



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3211 – Mecânica dos Sólidos II

Aula #03

Prof. Dr. Clóvis de Arruda Martins

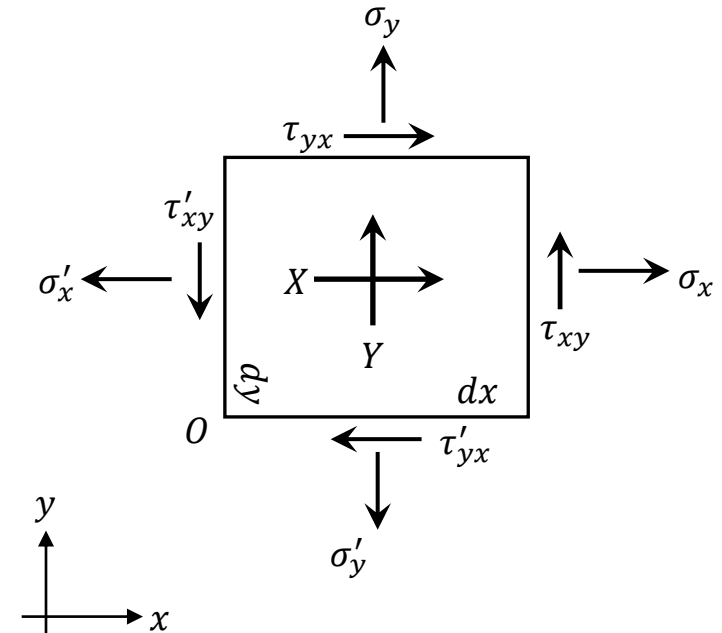
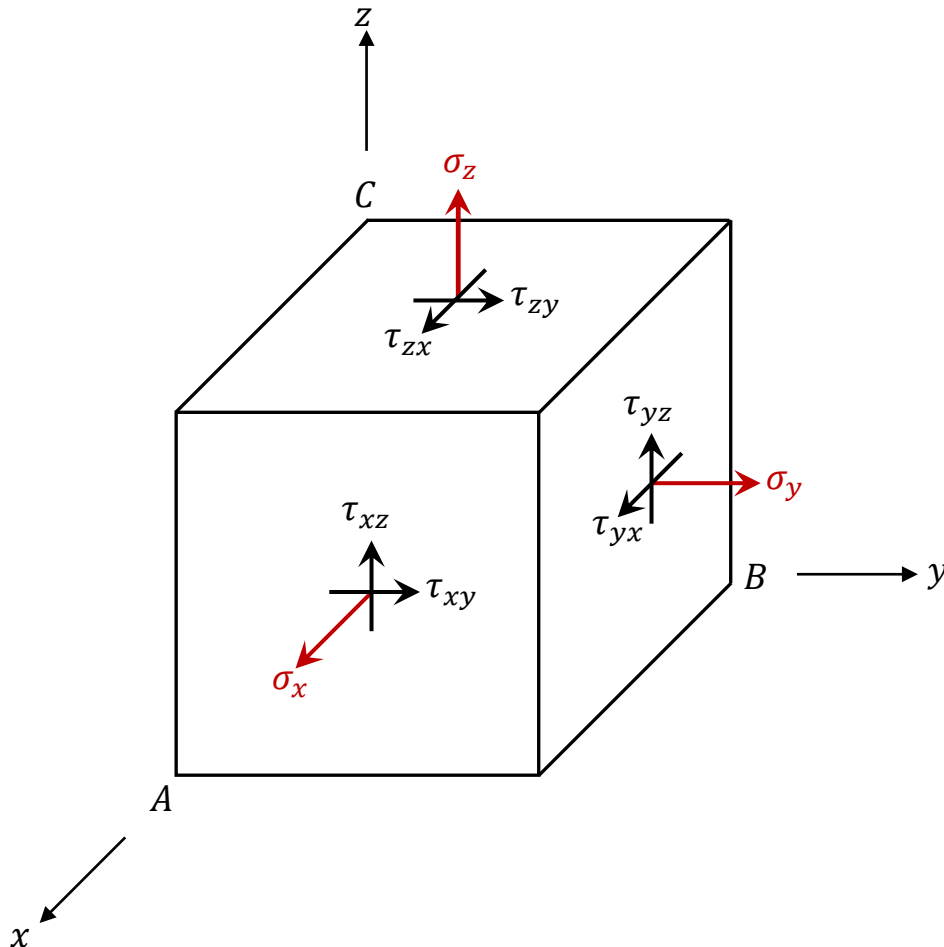
15/08/2023



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Estado plano de tensão

Vamos supor que não haja esforços na direção z

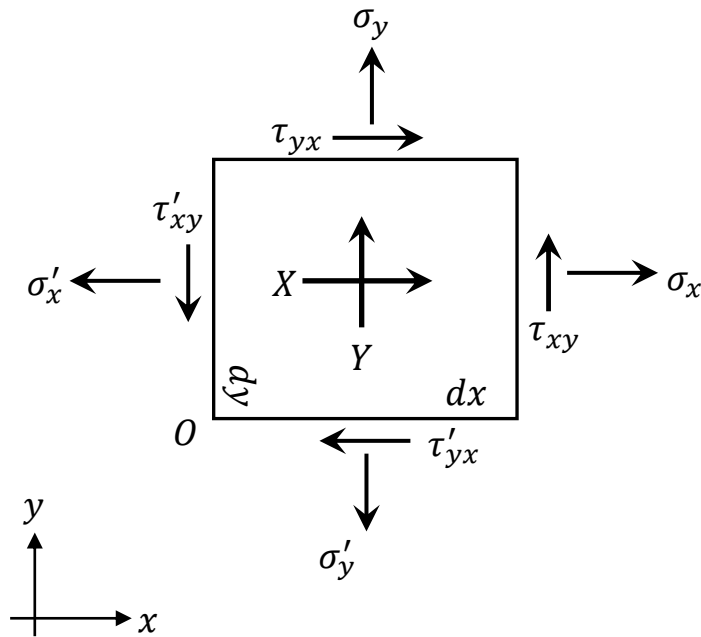


- 8 componentes de tensão

- X e $Y \rightarrow$ forças de campo



Equilíbrio



Equilíbrio de forças na direção x :

$$-\sigma'_x dydz + \sigma_x dydz + \tau_{yx} dx dz - \tau'_{yx} dx dz + X dx dy dz = 0$$

Dividindo-se por dz :

$$-\sigma'_x dy + \sigma_x dy + \tau_{yx} dx - \tau'_{yx} dx + X dx dy = 0$$

Fazendo-se $dy \rightarrow 0$:

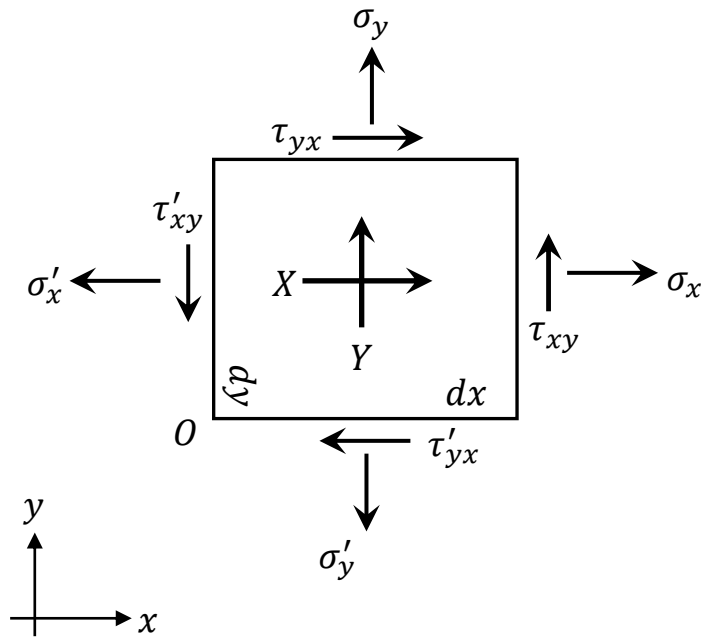
$$\tau'_{yx} = \tau_{yx}$$

Fazendo-se $dx \rightarrow 0$:

$$\sigma'_x = \sigma_x$$



Equilíbrio



Equilíbrio de forças na direção y:

$$-\tau'_{xy}dydz + \tau_{xy}dydz + \sigma_y dxdz - \sigma'_y dxdz + Ydxdydz = 0$$

Dividindo-se por dz :

$$-\tau'_{xy}dy + \tau_{xy}dy + \sigma_y dx - \sigma'_y dx + Ydxdy = 0$$

Fazendo-se $dy \rightarrow 0$:

$$\sigma'_y = \sigma_y$$

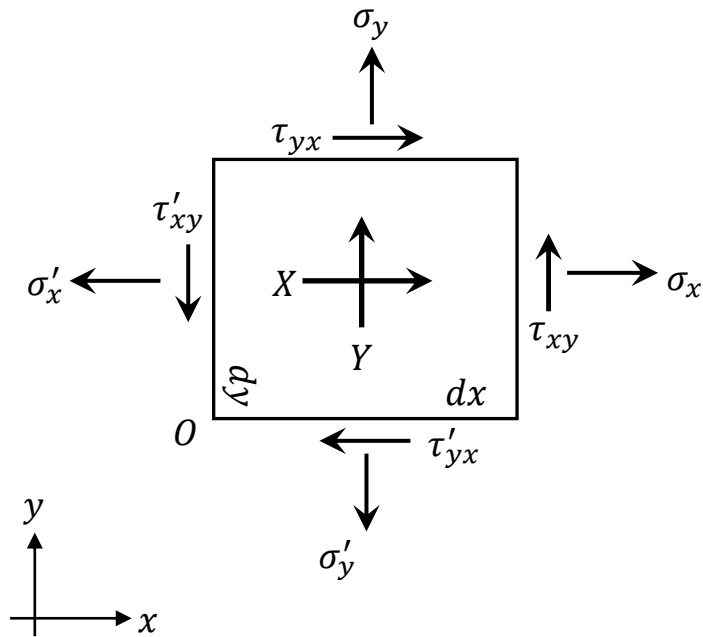
Fazendo-se $dx \rightarrow 0$:

$$\tau'_{xy} = \tau_{xy}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Equilíbrio



Equilíbrio de momentos em relação a O:

$$\cancel{\sigma_y dx dz \frac{dx}{2}} - \cancel{\tau_{yx} dx dz dy} + \cancel{\tau_{xy} dy dz dx} - \cancel{\sigma_x dy dz \frac{dy}{2}} - \cancel{\sigma'_y dx dz \frac{dx}{2}} + \cancel{\sigma'_x dy dz \frac{dy}{2}} + Y dx dy dz \frac{dx}{2} - X dx dy dz \frac{dy}{2} = 0$$

Dividindo-se por $dx dy dz$:

$$-\tau_{yx} + \tau_{xy} + Y \frac{dx}{2} - X \frac{dy}{2} = 0$$

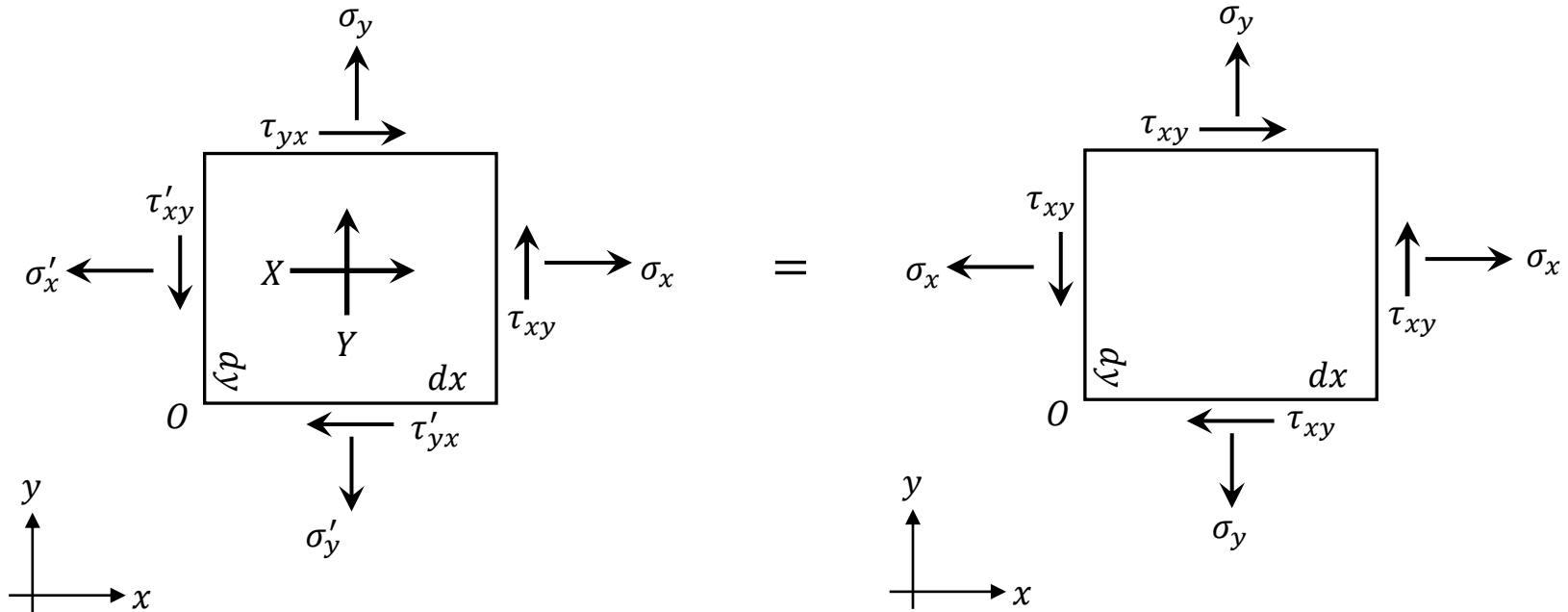
Fazendo-se $dx \rightarrow 0$ e $dy \rightarrow 0$:

$$\tau_{yx} = \tau_{xy}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Conclusão



8 componentes de tensão

$\Rightarrow$

Apenas 3 componentes independentes



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Extensão para o estado de tensões completo

$$\sigma'_x = \sigma_x$$

$$\sigma'_y = \sigma_y$$

$$\sigma'_z = \sigma_z$$

$$\tau'_{xy} = \tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau'_{yx}$$

$$\tau'_{xz} = \tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau'_{zx}$$

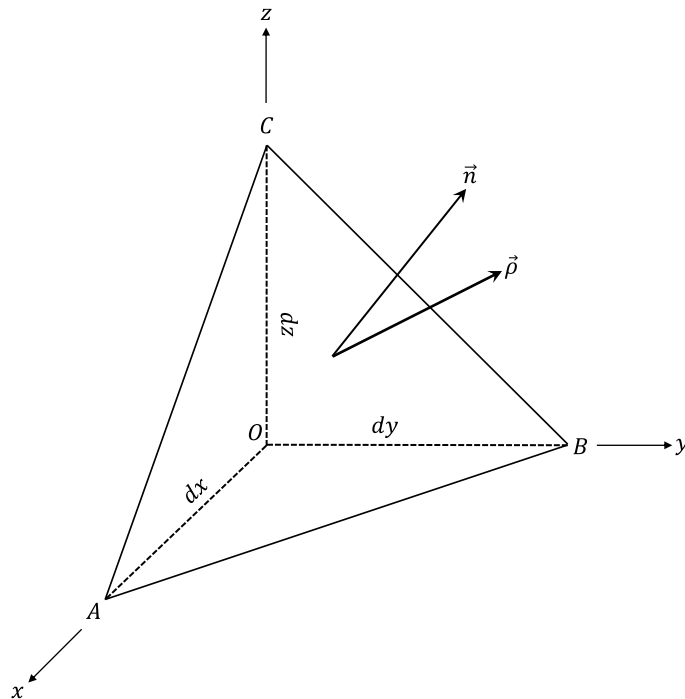
$$\tau'_{yz} = \tau_{yz} = \tau_{zy} = \tau'_{zy}$$

Das 18 componentes originais temos apenas 6 valores distintos:

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz} \text{ e } \tau_{yz}$$

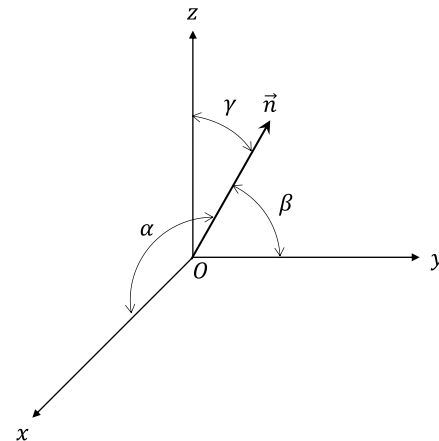


Tensões em um plano inclinado



$$\vec{\rho} = \begin{Bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \end{Bmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{Bmatrix}$$





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Departamento de Engenharia Mecânica

Sejam:

- dS – a área da face ABC
- dS_x – a área da face OBC $\Rightarrow dS_x = dS \cos \alpha = n_x dS$
- dS_y – a área da face OAC $\Rightarrow dS_y = dS \cos \beta = n_y dS$
- dS_z – a área da face OAB $\Rightarrow dS_z = dS \cos \gamma = n_z dS$

Equilíbrio de forças na direção x :

$$\rho_x dS - \sigma_x dS_x - \tau_{xy} dS_y - \tau_{xz} dS_z = 0$$

Então:

$$\rho_x = \sigma_x \cos \alpha + \tau_{xy} \cos \beta + \tau_{xz} \cos \gamma$$

ou

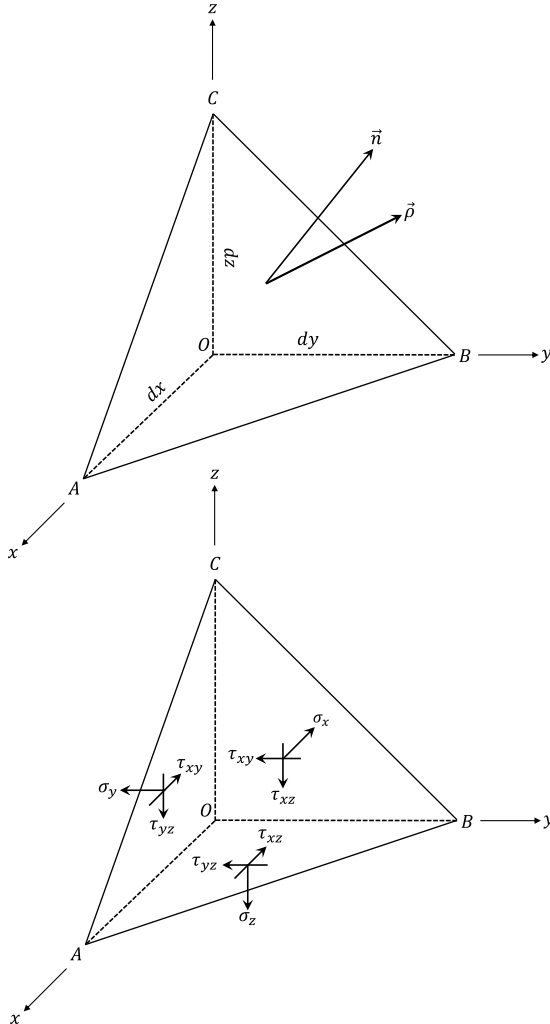
$$\rho_x = \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z$$

Analogamente:

$$\rho_y = \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z$$

e

$$\rho_z = \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z$$





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Tensor das tensões

Na forma matricial:

$$\rho_x = \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z$$

$$\rho_y = \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z$$

$$\rho_z = \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z$$

$$\begin{Bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}$$

Estas expressões permitem calcular o vetor tensão $\vec{\rho}$ atuante em um plano normal a $\vec{n}$ que passa pelo ponto P .

A tensão em um ponto P é uma grandeza de um tipo conhecido como *tensor*.

O *tensor* é uma grandeza definida por uma matriz 3x3 e, portanto, por 9 parâmetros.

O *tensor das tensões* é um tensor simétrico e, portanto, bastam 6 parâmetros.

Notação:

$$[T] = [T]^t = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$$\vec{\rho} = T[\vec{n}]$$



Tensão normal

$$\sigma = \vec{\rho} \cdot \vec{n}$$

$$\sigma = T[\vec{n}] \cdot \vec{n}$$

$$\sigma = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}^t \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}$$

Tensão de cisalhamento

$$\rho^2 = \sigma^2 + \tau^2$$

$$\tau = \sqrt{\rho^2 - \sigma^2}$$

$$\vec{\rho} = \sigma \vec{n} + \tau \vec{t} \Rightarrow \tau \vec{t} = \vec{\rho} - \sigma \vec{n}$$

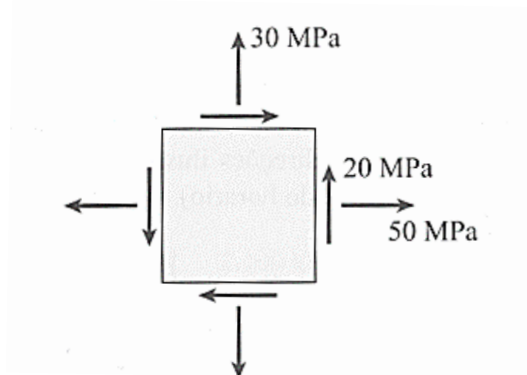


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

Departamento de Engenharia Mecânica

7.2-1 Um elemento em *estado plano de tensões* está submetido às tensões $\sigma_x = 50$ MPa, $\sigma_y = 30$ MPa e $\tau_{xy} = 20$ MPa, como ilustrado na figura.

Determine as tensões agindo em um elemento orientado a um ângulo $\theta = 50^\circ$ a partir do eixo x , em que o ângulo θ é positivo quando está no sentido anti-horário. Mostre essas tensões em um esboço de um elemento orientado ao ângulo θ .



$$[T] = \begin{bmatrix} 50 & 20 & 0 \\ 20 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

i) $\theta = 50^\circ$

$$\vec{n} = \begin{Bmatrix} \cos 50^\circ \\ \sin 50^\circ \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,643 \\ 0,766 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{\rho} = T[\vec{n}] = \begin{bmatrix} 50 & 20 & 0 \\ 20 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0,643 \\ 0,766 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 47,5 \\ 35,8 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\sigma = \vec{\rho} \cdot \vec{n} = \begin{Bmatrix} 47,5 \\ 35,8 \\ 0 \end{Bmatrix}^t \begin{Bmatrix} 0,643 \\ 0,766 \\ 0 \end{Bmatrix} = 58,0 \text{ MPa}$$

$$\tau \vec{t} = \vec{\rho} - \sigma \vec{n} = \begin{Bmatrix} 47,5 \\ 35,8 \\ 0 \end{Bmatrix} - 58,0 * \begin{Bmatrix} 0,643 \\ 0,766 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10,2 \\ -8,6 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\tau = |\tau \vec{t}| = \sqrt{\begin{Bmatrix} 10,2 \\ -8,6 \\ 0 \end{Bmatrix}^t \begin{Bmatrix} 10,2 \\ -8,6 \\ 0 \end{Bmatrix}} = 13,3 \text{ MPa}$$



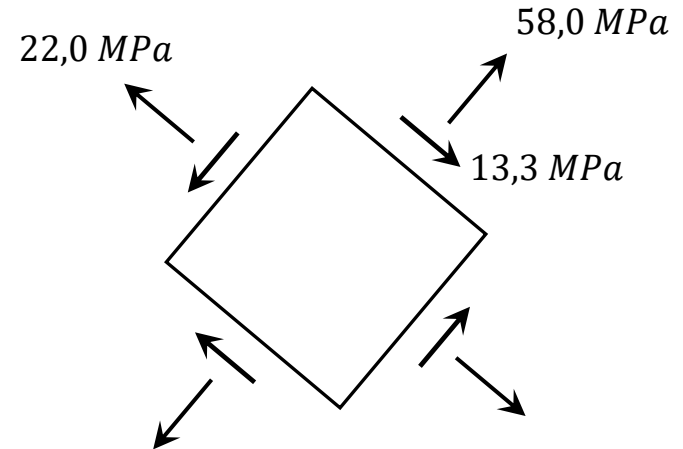
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

ii) $\theta = 140^\circ$

$$\vec{n} = \begin{Bmatrix} \cos 140^\circ \\ \sin 140^\circ \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,766 \\ 0,643 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{\rho} = T[\vec{n}] = \begin{bmatrix} 50 & 20 & 0 \\ 20 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0,766 \\ 0,643 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -25,4 \\ 4,0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\sigma = \vec{\rho} \cdot \vec{n} = \begin{Bmatrix} -25,4 \\ 4,0 \\ 0 \end{Bmatrix}^t \begin{Bmatrix} -0,766 \\ 0,643 \\ 0 \end{Bmatrix} = 22,0 \text{ MPa}$$





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referência

Martins, C.A. *Introdução ao Estudo das Tensões*. Disponível no Moodle