Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

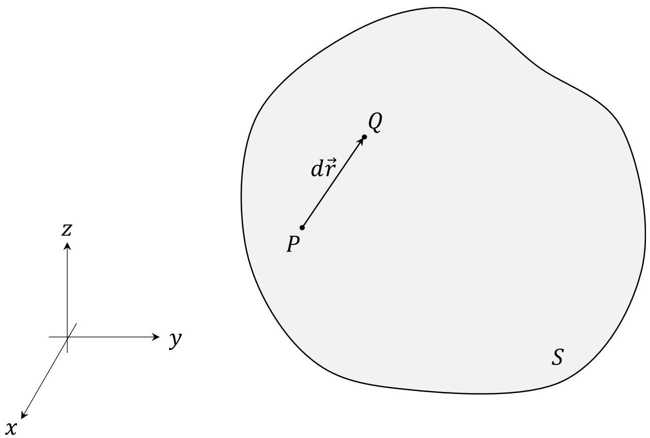
PME-3211 – Mecânica dos Sólidos II

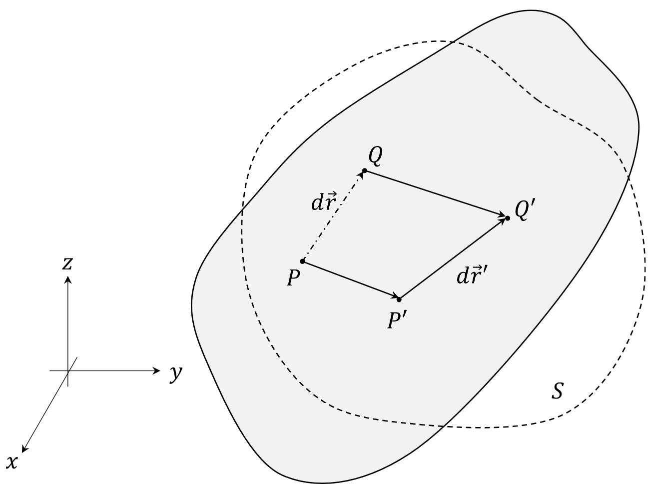
Aula #09

Prof. Dr. Clóvis de Arruda Martins

19/09/23

Alongamento em uma dada direção





- Seja $\vec{n}$ o versor de $(Q-P)$:

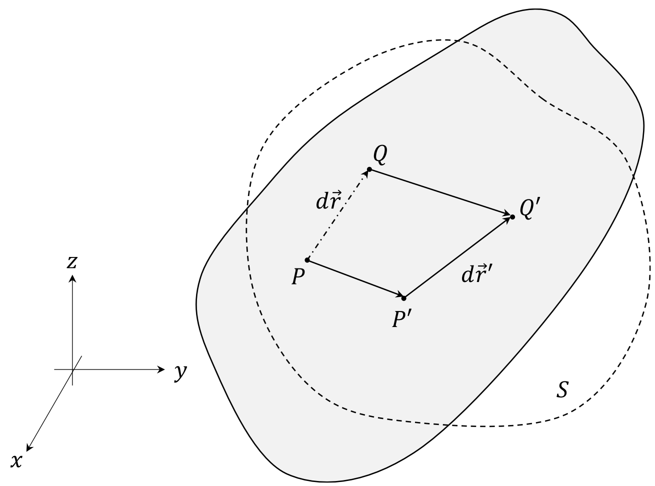
$$(Q-P) = d\vec{r} = \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix}$$

$$\vec{n} = \frac{d\vec{r}}{dr} = \begin{Bmatrix} \dfrac{dx}{dr} \\ \dfrac{dy}{dr} \\ \dfrac{dz}{dr} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}$$

- Sejam u, v e w funções que representam as componentes do deslocamento de um ponto:

$$(P'-P) = \begin{Bmatrix} u(P) \\ v(P) \\ w(P) \end{Bmatrix} \qquad (Q'-Q) = \begin{Bmatrix} u(Q) \\ v(Q) \\ w(Q) \end{Bmatrix}$$

Alongamento em uma dada direção



- O ponto P se moveu para uma nova posição P' e o ponto Q se moveu para uma nova posição Q':

$$d\vec{r}' = (Q' - P') = (Q' - Q) + (Q - P) - (P' - P)$$

$$d\vec{r}' = \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u(Q) - u(P) \\ v(Q) - v(P) \\ w(Q) - w(P) \end{Bmatrix}$$

- Do cálculo das funções de múltiplas variáveis:

$$u(Q) - u(P) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

$$v(Q) - v(P) = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz$$

$$w(Q) - w(P) = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz$$

Alongamento em um dada direção

- Então:

$$d\vec{r}' = \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u(Q) - u(P) \\ v(Q) - v(P) \\ w(Q) - w(P) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix}$$

- Definindo-se o alongamento ε com o aumento de um comprimento dividido pelo comprimento inicial, então na direção de $(Q - P)$, ou seja, na direção $\vec{n}$:

$$\varepsilon = \frac{dr' - dr}{dr}$$

$$dr' = (1 + \varepsilon)dr$$

$$dr'^2 = (1 + \varepsilon)^2 dr^2$$

$$dr^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r}$$

$$d\vec{r}'^2 = d\vec{r}' \cdot d\vec{r}'$$

Alongamento em uma dada direção

- Assim:

$$dr'^2 = \left(dx + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz\right)^2 + \left(dy + \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz\right)^2 + \left(dz + \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz\right)^2$$

$$\Rightarrow$$

$$(1+\varepsilon)^2 = \left[n_x\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) + n_y\frac{\partial u}{\partial y} + n_z\frac{\partial u}{\partial z}\right]^2 + \left[n_x\frac{\partial v}{\partial x} + n_y\left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + n_z\frac{\partial v}{\partial z}\right]^2 + \left[n_x\frac{\partial w}{\partial x} + n_y\frac{\partial w}{\partial y} + n_z\left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]^2$$

$$dr'^2 = (1+\varepsilon)^2 dr^2 \Rightarrow (1+\varepsilon)^2 = \frac{dr'^2}{dr^2}$$

Alongamento em uma dada direção

- Para pequenas deformações:

$$(1+\varepsilon)^2 = 1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2$$

$$(1+\varepsilon)^2 \cong 1 + 2\varepsilon$$

$$\begin{aligned}(1+\varepsilon)^2 &= \left[n_x\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right) + n_y\frac{\partial u}{\partial y} + n_z\frac{\partial u}{\partial z}\right]^2 \\ &+ \left[n_x\frac{\partial v}{\partial x} + n_y\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right) + n_z\frac{\partial v}{\partial z}\right]^2 \\ &+ \left[n_x\frac{\partial w}{\partial x} + n_y\frac{\partial w}{\partial y} + n_z\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1+2\varepsilon &= n_x^2\left(1+2\frac{\partial u}{\partial x}\right) + 2n_xn_y\frac{\partial u}{\partial y} + 2n_xn_z\frac{\partial u}{\partial z} + 2n_xn_y\frac{\partial v}{\partial x} \\ &+ n_y^2\left(1+2\frac{\partial v}{\partial y}\right) + 2n_yn_z\frac{\partial v}{\partial z} + 2n_xn_z\frac{\partial w}{\partial x} + 2n_yn_z\frac{\partial w}{\partial y} \\ &+ n_z^2\left(1+2\frac{\partial w}{\partial z}\right)\end{aligned}$$

Alongamento em uma dada direção

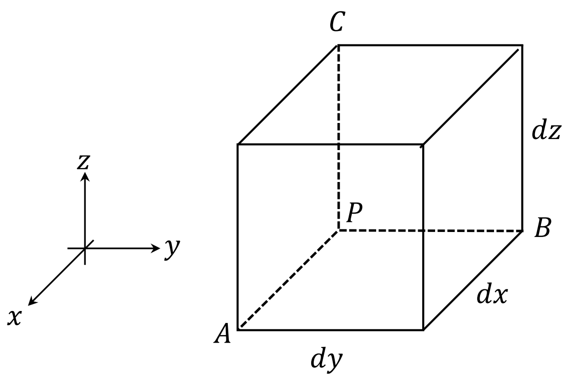
- Como:

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$$

- Então:

$$\varepsilon = n_x^2 \frac{\partial u}{\partial x} + n_y^2 \frac{\partial v}{\partial y} + n_z^2 \frac{\partial w}{\partial z} + n_x n_y \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + n_x n_z \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + n_y n_z \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

Componentes da deformação - alongamentos



- Suponhamos que o corpo sofreu um deslocamento na direção de x
- Se o deslocamento de P for u, o deslocamento de A foi:

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

- E a variação de comprimento do segmento PA foi:

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx$$

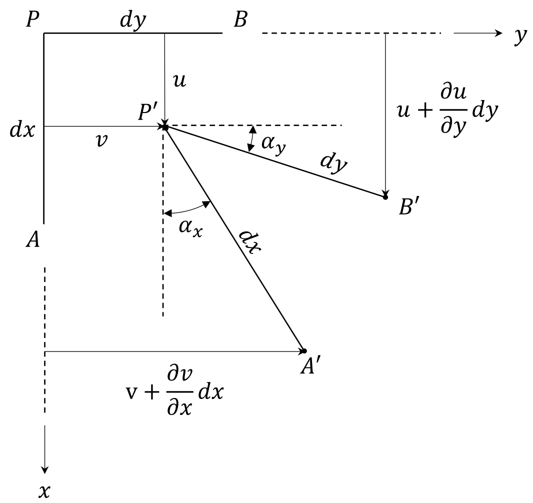
- Definindo o alongamento como a relação entre a variação do comprimento e o comprimento inicial, temos:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

- Analogamente:

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

Componentes da deformação - distorções



- Distorção é uma diminuição que sofreu um ângulo inicialmente reto
- Distorção entre as direções x e y:

$$\gamma_{xy} = \alpha_x + \alpha_y$$

- Da figura:

$$\operatorname{sen} \alpha_x = \frac{v + \frac{\partial v}{\partial x} dx - v}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

- Para pequenos ângulos:

$$\alpha_x = \frac{\partial v}{\partial x}$$

- Analogamente:

$$\alpha_y = \frac{\partial u}{\partial y}$$

- Portanto:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

- De maneira semelhante:

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{e} \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

Alongamento em uma dada direção

$$\varepsilon = n_x^2\frac{\partial u}{\partial x} + n_y^2\frac{\partial v}{\partial y} + n_z^2\frac{\partial w}{\partial z} + n_x n_y\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + n_x n_z\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + n_y n_z\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_x n_x^2 + \varepsilon_y n_y^2 + \varepsilon_z n_z^2 + \gamma_{xy} n_x n_y + \gamma_{xz} n_x n_z + \gamma_{yz} n_y n_z$$

$$\varepsilon(\vec{n}) = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}$$

$$\varepsilon(\vec{n}) = E[\vec{n}].\vec{n}$$

- $[E] \rightarrow$ *Tensor das Pequenas Deformações*

Exercício:

Dado o tensor das pequenas deformações, em relação a um sistema xyz:

$$[E] = \frac{\sigma_o}{E}\begin{bmatrix} 1 & 1+\nu & 0 \\ 1+\nu & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \end{bmatrix}$$

calcular o alongamento na direção:

$$\vec{n} = \{cos\,\theta\,,\ \text{sen}\theta, 0\}^t$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma_o}{E}\left[cos^2\,\theta - \nu.\,\text{sen}^2\theta + (1+\nu)\text{sen}(2\theta)\right]$$

Referência

Martins, C.A. *Introdução ao Estudo das Deformações.* Disponível no Moodle