Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3211 - Mecânica dos Sólidos II

Aula #24

Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.

05/12/2023

Agenda:

1. Equações diferenciais de equilíbrio (efeito da força normal)
2. Equações para determinar a linha elástica e cargas críticas
3. Flambagem de barras simplesmente apoiadas
4. Carga crítica de Euler

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

1. Equações Diferenciais de Equilíbrio (Efeito da Força Normal)

Objetivo: Determinar as equações diferenciais de equilíbrio de uma viga-coluna submetida a carregamentos transversais e esforços axiais de compressão.

Hipóteses:

1. Barra prismática, com eixo central reto;
2. Plano de flexão é um plano de simetria das seções transversais (não há, portanto, torção da barra);
3. Material homogêneo, isótropo e com comportamento elástico-linear;
4. Deslocamentos e deformações são pequenos (hipótese de L.G.), mas o equilíbrio será feito na configuração deformada.

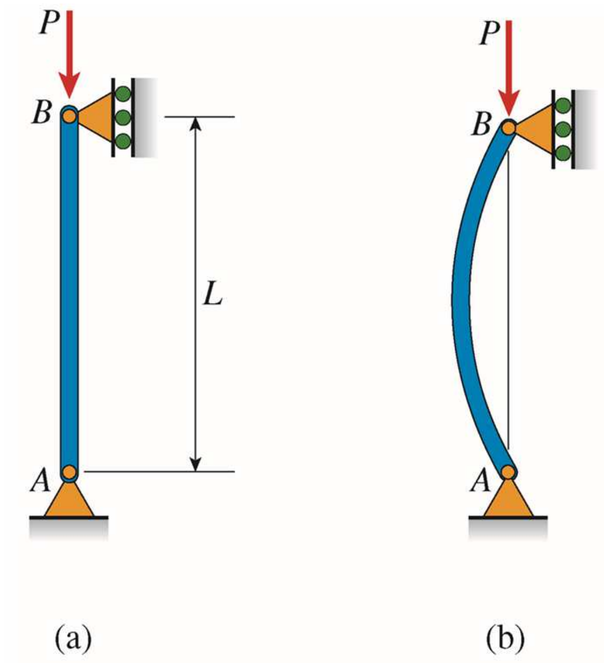
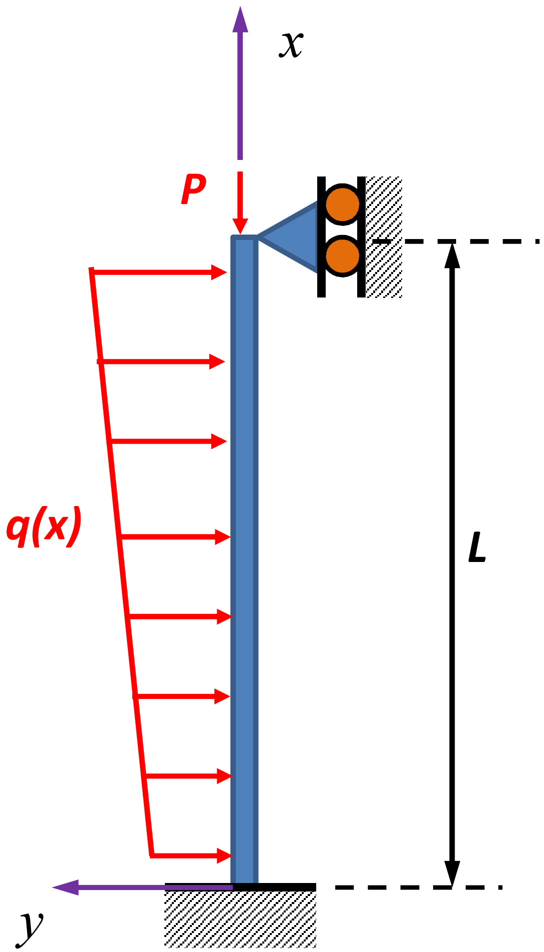


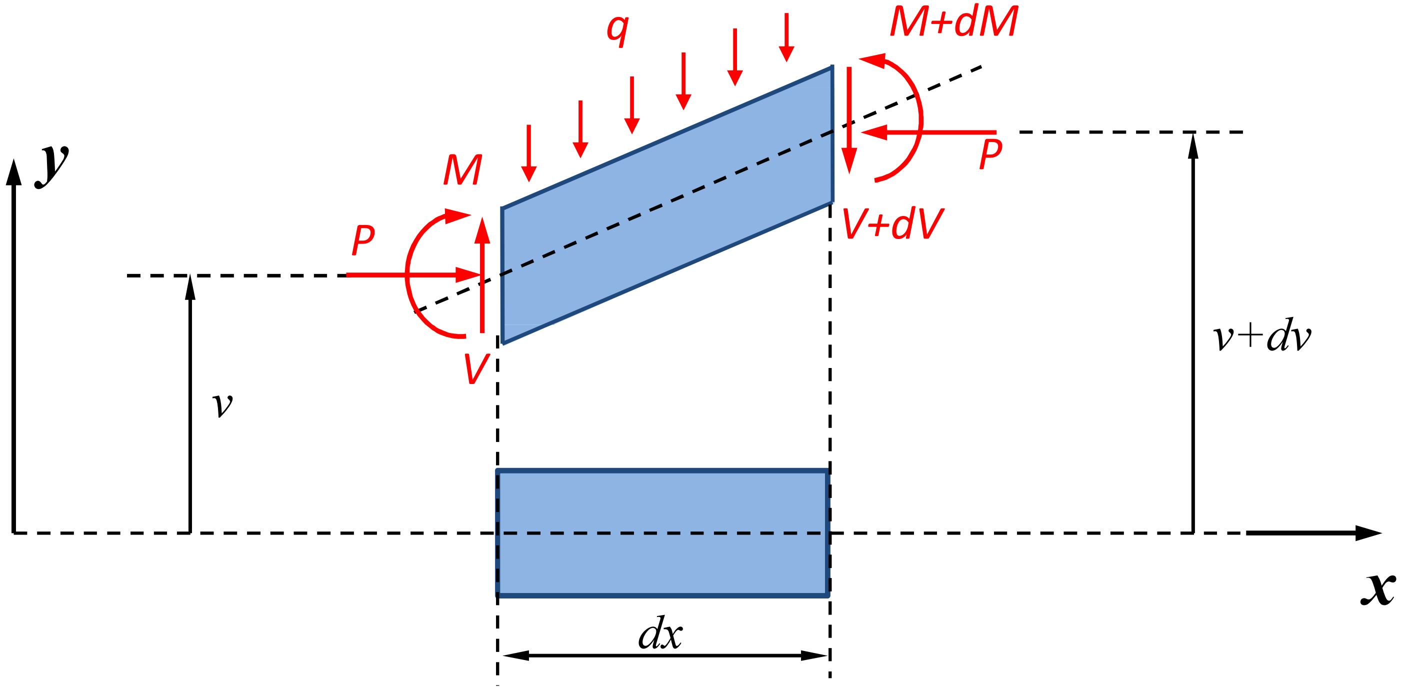
FIG. 11-1 Buckling of a slender column due to an axial compressive load P



Sejam dados:
P = força de compressão aplicada à viga-coluna
q(x) = carregamento distribuído (transversal) aplicado à viga-coluna
EI = rigidez flexional da viga (podendo ser constante ou variável)
L = comprimento da viga-coluna

As condições de contorno podem ser de diferentes tipos (a figura ao lado indica apenas uma dentre várias possibilidades), e são fundamentais para determinar a carga crítica da estrutura.

Consideremos um elemento infinitesimal de comprimento dx retirado da viga-coluna (na configuração deformada), como indicado abaixo (o elemento está girado apenas para aproveitar melhor o espaço). Observamos também que os deslocamentos e rotações estão exageradamente ampliados para facilitar a visualização...



Estando o equilíbrio de forças na direção horizontal garantido (forças de magnitude *P* são iguais e opostas nas duas faces), basta impor o equilíbrio de forças na direção vertical e o equilíbrio de momentos:

Equilíbrio de forças na direção vertical:

$$\sum F_y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad V(x) - [V(x) + dV] - q(x)dx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dV(x)}{dx} = -q(x) \qquad (1)$$

Equilíbrio de momentos (tomando como polo o centroide da face à direita):

$$\sum M = 0 \Leftrightarrow \quad M(x) + dM - M(x) + \frac{q(x)(dx)^2}{2} + Pdv - Vdx = 0$$

$$Vdx = dM + Pdv \quad \Leftrightarrow \quad V(x) = \frac{dM(x)}{dx} + P\frac{dv(x)}{dx} \qquad (2)$$

2. Equações para determinar a linha elástica e cargas críticas

Relembrando as últimas aulas de PME-3210, as equações necessárias para determinar a linha elástica de vigas são:

- Equações diferenciais de equilíbrio;
- Equações constitutivas;
- Relações geométricas (entre a curvatura e as derivadas de $v(x)$).

Assim, resultam:

$$\left[\begin{aligned} &\frac{dV(x)}{dx} = -q(x) \\ &V(x) = \frac{dM(x)}{dx} + P\frac{dv(x)}{dx} \end{aligned}\right. \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2M(x)}{dx^2} + P\frac{d^2v(x)}{dx^2} = -q(x) \qquad (3)$$

Mas, da hipótese de que o material possui comportamento elástico-linear e da hipótese de que seções planas e ortogonais ao eixo central (antes da deformação) permanecem planas e ortogonais ao eixo central (após a deformação), sai a relação:

$$M(x) = EI(x)\kappa(x) \tag{4}$$

Onde a curvatura $\kappa(x)$ é dada por:

$$\kappa(x) = \frac{v''(x)}{[1 + (v'(x))^2]^{3/2}} \tag{5}$$

Considerando que a rigidez flexional seja constante (viga prismática) e que os deslocamentos e rotações sejam pequenos (L.G.), virá:

$$M(x) = EI\kappa(x) \cong EIv''(x) \tag{6}$$

Então, substituindo Eq.(6) em Eq.(3), teremos a equação governante:

$$\frac{d^4v(x)}{dx^4} + \frac{P}{EI}\frac{d^2v(x)}{dx^2} = -\frac{q(x)}{EI} \qquad (7)$$

Os problemas mais simples de estabilidade de vigas-coluna, envolvendo a determinação das cargas críticas de flambagem e dos modos de flambagem podem ser resolvidos por meio de:

1. Uso da equação governante linearizada (Eq.(7)) ou
2. Uso da relação Momento Fletor × Curvatura linearizada (Eq.(6)).

Nota: Com a linearização da equação governante (decorrente da linearização da expressão da curvatura), só é possível determinar os deslocamentos do eixo central nos casos em que $q(x) \neq 0$ (de forma análoga ao que vimos no estudo de estruturas idealizadas).

3. Flambagem de barras simplesmente apoiadas

Retomando o problema de determinação da carga crítica de flambagem de uma barra biapoiada, com base nas hipóteses estabelecidas anteriormente, apresentaremos a solução do problema pelas duas formas possíveis, ressaltando as vantagens e desvantagens de cada método de solução.

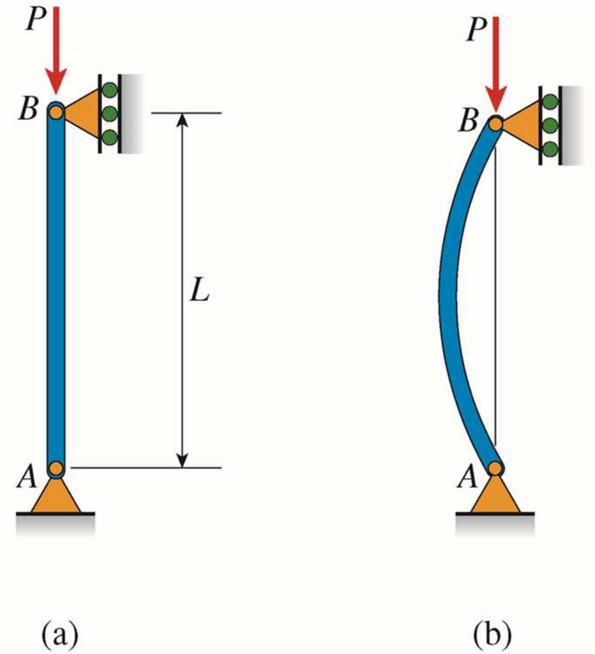


FIG. 11-1 Buckling of a slender column due to an axial compressive load P

3.1. Solução pela uso da equação governante linearizada (Eq.(7)):

$$\frac{d^4v(x)}{dx^4} + \frac{P}{EI}\frac{d^2v(x)}{dx^2} = -\frac{q(x)}{EI}$$

Neste caso, observando que $q(x) = 0$, e denominando: $k^2 = \frac{P}{EI} > 0,$

virá:

$$\frac{d^4v(x)}{dx^4} + k^2\frac{d^2v(x)}{dx^2} = 0 \qquad (8)$$

A busca de soluções possíveis para E.D.O.s lineares com coeficientes constantes (como é o caso) sugere o emprego de soluções exponenciais da forma:

$$v(x) = Ce^{\lambda x} \qquad (9)$$

Substituindo Eq.(9) em Eq.(8), teremos:

$$\begin{cases} \dfrac{d^4v(x)}{dx^4} + k^2\dfrac{d^2v(x)}{dx^2} = 0 \\ v(x) = Ce^{\lambda x} \end{cases} \Rightarrow \quad Ce^{\lambda x}(\lambda^4 + k^2\lambda^2) = 0$$

Vê-se que a solução $v(x) = Ce^{\lambda x} = 0$ é uma solução natural do problema (é a denominada solução trivial), mas não tem interesse (pois não informa se há outras formas de solução, nem o valor da carga crítica). Desta forma, devemos impor que:

$$\lambda^4 + k^2\lambda^2 = \lambda^2(\lambda^2 + k^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \quad \text{(raiz de multipl. 2)} \\ \lambda = \pm ik \end{cases}$$

Assim, a solução da E.D.O. de 4ª ordem dada é da forma:

$$v(x) = C_1 + C_2 x + C_3 e^{ikx} + C_4 e^{-ikx}$$

Lembrando que (fórmula de Euler): $e^{i\theta} = cos\theta + isen\theta$

Então:

$$C_3 e^{ikx} + C_4 e^{-ikx} = C_3(\cos(kx) + isen(kx)) + C_4(\cos(kx) - isen(kx))$$

$$= (C_3 + C_4)\cos(kx) + i(C_3 - C_4)sen(kx)$$

Denominando: $A_3 = C_3 + C_4$ $A_4 = i(C_3 - C_4)$

E impondo que A_3 e A_4 sejam números reais (já que a solução precisa ser real), encontramos:

$$\begin{cases} C_3 + C_4 = A_3 \\ -C_3 + C_4 = iA_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_3 = \dfrac{1}{2}(A_3 - iA_4) \\ C_4 = \dfrac{1}{2}(A_3 + iA_4) \end{cases}$$

o que mostra que é possível encontrar constantes imaginárias C_3 e C_4 de modo a obter uma solução real para $v(x)$. No caso, as constantes C_3 e C_4 devem ser números complexos conjugados.

Na forma real (rescrevendo todos os coeficientes como A_i):

$$v(x) = A_1 + A_2 x + A_3 \cos(kx) + A_4 sen(kx) \qquad (10)$$

Eq.(10) é, portanto, a solução geral (*<u>válida para qualquer condição de contorno</u>*) da E.D.O. de 4ª ordem, linear e homogênea, dada por Eq.(8).

Como veremos a seguir, a aplicação das condições de contorno permitirão determinar alguns (mas não todos) coeficientes A_i.

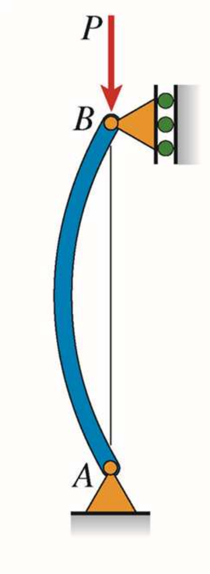
Para o caso em tela (viga-coluna biapoiada e uso da E.D.O. de 4ª ordem) aplicaremos 4 condições de contorno:

- 2 condições para a extremidade inferior A:

$$v(0) = 0, \qquad v''(0) = 0$$

- 2 condições para a extremidade superior B:

$$v(L) = 0, \qquad v''(L) = 0$$



$$v(x) = A_1 + A_2 x + A_3 cos(kx) + A_4 sen(kx)$$

$$v'(x) = A_2 - A_3 k sen(kx) + A_4 k cos(kx)$$

$$v''(x) = -A_3 k^2 cos(kx) - A_4 k^2 sen(kx)$$

$$\begin{cases} v(0) = A_1 + A_3 = 0 \\ v''(0) = -A_3 k^2 = 0 \\ v(L) = A_1 + A_2 L + A_3 \cos(kL) + A_4 sen(kL) = 0 \\ v''(L) = -A_3 k^2 \cos(kL) - A_4 k^2 sen(kL) = 0 \end{cases}$$

Como $k^2 = P/EI \neq 0$, resulta da 2ª equação: $A_3 = 0$

E, portanto, da 1ª equação: $A_1 = 0$

E, assim, a 3ª e 4ª equações ficam:

$$\begin{cases} A_2 L + A_4 sen(kL) = 0 \\ A_4 sen(kL) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_2 = 0 \\ sen(kL) = 0 \end{cases}$$

Assim, os modos de flambagem serão da forma:

$$v(x) = A_4 sen(kx)$$

mas a amplitude dos deslocamentos fica indeterminada (preço pago pela linearização da equação governante).

A equação: $sen(kL) = 0$ é denominada *equação característica* e sua solução permite determinar as cargas críticas e os modos de flambagem associados.

Neste caso: $sen(kL) = 0 \;\Leftrightarrow\; kL = n\pi, \qquad n = 1,2,3,\ldots$

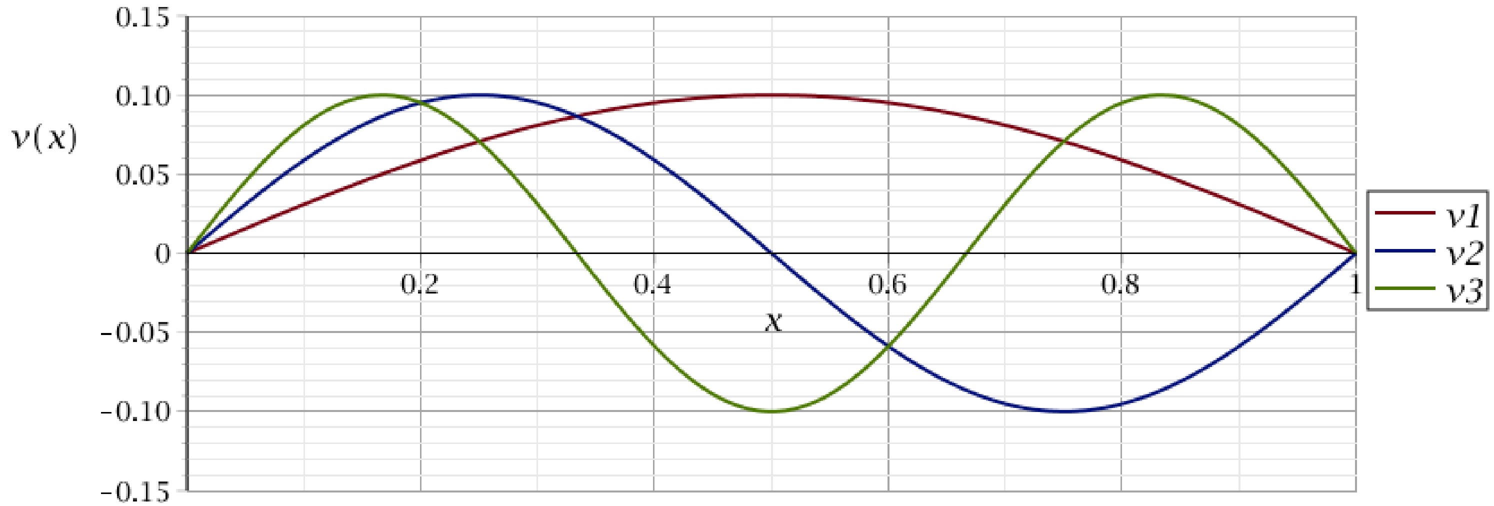
Assim: $k^2 = \dfrac{P}{EI} = \dfrac{n^2\pi^2}{L^2} \;\Leftrightarrow\; P_{cr} = \dfrac{n^2\pi^2 EI}{L^2}$

$$n = 1: \quad P_{cr1} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}, \qquad v_1(x) = Asen\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$ (1º modo de flambagem)

$$n = 2: \quad P_{cr2} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}, \qquad v_2(x) = Asen\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$ (2º modo de flambagem)

$$n = 3: \quad P_{cr2} = \frac{9\pi^2 EI}{L^2}, \qquad v_3(x) = Asen\left(\frac{3\pi x}{L}\right)$$ (3º modo de flambagem)

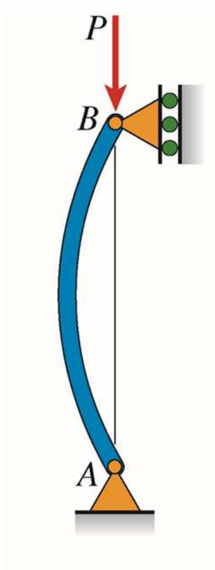
E assim por diante...



3.2. Solução pela relação Momento Fletor × Curvatura linearizada (Eq.(6)):

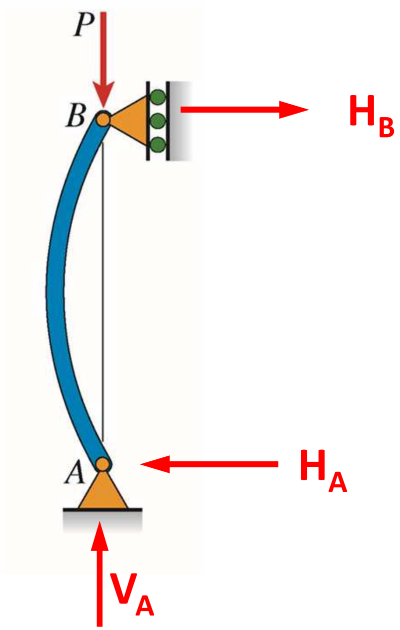
Neste caso, é preciso obter a expressão do momento fletor atuante em uma posição genérica da viga-coluna, ou seja, é preciso determinar a função $M(x)$. Esta forma de solução requer as seguintes passagens:

1. Apresentar o D.C.L. da viga, com todas as reações de apoio;
2. Determinar as reações de apoio (note que, se a estrutura for hiperestática, não será possível determinar todas as reações de apoio apenas com as equações de equilíbrio estático);
3. Cortar a estrutura em uma posição (x) arbitrária e impor as equações de equilíbrio do trecho para encontrar $M(x)$;
4. Utilizar a relação Momento Fletor × Curvatura e aplicar as condições de contorno necessárias.



Exemplo:

Passo 1:



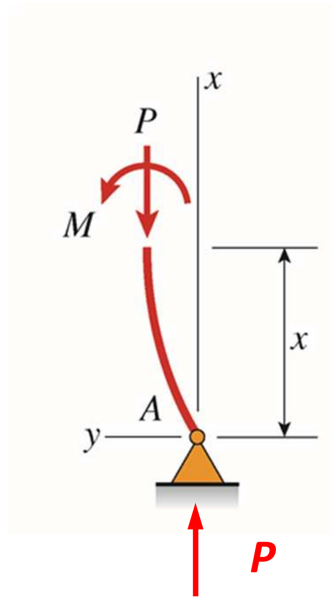
Passo 2:

Encontramos:

$$H_A = H_B = 0$$

$$V_A = P$$

Passo 3:



$$M(x) + Pv(x) = 0$$

$$M(x) = -Pv(x)$$

Passo 4:

$$M(x) = -Pv(x) = EIv''(x)$$

$$v''(x) + \frac{P}{EI} v(x) = 0$$

$$v''(x) + k^2 v(x) = 0$$

$$v(x) = Asen(kx) + Bcos(kx)$$

Condições de Contorno:

$$v(0) = 0 \;\Rightarrow\; B = 0$$

$$v(L) = 0 \;\Rightarrow\; Asen(kL) = 0$$

Como devemos ter $A \neq 0$, resulta:

$$sen(kL) = 0$$

$$kL = n\pi, \qquad n = 1,2,3, \ldots$$

3.3. Observações

A determinação das cargas críticas e dos modos de flambagem de vigas-coluna é mais um exemplo de problemas de autovalores e autovetores encontrados na Engenharia, como podemos ver pela própria natureza das equações utilizadas na solução, como a equação governante dada por Eq.(8):

$$\frac{d^4v(x)}{dx^4} + k^2\frac{d^2v(x)}{dx^2} = 0$$

Ou ainda pela relação (válida no caso da viga-coluna biapoiada):

$$M(x) = -Pv(x) = EIv''(x) \quad \Rightarrow \quad v''(x) = -\frac{P}{EI}v(x) = -k^2v(x)$$

Neste caso, as cargas críticas são os autovalores e os modos de flambagem (associados a cada carga crítica) são os autovetores (ou autofunções).

4. Carga Crítica de Euler

A flambagem de uma viga-coluna biapoiada no 1º modo é denominada de caso fundamental de flambagem.

O tipo de flambagem descrito nesta aula é denominado “flambagem de Euler”, e o carregamento crítico associado é denominado carregamento de Euler (ou carga crítica de Euler).

Leonhard Euler (1707-1783), geralmente reconhecido como o maior matemático de todos os tempos, foi a primeira pessoa a investigar a flambagem de uma coluna esbelta e determinar seu carregamento crítico. Seus resultados nesta área foram publicados em 1744.

Referências:

[1] Gere, J.M., Goodno, B.J. Mecânica dos Materiais – Tradução da 7ª edição norte-americana. Cengage Learning, 2010, 860p, Cap. 11 (seção 11.3)

[2] Timoshenko, S.P., Gere, J.M. Theory of Elastic Stability. McGraw-Hill, 1961, 541p.