



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3211 - Mecânica dos Sólidos II

Aula #19

Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.

01/11/2023



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

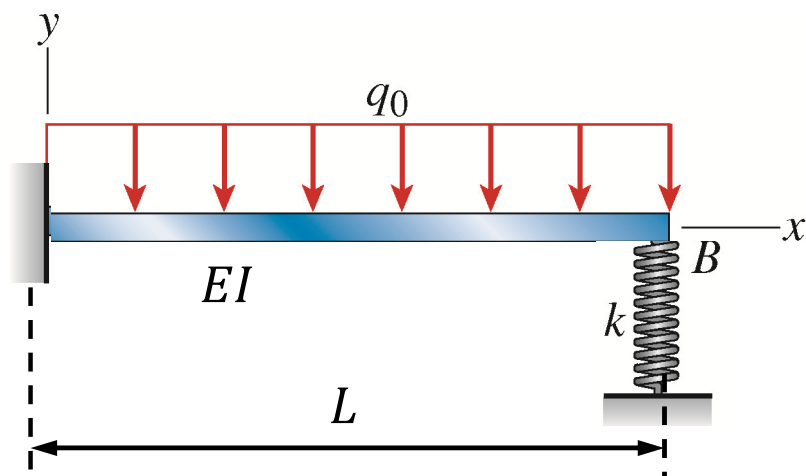
Agenda:

1. Exercício introdutório: análise de uma estrutura hiperestática utilizando o Teorema de Crotti-Engesser;
2. Princípio da Energia Complementar Mínima;
3. Metodologia para análise de estruturas hiperestáticas;
4. Exemplos de Aplicação.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

1. Exercício Introdutório: Análise de uma Estrutura Hiperestática utilizando o Teorema de Crotti-Engesser



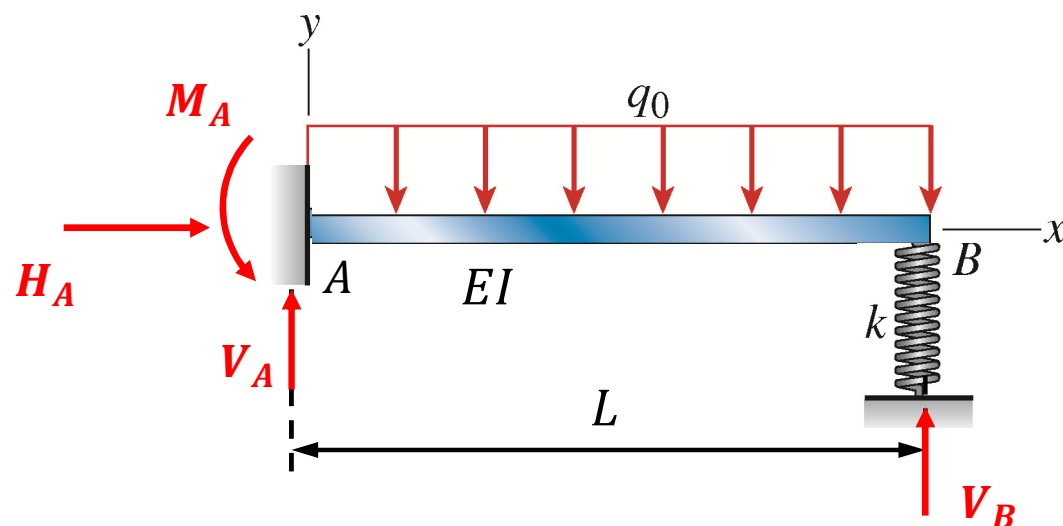
Dados: q_0, EI, L, k

Determinar: a) Reações de apoio, b) rotação na extremidade B (θ_B).



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

1º Passo: Fazer o D.C.L. e obter o grau de hiperestaticidade estrutural.

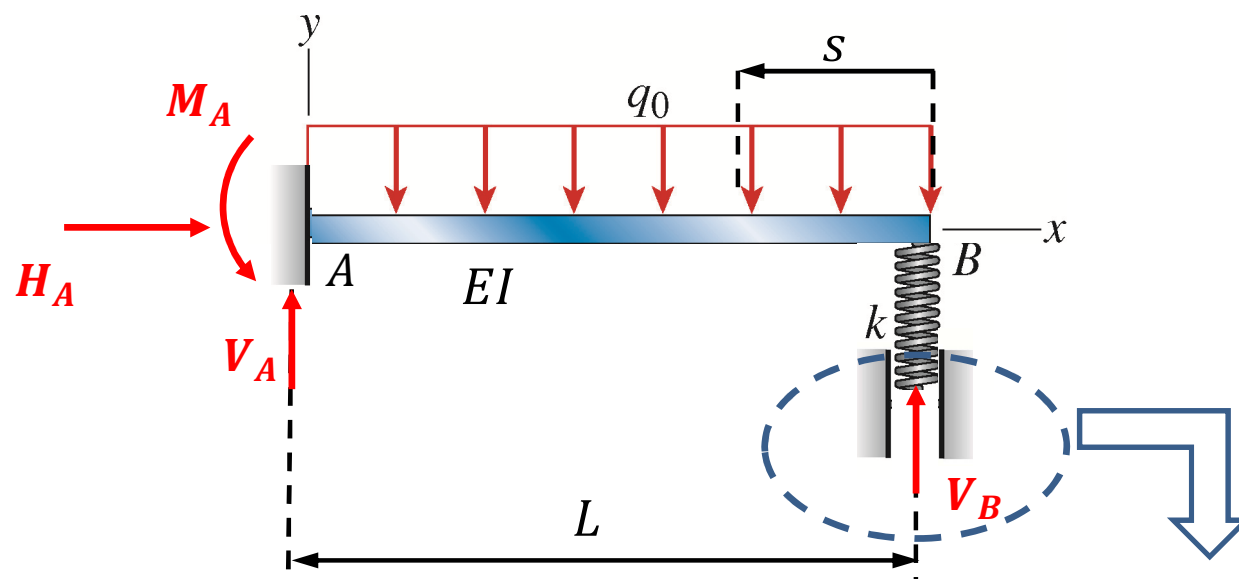


$$g = 4 - 3 = 1$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

2º Passo: Modificar a estrutura de modo a obter uma E.I.F. (**estrutura isostática fundamental**) por meio da liberação de $n = g$ incógnitas hiperestáticas.



Imagine, por exemplo, que o deslocamento da base da mola (antes fixa) seja liberado...



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

3º Passo: Aplicar o Teorema de Crotti-Engesser **utilizando a E.I.F.** para determinar o deslocamento do grau de liberdade antes impedido (no caso o deslocamento vertical da base da mola).

$$\delta = \frac{\partial U^*}{\partial V_B} = \frac{\partial}{\partial V_B} \left(\int_0^L \frac{M^2}{2EI} ds + U_{mola}^* \right) = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial V_B} ds + \frac{\partial U_{mola}^*}{\partial V_B}$$

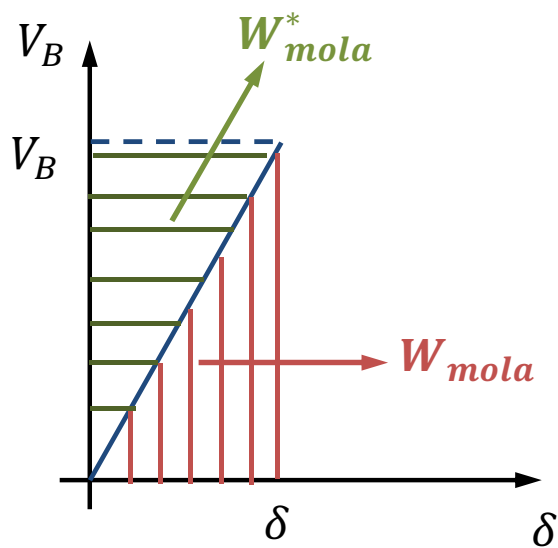
O momento fletor na viga AB deve ficar em função dos carregamentos externos aplicados à E.I.F. (no caso: q_0 e V_B):

$$M(s) = V_B s - \frac{q_0 s^2}{2}, \quad 0 \leq s \leq L$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

...e a energia na mola também deve ser considerada (e também expressa em função dos carregamentos externos aplicados à E.I.F.):



$$U_{mola}^* = W_{mola}^* = \frac{V_B \delta}{2} = \frac{V_B}{2} \frac{V_B}{k} = \frac{V_B^2}{2k}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

4º Passo: Resolver a equação para obter a relação adicional (que é, na verdade, uma equação de compatibilidade de deslocamentos):

$$\delta = \frac{\partial U^*}{\partial V_B} = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial V_B} ds + \frac{\partial U_{mola}^*}{\partial V_B}$$

$$\delta = \frac{\partial U^*}{\partial V_B} = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(V_B s - \frac{q_0 s^2}{2} \right) (s) ds + \frac{V_B}{k}$$

$$\delta = \frac{\partial U^*}{\partial V_B} = \frac{V_B L^3}{3EI} + \frac{V_B}{k} - \frac{q_0 L^4}{8EI}$$

$$\delta = \frac{\partial U^*}{\partial V_B} = V_B \left(\frac{L^3}{3EI} + \frac{1}{k} \right) - \frac{q_0 L^4}{8EI} \quad \text{(Este seria o deslocamento vertical da base da mola...)}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

5º Passo: Impor que o deslocamento encontrado seja nulo para que o comportamento da E.I.F. seja equivalente ao da estrutura hiperestática original, o que significa: encontrar o valor (bem como o sentido) da incógnita V_B para que o deslocamento correspondente seja nulo.

$$\delta = \frac{\partial U^*}{\partial V_B} = V_B \left(\frac{L^3}{3EI} + \frac{1}{k} \right) - \frac{q_0 L^4}{8EI} = 0$$

$$V_B \left(\frac{L^3}{3EI} + \frac{1}{k} \right) = \frac{q_0 L^4}{8EI}$$

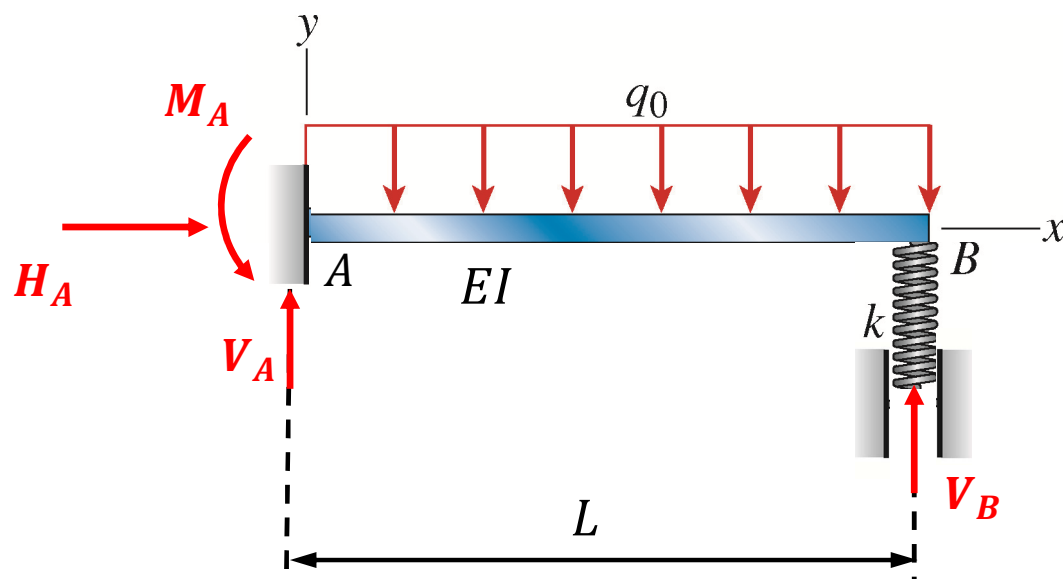
$$V_B = \frac{q_0 L^4}{8} \left(\frac{3k}{kL^3 + 3EI} \right)$$

Quando o sinal resulta positivo, isso significa que o sentido arbitrado (no D.C.L.) para a incógnita hiperestática está correto!



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

6º Passo: com a incógnita hiperestática determinada, podemos determinar as demais reações de apoio utilizando as equações de equilíbrio estático:



$$H_A = 0$$

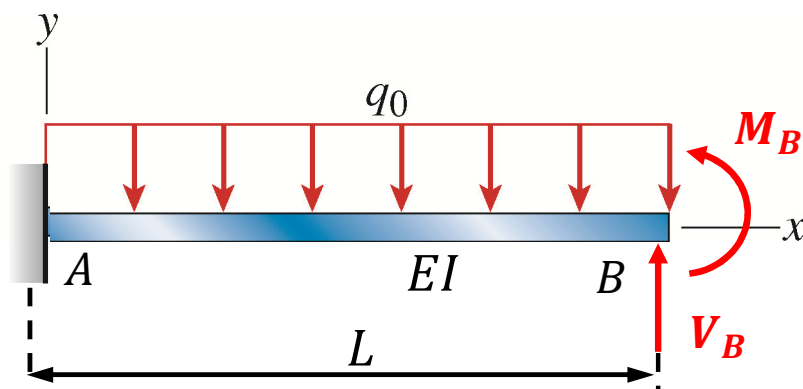
$$V_A + V_B = q_0 L$$

$$M_A + V_B L = \frac{q_0 L^2}{2}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

7º Passo: Para determinarmos qualquer deslocamento que seja de interesse (como a rotação em B), basta analisar parte da estrutura (no caso a viga AB) e aplicar o Teorema de Crotti-Engesser utilizando um esforço fictício, se necessário:



$$\theta_B = \frac{\partial U_{viga}^*}{\partial M_B} = \frac{\partial}{\partial M_B} \left(\int_0^L \frac{M^2}{2EI} ds \right) = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M_B} ds$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Considerando o momento fictício M_B , o momento fletor na viga AB fica:

$$M(s) = M_B + V_B s - \frac{q_0 s^2}{2}, \quad 0 \leq s \leq L$$

Logo:

$$\theta_B = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(M_B + V_B s - \frac{q_0 s^2}{2} \right) (1) ds$$

$$\theta_B = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(V_B s - \frac{q_0 s^2}{2} \right) ds = \frac{V_B L^2}{2EI} - \frac{q_0 L^3}{6EI}$$

Note que o valor acima seria o da rotação em B para valores “quaisquer” (leia-se: dentro da hipótese de L.G.) de V_B e de q_0 ...



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Contudo, como: $V_B = \frac{q_0 L^4}{8} \left(\frac{3k}{kL^3 + 3EI} \right)$

teremos: $\theta_B = \frac{V_B L^2}{2EI} - \frac{q_0 L^3}{6EI} = \frac{q_0 L^3}{48EI} \left(\frac{kL^3 - 24EI}{kL^3 + 3EI} \right)$

Logo:

$kL^3 > 24EI: \theta_B > 0$ (rotação ocorre no mesmo sentido do momento fictício M_B : sentido anti-horário).

$kL^3 < 24EI: \theta_B < 0$ (rotação ocorre no sentido contrário ao do momento fictício M_B : sentido horário).

$kL^3 = 24EI: \theta_B = 0$ (não há rotação em B).



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Casos Particulares:

1. Mola com rigidez infinita (apoio simples):

$$\theta_B = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{q_0 L^3}{48EI} \left(\frac{kL^3 - 24EI}{kL^3 + 3EI} \right) = \frac{q_0 L^3}{48EI} > 0$$

(rotação ocorre no sentido anti-horário, como esperado)

2. Mola com rigidez muito baixa (ou nula):

$$\theta_B = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{q_0 L^3}{48EI} \left(\frac{kL^3 - 24EI}{kL^3 + 3EI} \right) = -8 \frac{q_0 L^3}{48EI} = -\frac{q_0 L^3}{6EI} < 0$$

(rotação ocorre no sentido horário, como esperado)



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

2. Princípio da Energia Complementar Mínima

Consideremos uma estrutura hiperestática com grau de hiperestaticidade $g = n$ sob a ação de m esforços externos quaisquer. Consideremos também uma estrutura isostática fundamental (EIF) obtida a partir da estrutura hiperestática original após a liberação de n esforços hiperestáticos escolhidos arbitrariamente (mas de modo a garantir sempre o equilíbrio da estrutura sob a ação dos esforços externos originais somados aos n esforços liberados). O Princípio da Energia Complementar Mínima estabelece que os valores assumidos pelas n incógnitas hiperestáticas são tais que tornam mínima a energia complementar total do sistema. Denotando, assim, por P_i ($1 \leq i \leq m$) os esforços externos originalmente aplicados à estrutura hiperestática, e por X_j ($1 \leq j \leq n$) os esforços hiperestáticos escolhidos, temos as seguintes relações adicionais para a determinação de X_j :

$$\frac{\partial U^*}{\partial X_j} = 0 \quad (1 \leq j \leq n) \quad U^* = U^*(P_1, \dots, P_i, \dots, P_m, X_1, \dots, X_j, \dots, X_n)$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Observações:

1. A estrutura pode ter comportamento não linear (o que não impede o uso do Princípio da Energia Complementar Mínima);
2. Nos casos em que a estrutura é simétrica e o carregamento é simétrico (ou antissimétrico) em relação ao plano de simetria da estrutura, tais considerações (de simetria) são úteis para a simplificação do problema pois reduzem o número de incógnitas hiperestáticas.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

3. Metodologia para análise de estruturas hiperestáticas

1. Verificar se é possível simplificar a análise, explorando, por exemplo, simetrias da estrutura e do carregamento;
2. Se sim, realizar as simplificações necessárias antes de passar para a etapa seguinte que é:
3. Desenhar o D.C.L. da estrutura (simplificada, se for o caso), e determinar o grau de hiperestaticidade estrutural;
4. Escolher uma E.I.F. (o que significa liberar $n = g$ incógnitas hiperestáticas);
5. Aplicar o Princípio da Energia Complementar Mínima (tantas vezes quanto for necessário), obtendo $n = g$ equações de compatibilidade;
6. Resolver o sistema formado pelas n equações, expressando as incógnitas hiperestáticas em função do carregamento externo (leia-se: carregamento externo aplicado à estrutura hiperestática original).



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

4. Exemplos de Aplicação

Ex.1:

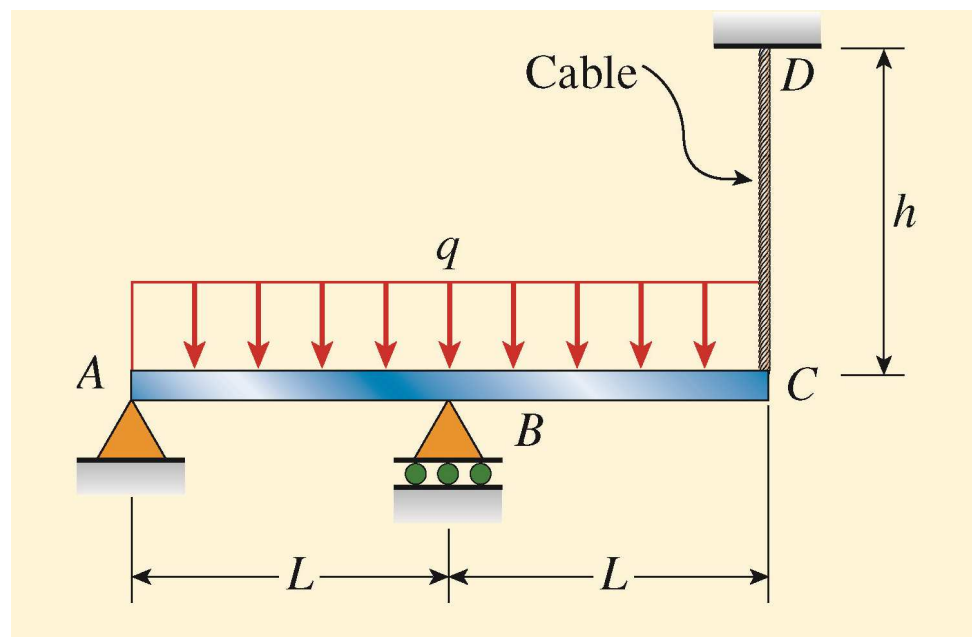
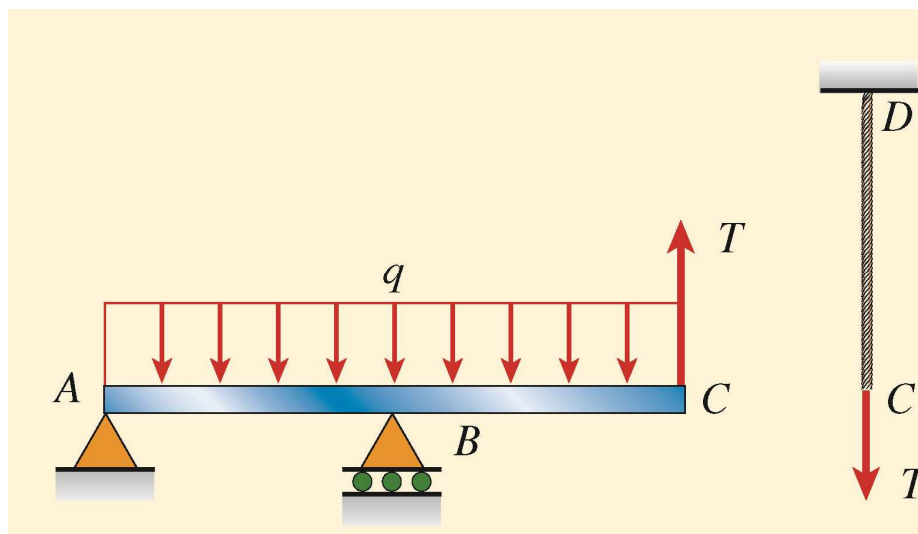


FIG. 10-19 Example 10-6.
Beam ABC with one end
supported by a cable



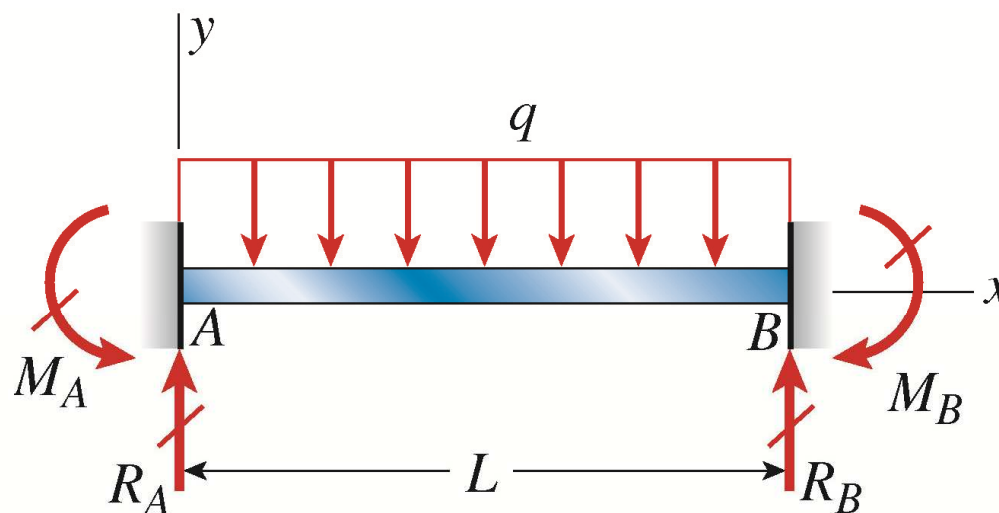
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Ex.2:

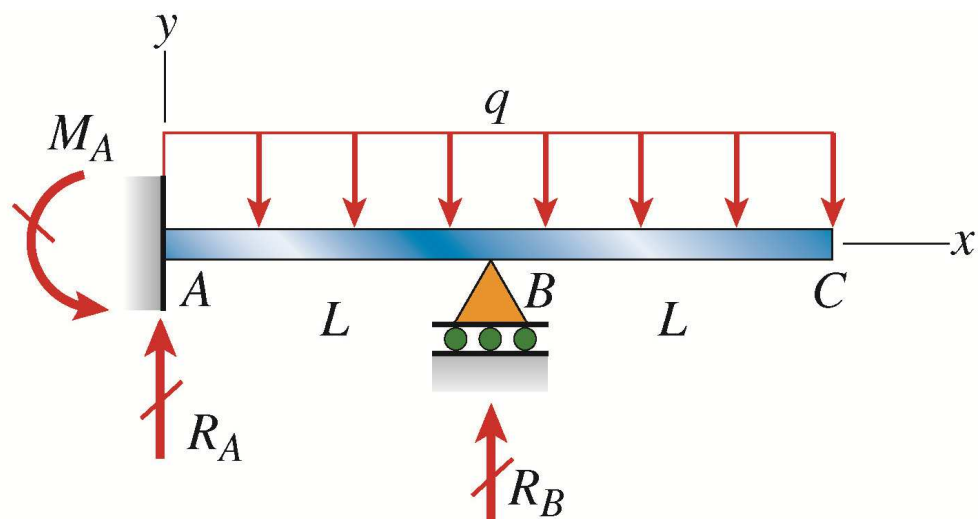


PROB. 10.3-2



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Ex.3:

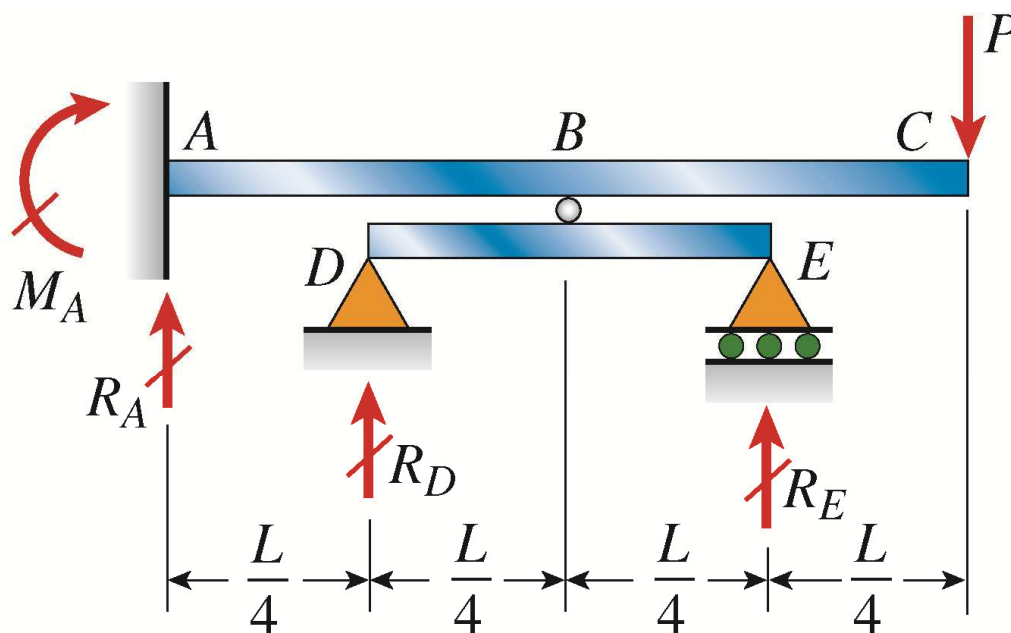


PROB. 10.4-3



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Ex.4:

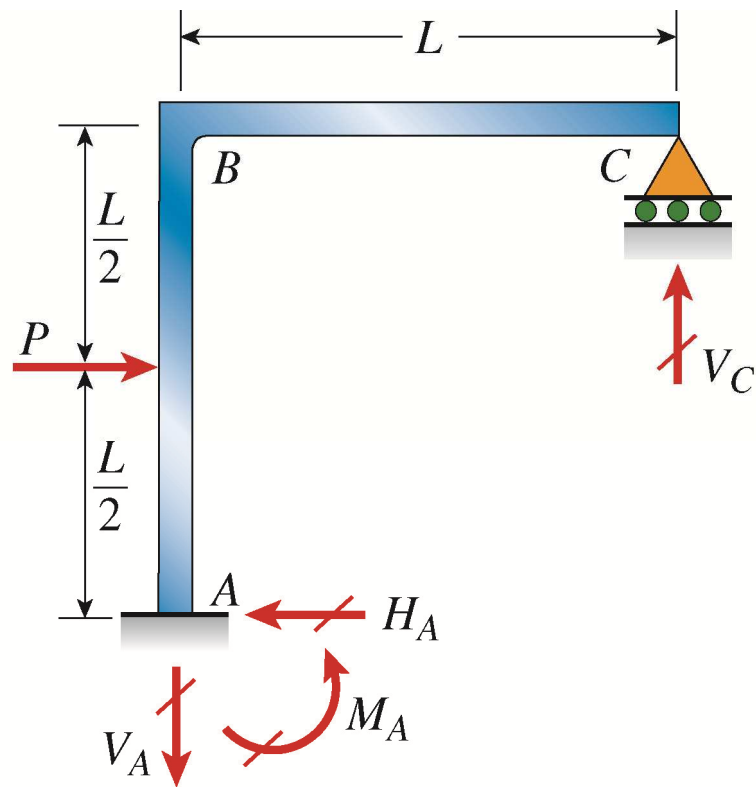


PROB. 10.4-13



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Ex.5:



PROB. 10.4-21



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referências:

- [1] Martins, C.A. Introdução ao Estudo das Energias de Deformação e Complementar, (2021), 105p.
- [2] Gere, J.M., Goodno, B.J. Mecânica dos Materiais – Tradução da 7ª edição norte-americana. Cengage Learning, 2010, 860p, Cap.10.