Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3211 - Mecânica dos Sólidos II

Aula #18

Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.

31/10/2023

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Agenda:

1. Expressão geral da energia complementar para sistemas formados por barras;
2. Limitações do uso do Princípio do Trabalho e da Energia no cálculo de deslocamentos e rotações;
3. Exemplos (Aplicações do Princípio do Trabalho e da Energia);
4. Teorema de Crotti-Engesser;
5. 1º Teorema de Castigliano;
6. 2º Teorema de Castigliano;
7. Exemplos de aplicação.

1. Expressão geral da energia complementar para sistemas formados por barras (com comportamento elástico-linear)

Como vimos na última aula, a expressão geral da energia complementar para sistemas estruturais formados por m barras (todas com comportamento elástico-linear), em condições de L.G., é dada por:

$$U^* = \sum_{i=i}^{m}\left(\int_0^L \frac{N^2(s)}{2EA(s)}ds + \int_0^L \frac{f_y V_y^2\,(s)}{2GA(s)}ds + \int_0^L \frac{f_z V_z^2(s)}{2GA(s)}ds\right) +$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\left(\int_0^L \frac{M_y^2(s)}{2EI_y(s)}ds + \int_0^L \frac{M_z^2(s)}{2EI_z(s)}ds + \int_0^L \frac{T^2(s)}{2GI_t(s)}ds\right)$$

Quando em uma determinada barra atuam, simultaneamente, diversos esforços solicitantes (forças normais, forças cortantes, momentos fletores e momentos torçores), as parcelas mais significativas são, em geral, aquelas relacionadas aos momentos fletores e momentos torçores e, neste caso, as parcelas associadas às forças normais e forças cortantes podem ser desprezadas (nesta barra).

Contudo, se, em um dado elemento estrutural (barra, cabo, fio ou mola), tivermos um único esforço solicitante atuando, deve-se, naturalmente, considerar este único esforço para o cálculo da energia complementar do elemento; caso contrário, a solução encontrada partirá do pressuposto de que a rigidez associada ao esforço existente é infinitamente grande (vide exemplo #1 - slide #9).

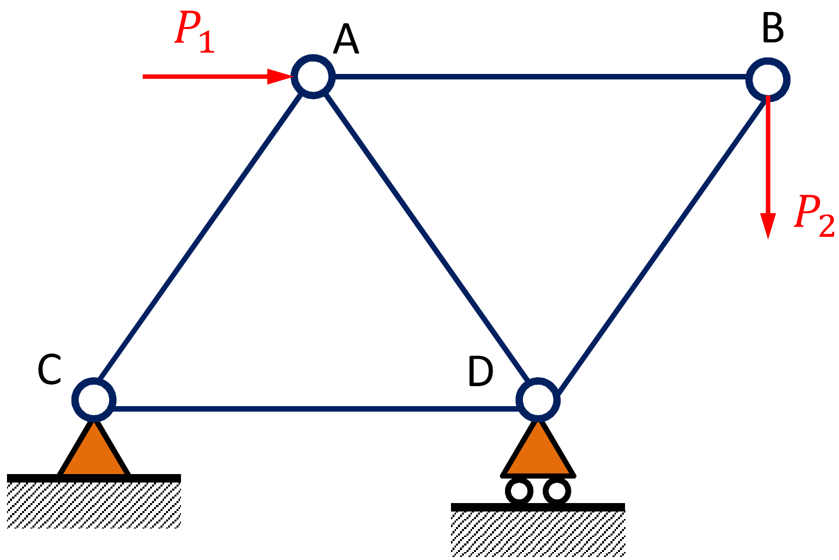
2. Limitações do uso do Princípio do Trabalho e da Energia no cálculo de deslocamentos e rotações

Nas aulas anteriores foram apresentados os conceitos de trabalho (W e W^*) e energia (U e U^*) bem como algumas aplicações simples visando ao cálculo de deslocamentos e rotações utilizando o Princípio do Trabalho e da Energia.

As principais limitações deste método são:

- Só pode ser empregado se um único esforço concentrado (força ou binário) for aplicado sobre a estrutura;
- Só pode ser empregado se o deslocamento a ser calculado for correspondente ao esforço aplicado (leia-se: deslocamento no mesmo ponto de aplicação do esforço, e medido na mesma direção e sentido do esforço aplicado).
- Salvo raras exceções, não pode ser empregado quando há esforços distribuídos aplicados sobre a estrutura.

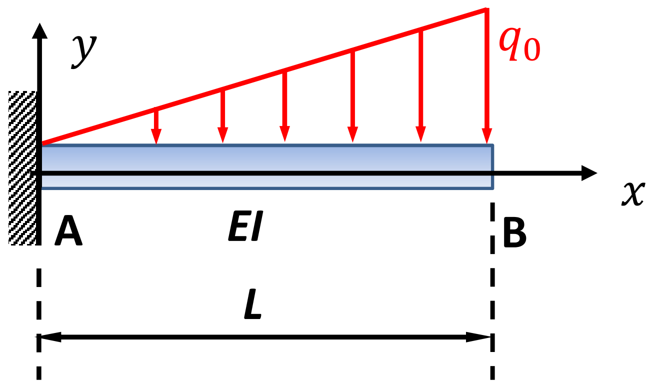
<ins>Exemplos:</ins>



Dada a geometria da estrutura (no caso, isostática), as propriedades dos materiais, as propriedades seccionais das barras, e os valores das forças externas, é perfeitamente possível determinar a energia complementar (U^*) do sistema, mas:

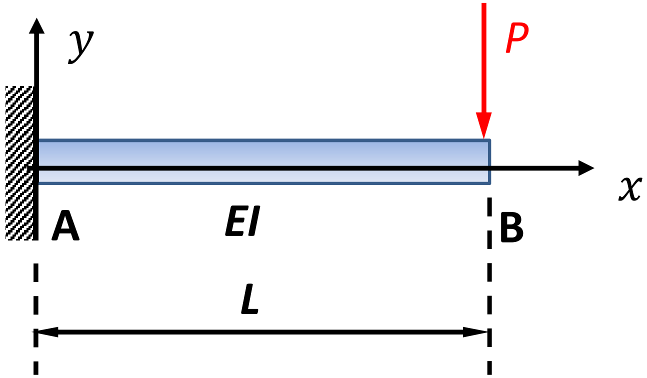
$$W = W^* = \frac{P_1 \delta_{H,A}}{2} + \frac{P_2 \delta_{V,B}}{2}$$

Assim, pelo Princípio do Trabalho e da Energia, ficaremos com uma única equação e com duas incógnitas ($\delta_{H,A}$ e $\delta_{V,B}$)!



Novamente temos uma estrutura isostática e é simples determinar a energia complementar (U^*) do sistema, mas...

$$W = W^* = -\frac{1}{2}\int_0^L q(x)v(x)dx = ?$$

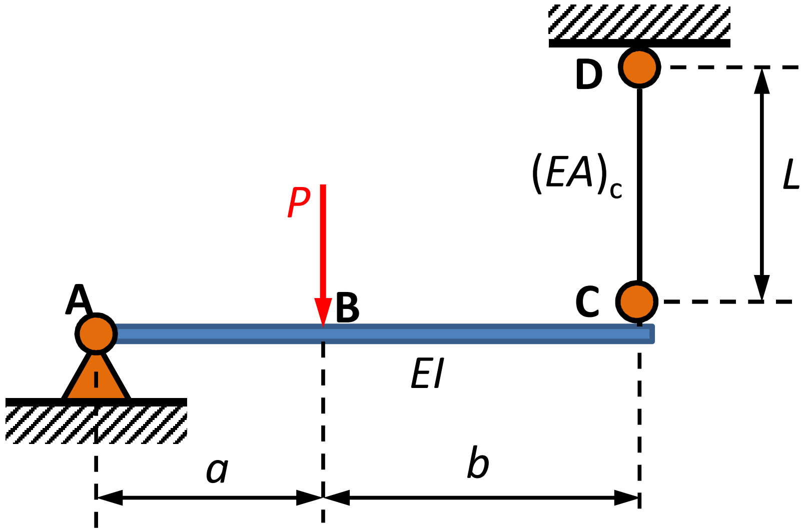


Nesse caso, só é possível aplicar o Princípio do Trabalho e da Energia se quisermos determinar o deslocamento vertical do ponto B. Qualquer outro deslocamento ou rotação não pode ser obtido desta forma, pois:

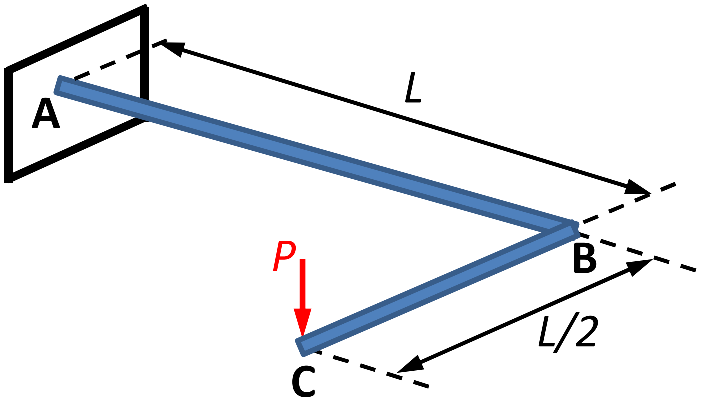
$$W = W^* = \frac{P\delta_{V,B}}{2}$$

3. Exemplos (Aplicações do P.T.E.)

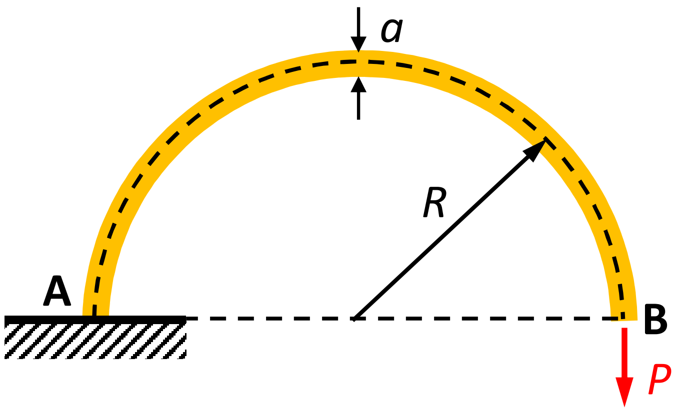
1) A viga ABC possui rigidez flexional EI e está simplesmente apoiada em A e presa a um cabo de rigidez axial $(EA)_c$ e comprimento L em C. A viga está submetida a uma força concentrada de magnitude P aplicada em B. Determine o deslocamento vertical dos pontos B e C em função dos parâmetros fornecidos.



2) A estrutura ABC é formada pelas barras AB e BC, de seção transversal circular cheia e diâmetro *d.* O material das barras é elástico-linear, com módulo de elasticidade *E* e coeficiente de Poisson ν dados. Considerando que a seção A esteja engastada e que uma força concentrada de magnitude *P* seja aplicada em C, determine o deslocamento vertical em C pelo Princípio do Trabalho e da Energia.



3) O arco AB possui raio de curvatura R e sua seção transversal é quadrada de lado *a*. O material das barras é elástico-linear, com módulo de elasticidade *E*. Considerando que a seção A esteja engastada e que uma força concentrada de magnitude *P* seja aplicada em B, determine o deslocamento vertical neste ponto pelo Princípio do Trabalho e da Energia, em função dos parâmetros fornecidos.
Obs: Considere também as parcelas devidas à força normal e à força cortante no cálculo da energia complementar e verifique em quais condições tais parcelas podem ser desprezadas.



4. Teorema de Crotti-Engesser

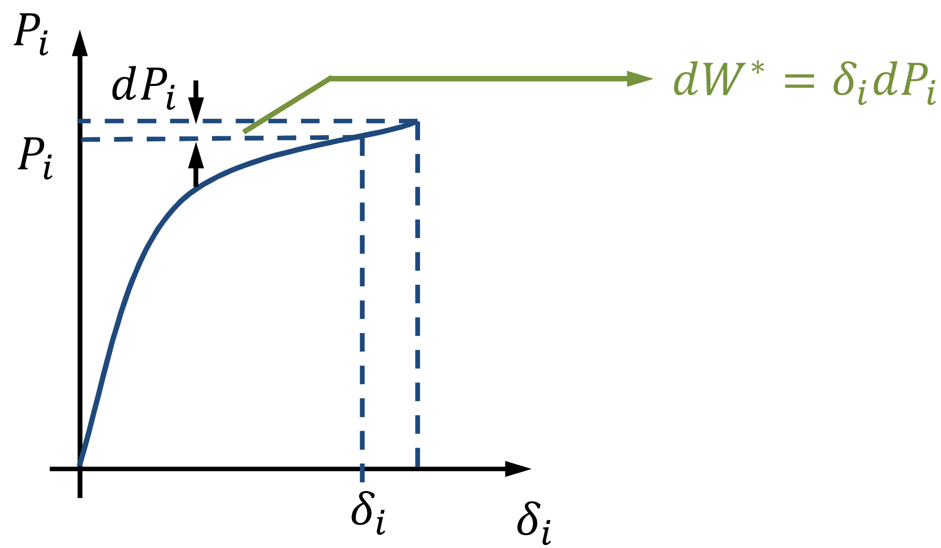
Consideremos um sistema estrutural em equilíbrio sob a ação de n esforços externos (forças ou binários) independentes e designados genericamente por P_i, com $1 \leq i \leq n$. Seja δ_i o deslocamento (linear ou angular) correspondente ao esforço aplicado P_i (ou seja, δ_i é o deslocamento medido no mesmo ponto de aplicação de P_i, e na mesma direção e sentido deste esforço). Pelo Teorema de Crotti-Engesser, o deslocamento δ_i (i fixo) é dado por:

$$\delta_i = \frac{\partial U^*}{\partial P_i}$$

...onde U^* corresponde à energia complementar de <u>todo o sistema estrutural</u> (nos casos em que existe simetria, é possível fazer simplificações aproveitando as simetrias da estrutura e do carregamento).

Demonstração:

Seja o sistema estrutural conforme descrito no enunciado e consideremos que a um (e somente a um) esforço, denominado P_i, seja dada uma variação dP_i, enquanto todos os demais esforços são mantidos fixos (sem qualquer variação).
O acréscimo no trabalho complementar do sistema será devido apenas ao acréscimo dP_i e é dado por:



Por outro lado, sendo a energia complementar uma função de todos os esforços externos aplicados, a variação correspondente desta energia em virtude da variação (única e exclusivamente) dada ao esforço externo P_i será:

$$dU^* = \left(\frac{\partial U^*}{\partial P_i}\right) dP_i$$

Considerando que não haja qualquer tipo de dissipação de energia, temos (para qualquer variação dP_i):

$$dW^* = dU^* \quad \Longleftrightarrow \quad \delta_i dP_i = \left(\frac{\partial U^*}{\partial P_i}\right) dP_i$$

Logo: $$\delta_i = \left(\frac{\partial U^*}{\partial P_i}\right)$$

5. 1º Teorema de Castigliano

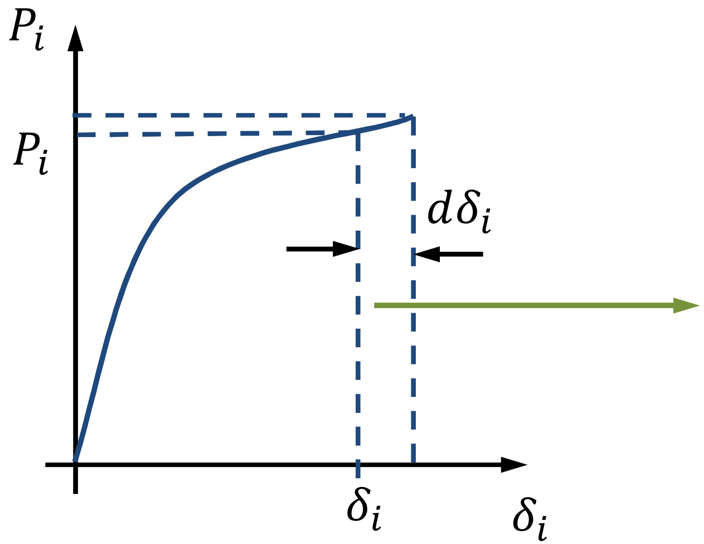
Consideremos um sistema estrutural em equilíbrio sob a ação de n esforços externos (forças ou binários) independentes e designados genericamente por P_i, com $1 \leq i \leq n$. Seja δ_i o deslocamento (linear ou angular) correspondente ao esforço aplicado P_i (ou seja, é o deslocamento medido no mesmo ponto de aplicação do esforço, e na mesma direção e sentido do esforço). Pelo 1º Teorema de Castigliano, temos:

$$P_i = \frac{\partial U}{\partial \delta_i}$$

...onde U corresponde à energia de deformação de todo o sistema estrutural (novamente, nos casos em que existe simetria, é possível fazer simplificações aproveitando as simetrias da estrutura e do carregamento).

Demonstração:

Seja o sistema estrutural conforme descrito no enunciado e consideremos que a um (e somente um) deslocamento, denominado δ_i seja dada uma variação $d\delta_i$, enquanto todos os demais deslocamentos são mantidos fixos (sem qualquer variação).
O acréscimo no trabalho de deformação do sistema será devido apenas ao acréscimo $d\delta_i$ e é dado por:



$dW = P_i d\delta_i$

Por outro lado, sendo a energia de deformação uma função de todos os deslocamentos correspondentes aos esforços aplicados, a variação correspondente desta energia em virtude da variação (única e exclusivamente) dada ao deslocamento δ_i será:

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial \delta_i}\right) d\delta_i$$

Considerando que não haja qualquer tipo de dissipação de energia, temos (para qualquer variação $d\delta_i$):

$$dW = dU \quad \Longleftrightarrow \quad P_i d\delta_i = \left(\frac{\partial U}{\partial \delta_i}\right) d\delta_i$$

Logo: $$P_i = \left(\frac{\partial U}{\partial \delta_i}\right)$$

6. 2º Teorema de Castigliano

O 2º Teorema de Castigliano decorre da aplicação do Teorema de Crotti-Engesser, porém considerando que a estrutura (como um todo) possui comportamento elástico-linear. Nesse caso, sabemos que a energia de deformação e a energia complementar são numericamente iguais. Se expressarmos a energia de deformação em função dos esforços externos (ao invés de expressá-la em função dos deslocamentos correspondentes), teremos:

$$U^* = U$$

Logo: $$\delta_i = \left(\frac{\partial U^*}{\partial P_i}\right) \Rightarrow \delta_i = \left(\frac{\partial U}{\partial P_i}\right)$$

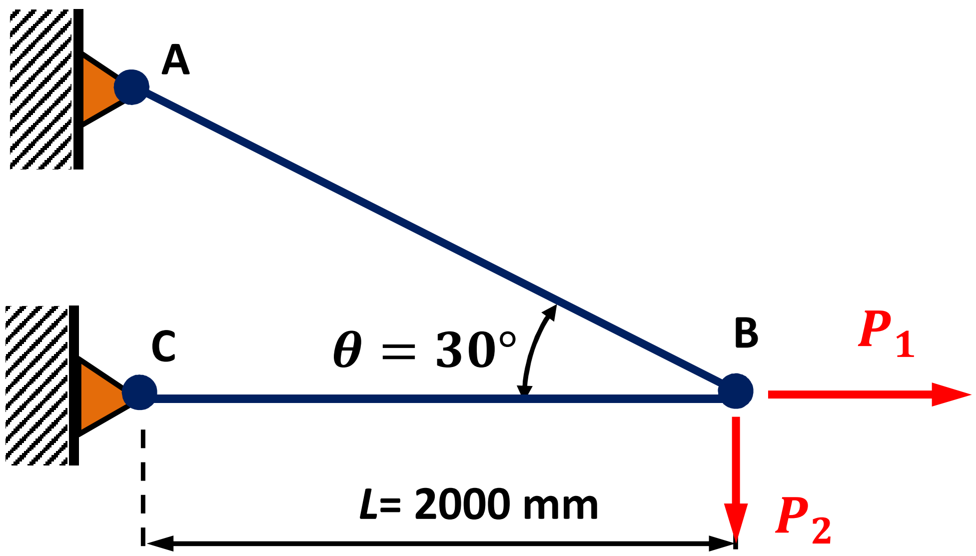
Sendo: $$U = U(P_1, P_2, \dots, P_j, \dots, P_n)$$

7. Exemplos de aplicação

Ex.1. O suporte ABC ilustrado na figura sustenta uma carga horizontal $P_1 = 5\ kN$ e uma carga vertical $P_2 = 20\ kN$. Ambas têm área de seção transversal *A* = 20 cm^2 e são feitas de aço (*E* = 200 GPa).

a) Determine o deslocamento horizontal e vertical da junta B;

b) Verifique que o trabalho complementar é igual à energia complementar.

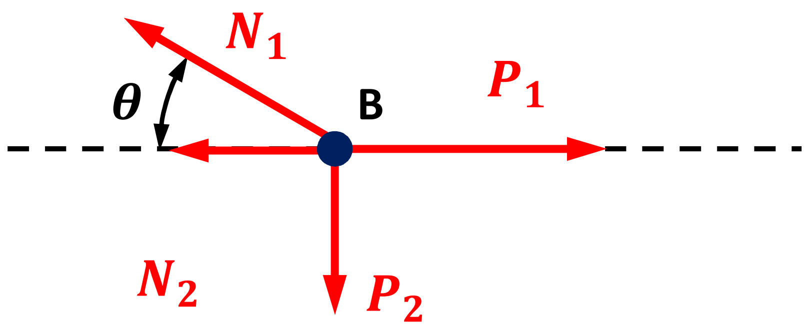


Solução:

Como se trata de uma estrutura isostática, o cálculo da energia complementar pode ser feito sem dificuldades, bastando determinar os esforços solicitantes (forças normais) em cada barra. Deve-se ressaltar que, para a aplicação do Teorema de Crotti-Engesser, os esforços externos aplicados devem ser considerados <u>independentes</u>. Como vimos na Aula #20, as forças normais nas barras são:

$$N_1 = \frac{P_2}{sen\theta}$$

$$N_2 = P_1 - \frac{P_2}{tg\theta}$$



E a energia complementar total do sistema é dada por:

$$U^* = \frac{N_1^2 L_1}{2EA} + \frac{N_2^2 L_2}{2EA}$$

Resultando: $$U^* = \frac{L}{2EA}\left[\frac{P_2^2}{sen^2\theta cos\theta} + P_1^2 + \frac{P_2^2}{tg^2\theta} - \frac{2P_1P_2}{tg\theta}\right]$$

Pelo Teorema de Crotti-Engesser:

$$\delta_{H,B} = \delta_1 = \left(\frac{\partial U^*}{\partial P_1}\right) = \frac{P_1 L}{EA} - \frac{P_2 L}{EA} cotg\theta \cong -0{,}15\ mm$$

$$\delta_{V,B} = \delta_2 = \left(\frac{\partial U^*}{\partial P_2}\right) = -\frac{P_1 L}{EA} cotg\theta + \frac{P_2 L}{EA}\left(\frac{cos^3\theta + 1}{sen^2\theta cos\theta}\right) \cong 0{,}72\ mm$$

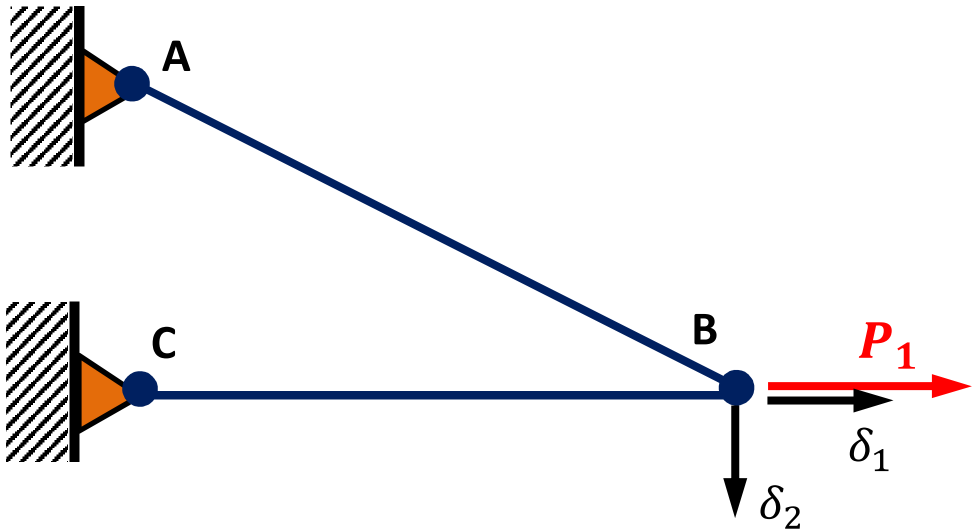
Deve-se observar que:

1. Tendo a estrutura comportamento elástico-linear, as relações entre deslocamentos e esforços são todas lineares;
2. Os sinais diante de cada esforço mostram diretamente seu efeito sobre cada deslocamento. Observe:

Fazendo $P_2 = 0$:

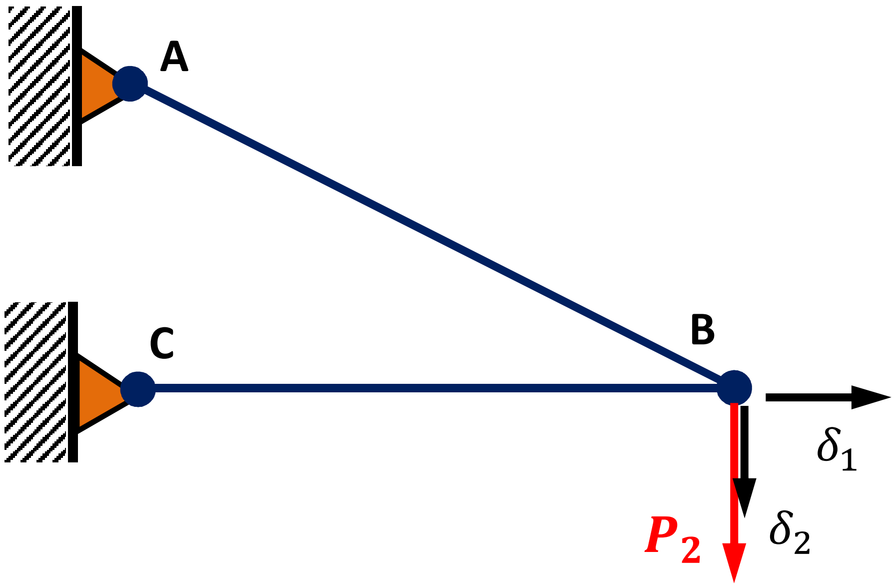
$$\delta_{H,B} = \delta_1 = \frac{P_1 L}{EA}$$

$$\delta_{V,B} = \delta_2 = -\frac{P_1 L}{EA} cotg\theta$$



Fazendo $P_1 = 0$:

$$\delta_{H,B} = \delta_1 = -\frac{P_2 L}{EA} cotg\theta \qquad \delta_{V,B} = \delta_2 = +\frac{P_2 L}{EA}\left(\frac{cos^3\theta + 1}{sen^2\theta cos\theta}\right)$$



Finalmente, determinando o trabalho complementar (que, nesse caso, será igual ao trabalho de deformação):

$$W^* = W = \frac{P_1\delta_1}{2} + \frac{P_2\delta_2}{2}$$

$$W^* = W = \frac{P_1}{2}\left(\frac{P_1 L}{EA} - \frac{P_2 L}{EA}cotg\theta\right) + \frac{P_2}{2}\left[-\frac{P_1 L}{EA}cotg\theta + \frac{P_2 L}{EA}\left(\frac{cos^3\theta + 1}{sen^2\theta cos\theta}\right)\right]$$

$$W^* = W = \left(\frac{P_1^2 L}{2EA} - \frac{P_1 P_2 L}{2EA}cotg\theta\right) + \left[-\frac{P_1 P_2 L}{2EA}cotg\theta + \frac{P_2^2 L}{2EA}\left(\frac{cos^3\theta + 1}{sen^2\theta cos\theta}\right)\right]$$

O que mostra que: $W^* = U^* = \frac{L}{2EA}\left[P_1^2 + \frac{P_2^2(cos^3\theta + 1)}{sen^2\theta cos\theta} - \frac{2P_1P_2}{tg\theta}\right]$

Na forma matricial as relações entre as forças e os deslocamentos nodais ficam escritas como:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{Bmatrix}$$

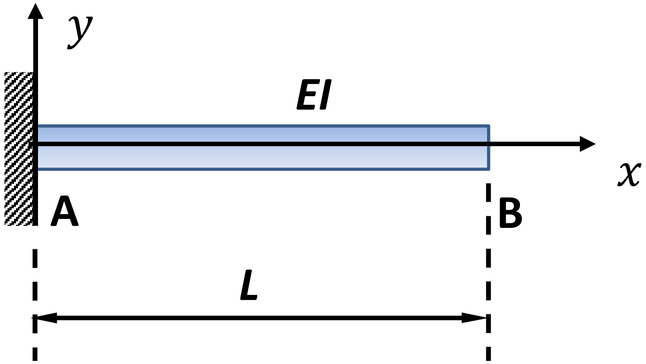
Onde os elementos k_{ij}, que fornecem a matriz de rigidez do sistema são, nesse caso, dados por:

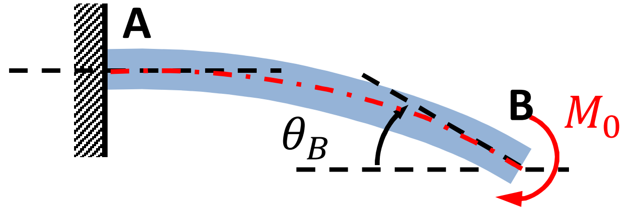
$$k_{11} = \frac{EA}{L}(1 + cos^3\theta)$$

$$k_{12} = k_{21} = \frac{EA}{L}(sen\theta cos^2\theta)$$

$$k_{22} = \frac{EA}{L}(sen^2\theta cos\theta)$$

Ex.2. A barra AB, engastada em A e livre em B, está submetida a um momento fletor M_0 na extremidade B. Determine o ângulo de rotação θ_B pelo Teorema de Crotti-Engesser.





Dados: M_0, L, EI.

Solução:

É imediato verificar que a barra está submetida à flexão uniforme>
Logo:

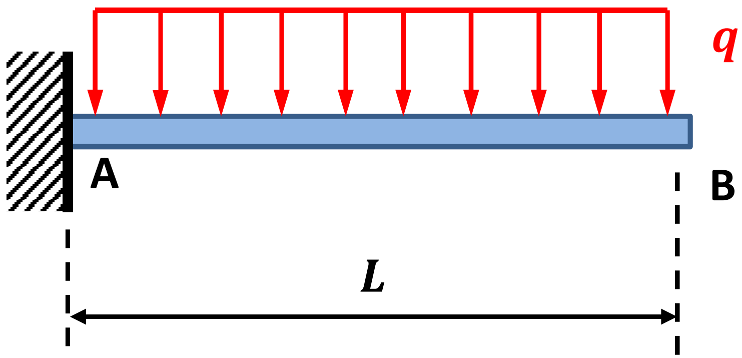
$$M(x) = -M_0, \qquad 0 \leq x \leq L$$

A energia complementar será:

$$U^* = \int_0^L \frac{M_z^2(x)}{2EI_z(x)} dx = \int_0^L \frac{M_0^2}{2EI} dx = \frac{M_0^2 L}{2EI}$$

Pelo Teorema de Crotti-Engesser: $\theta_B = \dfrac{\partial U^*}{\partial M_0} = \dfrac{M_0 L}{EI}$

Ex.3. Determine o deslocamento vertical e a rotação da seção B da viga engastada-livre AB indicada na figura. Despreze a parcela da energia complementar devida às forças cortantes no cálculo.
São dados: q, L, EI.

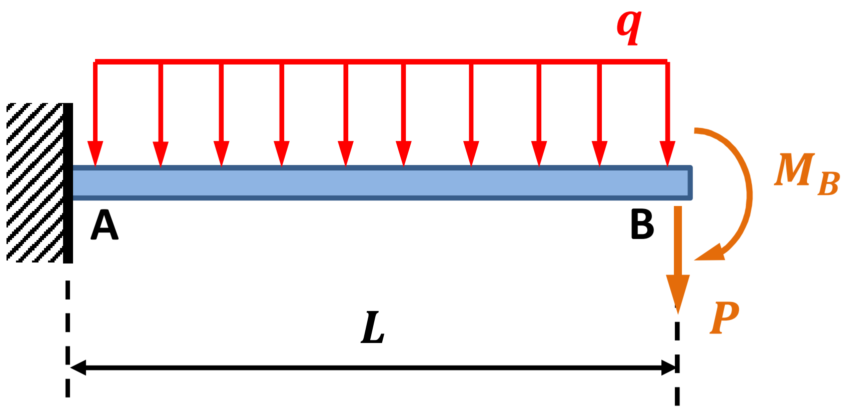


Solução:

Para a aplicação do Teorema de Crotti-Engesser é necessário termos esforços correspondentes aos deslocamentos que desejamos calcular. No caso em tela, queremos determinar:

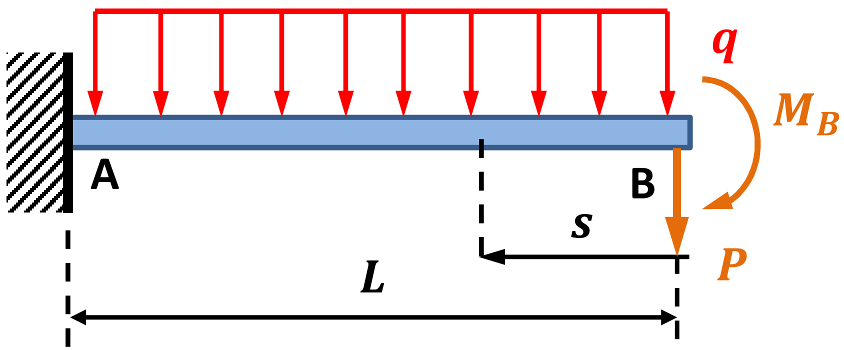
- o deslocamento vertical da seção B (o que exige a presença de uma força vertical aplicada em B) e
- a rotação da seção B (o que exige a presença de um momento fletor aplicado em B).

Como estes esforços não fazem parte do carregamento (original) aplicado na estrutura, é necessário criá-los:



A energia complementar (devida apenas à flexão) é dada por:

$$U^* = \int_0^L \frac{M_z^2(s)}{2EI} ds$$



$$M_z(s) = -\frac{qs^2}{2} - Ps - M_B$$

$$(0 \leq s \leq L)$$

Pelo Teorema de Crotti-Engesser: $\delta_{V,B} = \left(\frac{\partial U^*}{\partial P}\right)$ $\theta_B = \left(\frac{\partial U^*}{\partial M_B}\right)$

Resultam:

$$\delta_{V,B} = \left(\frac{\partial U^*}{\partial P}\right) = \frac{\partial}{\partial P}\left(\int_0^L \frac{M_z^2}{2EI} ds\right) = \int_0^L \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{M_z^2}{2EI}\right) ds$$

Como: $$\frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{M_z^2}{2EI}\right) = \frac{\partial}{\partial M_z}\left(\frac{M_z^2}{2EI}\right)\frac{\partial M_z}{\partial P} = \frac{M_z}{EI}\frac{\partial M_z}{\partial P}$$

Teremos:

$$\delta_{V,B} = \left(\frac{\partial U^*}{\partial P}\right) = \int_0^L \frac{M_z}{EI}\frac{\partial M_z}{\partial P} ds$$

E, analogamente: $\theta_B = \left(\dfrac{\partial U^*}{\partial M_B}\right) = \displaystyle\int_0^L \frac{M_z}{EI}\frac{\partial M_z}{\partial M_B}\, ds$

Resultam:

$$\delta_{V,B} = \int_0^L \frac{M_z}{EI}\frac{\partial M_z}{\partial P}\, ds = \frac{1}{EI}\int_0^L \left(-\frac{qs^2}{2} - Ps - M_B\right)(-s)\, ds$$

$$\delta_{V,B} = \frac{1}{EI}\int_0^L \left(\frac{qs^3}{2} + Ps^2 + M_B s\right) ds = \frac{1}{EI}\left(\frac{qL^4}{8} + \frac{PL^3}{3} + \frac{M_B L^2}{2}\right)$$

Como temos: $P = 0,\ M_B = 0$: $\delta_{V,B} = \dfrac{qL^4}{8EI}$

$$\theta_B = \int_0^L \frac{M_z}{EI}\frac{\partial M_z}{\partial M_B} ds = \frac{1}{EI}\int_0^L \left(-\frac{qs^2}{2} - Ps - M_B\right)(-1)ds$$

$$\theta_B = \frac{1}{EI}\int_0^L \left(\frac{qs^2}{2} + Ps + M_B\right) ds = \frac{1}{EI}\left(\frac{qL^3}{6} + \frac{PL^2}{2} + M_B L\right)$$

Como temos: $P = 0,\ M_B = 0$: $\qquad \theta_B = \dfrac{qL^3}{6EI}$

Obs: Os sinais positivos encontrados para o deslocamento vertical e para a rotação indicam que os sentidos destes deslocamentos correspondem aos mesmos sentidos arbitrados para os esforços correspondentes.

Referências:

[1] Martins, C.A. Introdução ao Estudo das Energias de Deformação e Complementar, (2021), 105p.

[2] Gere, J.M., Goodno, B.J. Mecânica dos Materiais – Tradução da 7ª edição norte-americana. Cengage Learning, 2010, 860p, Cap.9 (item 9.8).