Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3211 – Mecânica dos Sólidos II

Aula #05

Prof. Dr. Clóvis de Arruda Martins

22/08/2023

Círculos de Mohr

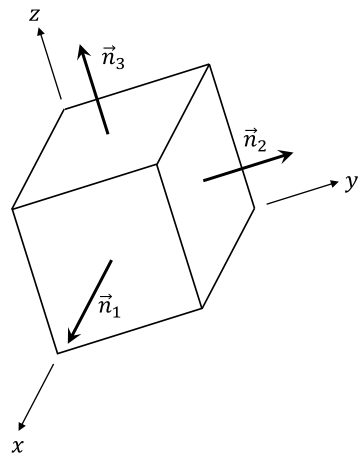
- Sabemos calcular a tensão $\vec{\rho}$ em um ponto P associada a uma direção $\vec{n}$:

$$\rho = T[\vec{n}] \quad \text{ou} \quad \begin{Bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}$$

- Perguntas da Mecânica dos Sólidos:
  - Qual é a tensão normal máxima?
  - Qual é a tensão normal mínima?
  - Qual é a tensão de cisalhamento máxima?

- Para responder a estas perguntas, vamos determinar qual é o lugar geométrico que representa o campo de tensões em um ponto P

- Sistema de eixos coincidindo com as direções principais:



$$[T] = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\rho} = \begin{Bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 n_x \\ \sigma_2 n_y \\ \sigma_3 n_z \end{Bmatrix}$$

$$\sigma = \vec{\rho} \cdot \vec{n} = \sigma_1 n_x^2 + \sigma_2 n_y^2 + \sigma_3 n_z^2 \quad (1)$$

$$\rho^2 = \sigma^2 + \tau^2$$

$$\sigma_1^2 n_x^2 + \sigma_2^2 n_y^2 + \sigma_3^2 n_z^2 = \sigma^2 + \tau^2 \quad (2)$$

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 \quad (3)$$

- (1), (2) e (3) na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x^2 \\ n_y^2 \\ n_z^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma \\ \sigma^2 + \tau^2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

- É um sistema de três equações algébricas a três incógnitas n_x^2, n_y^2 e n_z^2

- Obviamente essas incógnitas têm que ter valores positivos ou nulos!

- Solução do sistema

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x^2 \\ n_y^2 \\ n_z^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma \\ \sigma^2 + \tau^2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

- Vamos supor que as três tensões principais sejam distintas, ou seja,

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

$$n_x^2 = \frac{(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) + \tau^2}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} \geq 0 \quad \Rightarrow (\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) + \tau^2 \geq 0 \quad (1)$$

$$n_y^2 = \frac{(\sigma - \sigma_3)(\sigma - \sigma_1) + \tau^2}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)} \geq 0 \quad \Rightarrow (\sigma - \sigma_3)(\sigma - \sigma_1) + \tau^2 \leq 0 \quad (2)$$

$$n_z^2 = \frac{(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2) + \tau^2}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)} \geq 0 \quad \Rightarrow (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2) + \tau^2 \geq 0 \quad (3)$$

- O lugar geométrico dos pares (σ, τ) possíveis tem que satisfazer, simultaneamente, as inequações (1), (2) e (3)

- Inequação (1)

$$(\sigma-\sigma_2)(\sigma-\sigma_3)+\tau^2\geq 0 \Rightarrow \left[\sigma-\left(\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)\right]^2+\tau^2\geq\left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2$$

é a região externa ao círculo de centro

$$C_1=\left(\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2},0\right)$$

e raio

$$R_1=\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}$$

incluindo a sua borda

- Inequação (2)

$$(\sigma - \sigma_3)(\sigma - \sigma_1) + \tau^2 \leq 0 \Rightarrow \left[\sigma - \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)\right]^2 + \tau^2 \leq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2$$

é o círculo de centro

$$C_2 = \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, 0\right)$$

e raio

$$R_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

- Inequação (3)

$$(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2) + \tau^2 \geq 0 \Rightarrow \left[\sigma - \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)\right]^2 + \tau^2 \geq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2$$

é a região externa ao círculo de centro

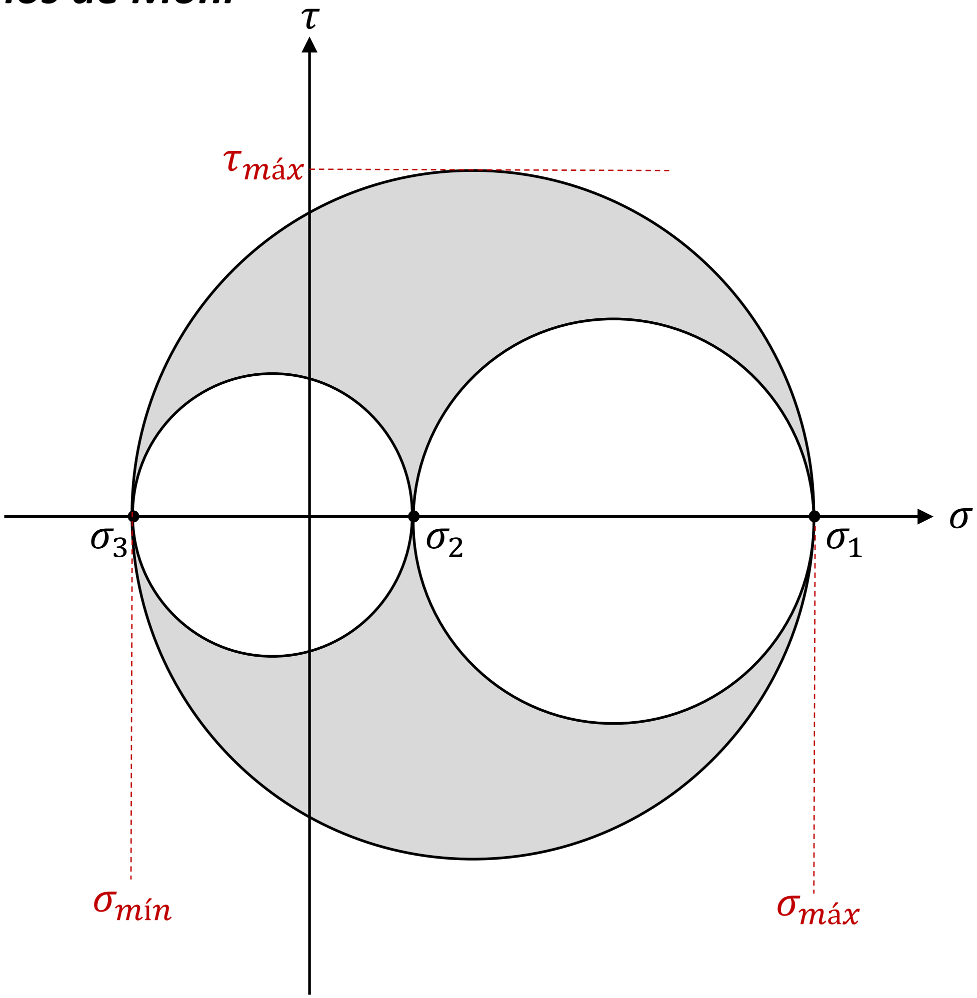
$$C_3 = \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0\right)$$

e raio

$$R_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

incluindo a sua borda

Círculos de Mohr

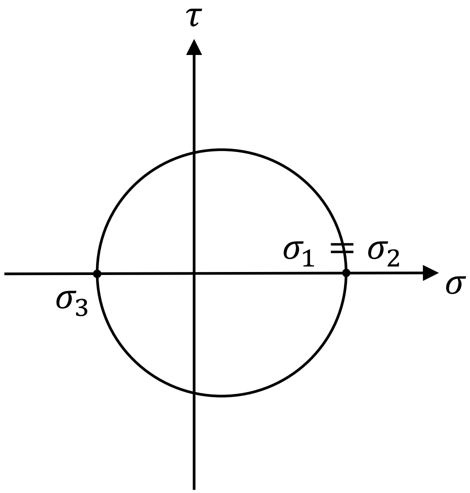


$$\tau_{máx} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

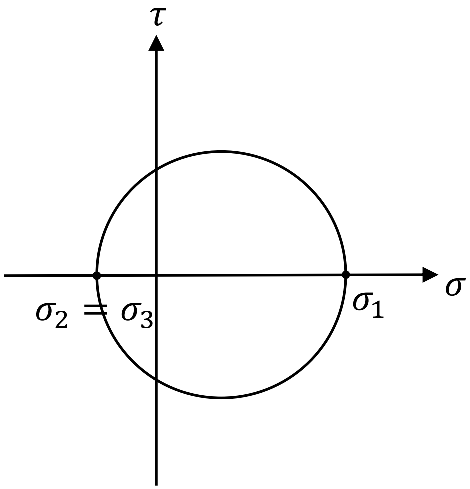
ocorre para

$$\vec{n} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{n}_1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\,\vec{n}_3$$

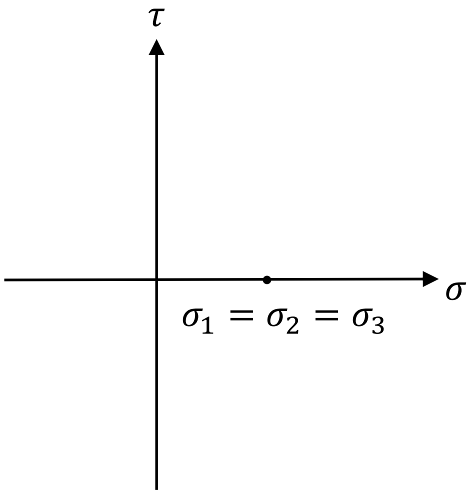
Casos especiais



$\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$



$\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$



$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$

Estado Hidrostático

Referência

Martins, C.A. *Introdução ao Estudo das Tensões.* Disponível no Moodle