Deformações principais e direções principais de deformação

- Como o tensor E é simétrico, a equação característica admite três raízes reais:

$$\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$$

- Essas raízes são as *deformações principais* e são os *autovalores* de $[E]$
- Os autovetores associados a esses autovalores representam as *direções principais de deformação*:

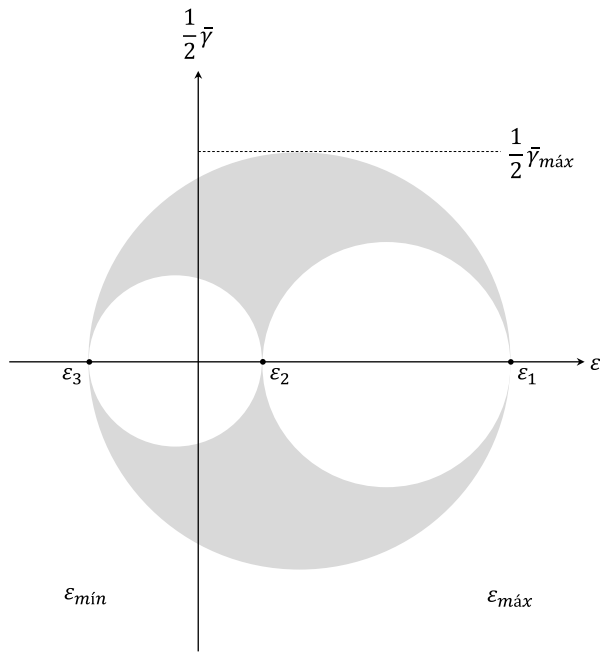
$$\vec{m}_1, \vec{m}_2 \text{ e } \vec{m}_3$$

- A simetria de $[E]$ implica que:

$$\vec{m}_1 \perp \vec{m}_2 \perp \vec{m}_3$$



Círculos de Mohr das deformações



- A simetria de $[E]$ também implica na existência dos *círculos de Mohr* para as deformações
- O menor alongamento é ε_3
- O maior alongamento é ε_1
- A máxima distorção é

$$\gamma_{máx} = \varepsilon_1 - \varepsilon_3$$

que ocorre entre as direções $\vec{\xi}$ e $\vec{\eta}$ dadas por:

$$\vec{\xi} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{m}_1 + \vec{m}_3) \quad \vec{\eta} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{m}_1 - \vec{m}_3)$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referência

Martins, C.A. *Introdução ao Estudo das Deformações*. Disponível no Moodle