



*Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica*

PME-3211 - Mecânica dos Sólidos II

Aula #11

Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.

04/10/2023



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Agenda:

1. Círculos de Mohr das deformações;
2. Transformação de deformação;
3. Componentes esférica e antiesférica do tensor das deformações;
4. Tensor das deformações em outros sistemas de coordenadas;
5. Equações constitutivas e a Lei de Hooke generalizada;
6. Problemas envolvendo extensometria.



1. Círculos de Mohr das deformações

Consideremos o tensor das deformações (na vizinhança) de um ponto P de um dado sólido escrito na base formada pelas direções principais de deformação. Sem perda de generalidade, consideremos ainda que:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_y \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_z$$

Assim:

$$[E]_b = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

$$b = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Considerando uma fibra que passa pelo ponto P e cujo versor tangente tem a direção dada por um versor $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)_b$ qualquer, são válidas as relações:

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$$

$$\{\vec{\epsilon}\} = [E]\{\vec{n}\} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_1 n_x \\ \epsilon_2 n_y \\ \epsilon_3 n_z \end{Bmatrix}$$

$$\epsilon = \{\vec{\epsilon}\} \cdot \{\vec{n}\} = \epsilon_1 n_x^2 + \epsilon_2 n_y^2 + \epsilon_3 n_z^2$$

$$\{\vec{\epsilon}\} \cdot \{\vec{\epsilon}\} = \epsilon_1^2 n_x^2 + \epsilon_2^2 n_y^2 + \epsilon_3^2 n_z^2 = \epsilon^2 + \frac{\gamma^2}{4}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Assim, na forma matricial escrevemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \\ \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 & \varepsilon_3^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} n_x^2 \\ n_y^2 \\ n_z^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \varepsilon^2 + \frac{\gamma^2}{4} \end{Bmatrix}$$

Admitindo, a princípio, que os três alongamentos principais são diferentes entre si e resolvendo o sistema linear dado acima nas “incógnitas” n_x^2 , n_y^2 e n_z^2 , encontramos:

$$n_x^2 = \frac{(\varepsilon - \varepsilon_2)(\varepsilon - \varepsilon_3) + (\gamma^2/4)}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)}$$

$$n_y^2 = \frac{(\varepsilon - \varepsilon_1)(\varepsilon - \varepsilon_3) + (\gamma^2/4)}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)}$$

$$n_z^2 = \frac{(\varepsilon - \varepsilon_1)(\varepsilon - \varepsilon_2) + (\gamma^2/4)}{(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Lembrando que, por convenção, temos $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$ e que, por hipótese:
 $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$, teremos:

$$n_x^2 = \frac{(\varepsilon - \varepsilon_2)(\varepsilon - \varepsilon_3) + (\gamma^2/4)}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)} \geq 0 \Leftrightarrow (\varepsilon - \varepsilon_2)(\varepsilon - \varepsilon_3) + (\gamma^2/4) \geq 0$$

$$n_y^2 = \frac{(\varepsilon - \varepsilon_1)(\varepsilon - \varepsilon_3) + (\gamma^2/4)}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)} \geq 0 \Leftrightarrow (\varepsilon - \varepsilon_1)(\varepsilon - \varepsilon_3) + (\gamma^2/4) \leq 0$$

$$n_z^2 = \frac{(\varepsilon - \varepsilon_1)(\varepsilon - \varepsilon_2) + (\gamma^2/4)}{(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)(\varepsilon_3 - \varepsilon_2)} \geq 0 \Leftrightarrow (\varepsilon - \varepsilon_1)(\varepsilon - \varepsilon_2) + (\gamma^2/4) \geq 0$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

ou de forma equivalente:

$$n_x^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\varepsilon - \left(\frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_3}{2} \right) \right]^2 + \left(\frac{\gamma}{2} \right)^2 \geq \left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{2} \right)^2 \quad \bigcirc$$

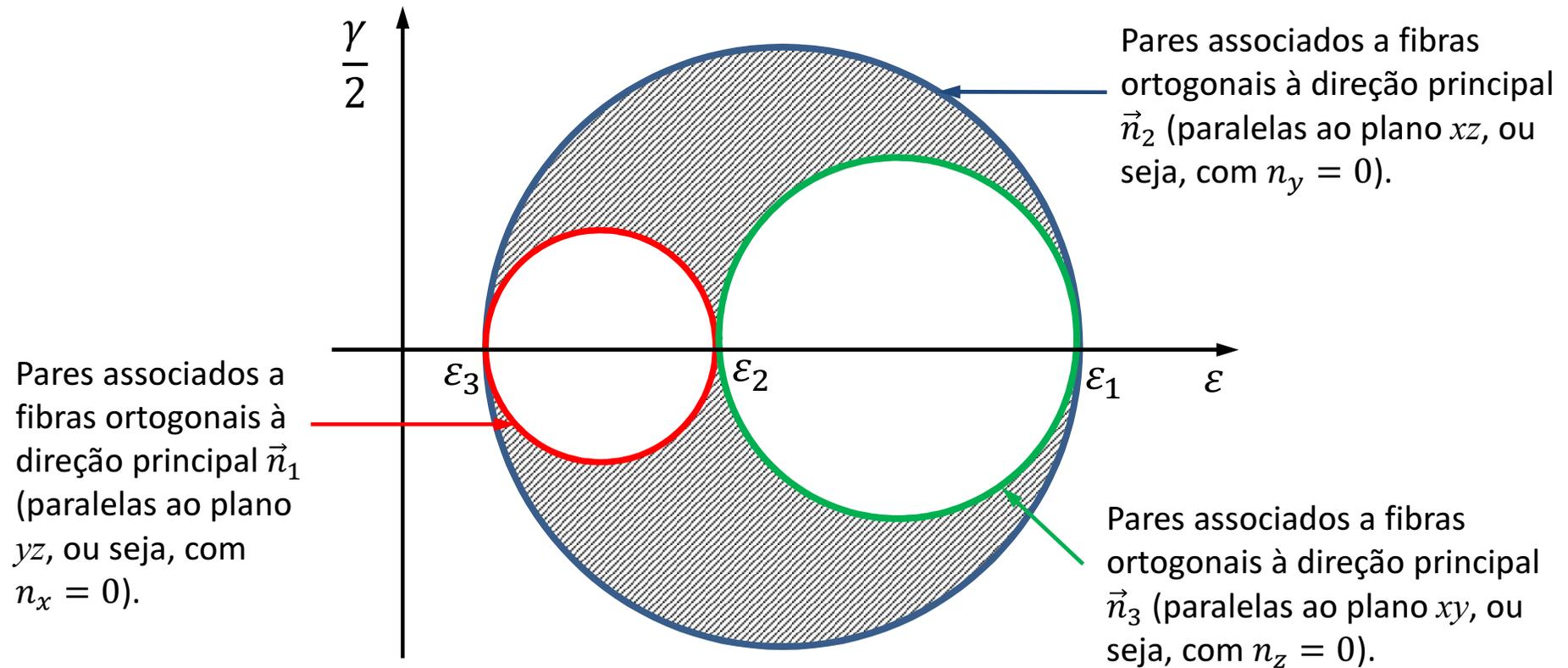
$$n_y^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\varepsilon - \left(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3}{2} \right) \right]^2 + \left(\frac{\gamma}{2} \right)^2 \leq \left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{2} \right)^2 \quad \bigcirc$$

$$n_z^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\varepsilon - \left(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \right) \right]^2 + \left(\frac{\gamma}{2} \right)^2 \geq \left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \right)^2 \quad \bigcirc$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

No espaço definido pelas componentes $(\varepsilon, \gamma/2)$ do vetor deformação associado ao ponto P , para cada direção \vec{n} tomada, as inequações dadas representam geometricamente a seguinte região hachurada:





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Do exposto podemos concluir que:

- 1) Nenhum alongamento é superior ao alongamento principal ε_1 em valor algébrico;
- 2) Nenhum alongamento é inferior ao alongamento principal ε_3 em valor algébrico;
- 3) A maior distorção entre duas fibras que passam pelo ponto vale:

$$\gamma_{m\acute{a}x} = \varepsilon_1 - \varepsilon_3$$

- 4) Tal distorção ocorre entre fibras que são ortogonais à direção principal \vec{n}_2 (ou seja, são paralelas ao plano xz) e que formam 45° entre as direções principais \vec{n}_1 e \vec{n}_3 ;
- 5) Para uma fibra genérica (que não seja ortogonal a nenhuma direção principal de deformação) as componentes ε e $\gamma/2$ do vetor deformação associado estão dentro da região hachurada compreendida pelas três circunferências.



2. Transformação de deformação

Sejam $[E]_b$ e $[E]_{b'}$, as matrizes do tensor das deformações de um mesmo ponto de um sólido, porém escritas em bases diferentes. Como foi demonstrado anteriormente para o caso de transformação de tensão (vide aula #05, item 3), é possível mostrar que:

$$[E]_{b'} = [M]^t [E]_b [M]$$

onde:

$[M]$ = matriz de mudança de base (da base b para a base b').



3. Componentes esférica e antiesférica do tensor das deformações

Seja $[E]_b$ o tensor das pequenas deformações em um determinado ponto de um corpo, dado pelas suas componentes em uma base b qualquer:

$$[E] \cong \frac{[L] + [L]^t}{2} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{yx}}{2} & \frac{\gamma_{zx}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{zy}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Por definição, a componente esférica do tensor $[E]_b$ é o tensor dado por:

$$[E]_{e,b} = \begin{bmatrix} \varepsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_m & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_m \end{bmatrix} \quad \text{Onde: } \varepsilon_m = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3} = \frac{K_1}{3}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

A componente antiesférica do tensor $[E]_b$ é a que resta quando subtraímos do tensor $[E]_b$ sua componente esférica:

$$[E]_{a,b} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_m & \frac{\gamma_{yx}}{2} & \frac{\gamma_{zx}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y - \varepsilon_m & \frac{\gamma_{zy}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z - \varepsilon_m \end{bmatrix}$$

É imediato observar que a componente esférica (hidrostática) do tensor das deformações é escrita da mesma forma em qualquer base ortonormal (ou seja, tal componente independe da base). Note:

$$\begin{aligned} [E]_{b'} &= [M]^t ([E]_{e,b} + [E]_{a,b}) [M] = \\ &= [M]^t [E]_{e,b} [M] + [M]^t [E]_{a,b} [M] = [E]_{e,b'} + [E]_{a,b'} \end{aligned}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$\begin{aligned} [E]_{e,b'} &= [M]^t [E]_{e,b} [M] = \varepsilon_m [M]^t [I] [M] = \\ &= \varepsilon_m [M]^t [M] = \varepsilon_m [I] = [E]_{e,b} \end{aligned}$$

Desta forma, é a componente antiesférica do tensor das deformações a responsável pela diferença (se houver) entre os valores dos alongamentos principais.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

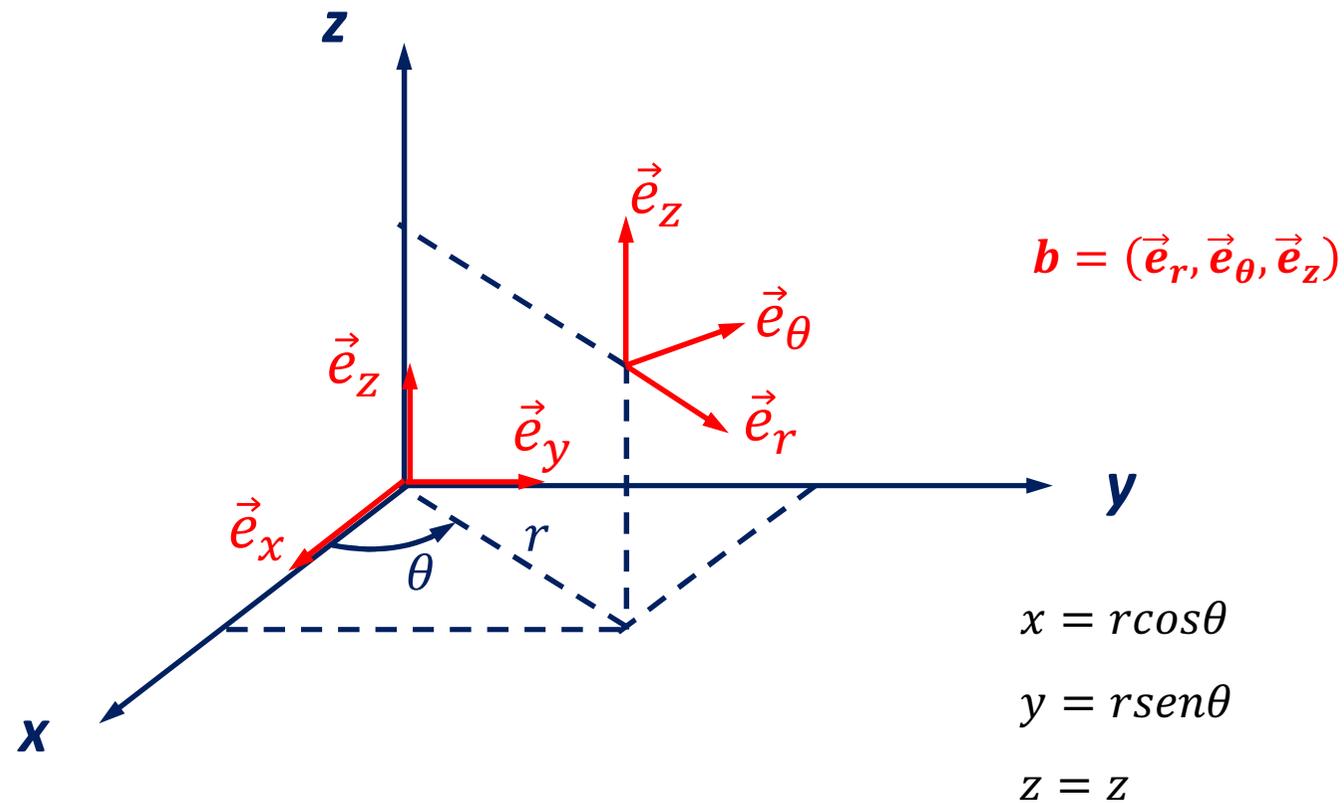
Notas:

1. Em um meio isótropo, a componente esférica do tensor das deformações (na vizinhança) de um dado ponto é a responsável pela mudança de volume na vizinhança do ponto, sem alterar sua forma (já que a parte esférica não provoca distorções);
2. Em um meio isótropo, a componente antiesférica do tensor das deformações (na vizinhança) de um dado ponto é responsável pela mudança de forma, sem provocar alteração do volume na vizinhança do ponto;
3. A componente esférica do tensor das deformações independe da base já que o alongamento médio ε_m está associado ao invariante K_1 do tensor das deformações;
4. Naturalmente, a componente antiesférica do tensor das deformações dependerá da base, a não ser que tal componente seja identicamente nula.



4. Tensor das deformações em outros sistemas de coordenadas

Em coordenadas cilíndricas:





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

O tensor das deformações (em condições de L.G.) fica dado por:

$$[E] \cong \frac{[L] + [L]^t}{2} = \begin{bmatrix} \varepsilon_r & \frac{\gamma_{r\theta}}{2} & \frac{\gamma_{rz}}{2} \\ \frac{\gamma_{r\theta}}{2} & \varepsilon_\theta & \frac{\gamma_{\theta z}}{2} \\ \frac{\gamma_{rz}}{2} & \frac{\gamma_{\theta z}}{2} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Onde:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r}$$

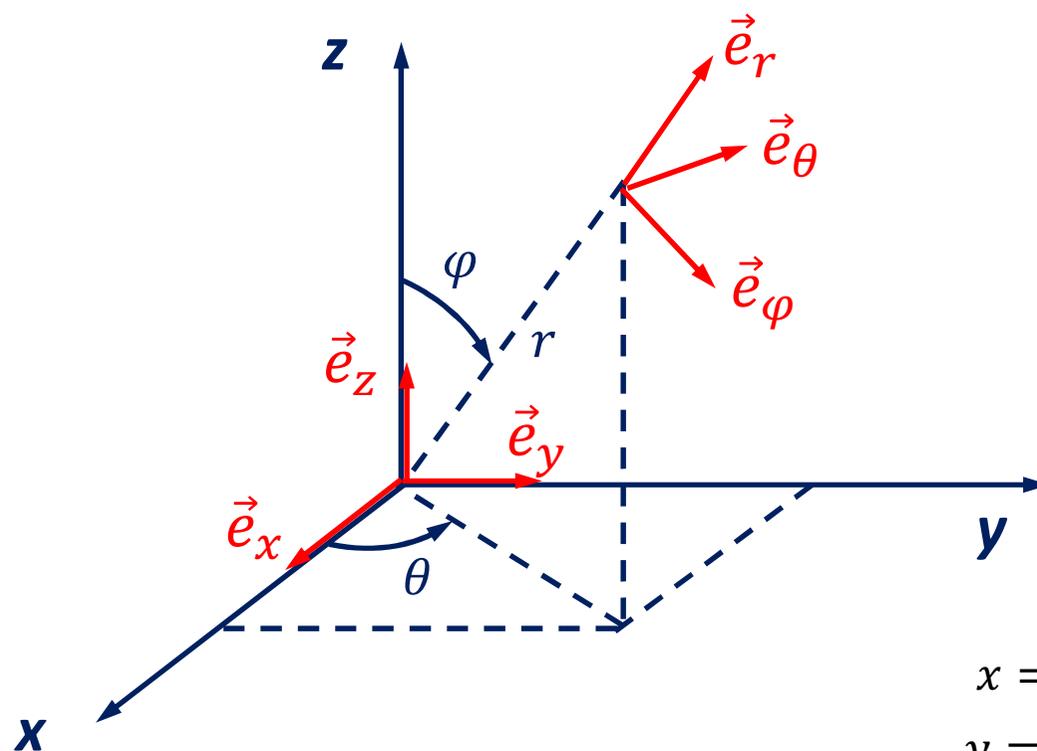
$$\gamma_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}$$

$$\gamma_{\theta z} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Em coordenadas esféricas:



$$\mathbf{b} = (\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta)$$

$$x = r \sin \varphi \cos \theta$$

$$y = r \sin \varphi \sin \theta$$

$$z = r \cos \varphi$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

O tensor das deformações (em condições de L.G.) fica dado por:

$$[E] \cong \frac{[L] + [L]^t}{2} = \begin{bmatrix} \varepsilon_r & \frac{\gamma_{r\varphi}}{2} & \frac{\gamma_{r\theta}}{2} \\ \frac{\gamma_{r\varphi}}{2} & \varepsilon_\varphi & \frac{\gamma_{\varphi\theta}}{2} \\ \frac{\gamma_{r\theta}}{2} & \frac{\gamma_{\varphi\theta}}{2} & \varepsilon_\theta \end{bmatrix}$$

Onde:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \qquad \varepsilon_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r \cdot \text{sen}\varphi} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\varphi}{r} \cot g\varphi + \frac{u_r}{r}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

E as distorções são dadas por:

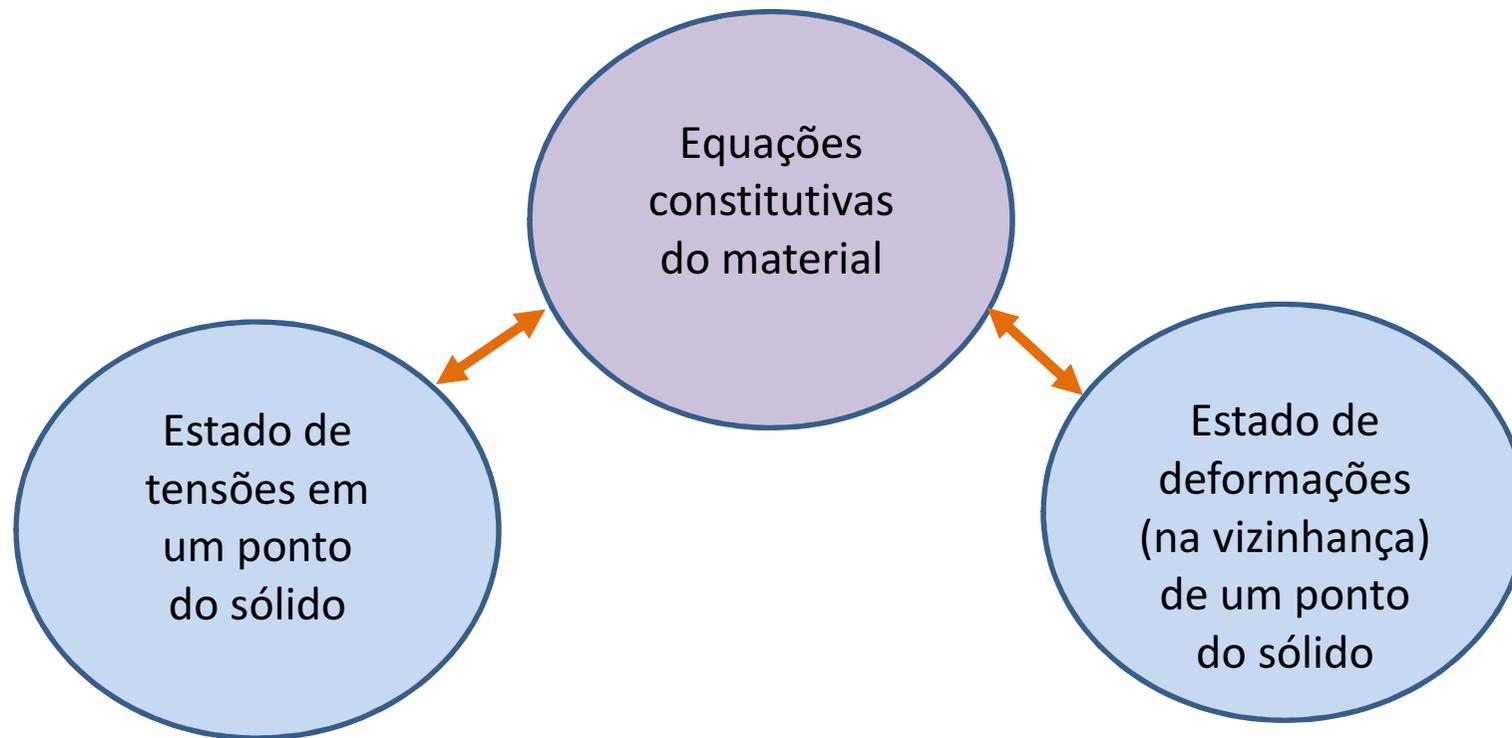
$$\gamma_{r\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r}$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{r \cdot \text{sen}\varphi} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r}$$

$$\gamma_{\varphi\theta} = \frac{1}{r \cdot \text{sen}\varphi} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} - \frac{u_\theta}{r} \cot g\varphi$$



5. Equações constitutivas e a Lei de Hooke generalizada





Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

As equações constitutivas mais simples são as que estabelecem relações lineares entre as componentes de deformação e as componentes de tensão. No caso mais geral, estas relações lineares ficam:

$$\varepsilon_x = A_{11}\sigma_x + A_{12}\sigma_y + A_{13}\sigma_z + A_{14}\tau_{xy} + A_{15}\tau_{yz} + A_{16}\tau_{zx}$$

$$\varepsilon_y = A_{21}\sigma_x + A_{22}\sigma_y + A_{23}\sigma_z + A_{24}\tau_{xy} + A_{25}\tau_{yz} + A_{26}\tau_{zx}$$

$$\varepsilon_z = A_{31}\sigma_x + A_{32}\sigma_y + A_{33}\sigma_z + A_{34}\tau_{xy} + A_{35}\tau_{yz} + A_{36}\tau_{zx}$$

$$\gamma_{xy} = A_{41}\sigma_x + A_{42}\sigma_y + A_{43}\sigma_z + A_{44}\tau_{xy} + A_{45}\tau_{yz} + A_{46}\tau_{zx}$$

$$\gamma_{yz} = A_{51}\sigma_x + A_{52}\sigma_y + A_{53}\sigma_z + A_{54}\tau_{xy} + A_{55}\tau_{yz} + A_{56}\tau_{zx}$$

$$\gamma_{zx} = A_{61}\sigma_x + A_{62}\sigma_y + A_{63}\sigma_z + A_{64}\tau_{xy} + A_{65}\tau_{yz} + A_{66}\tau_{zx}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} & A_{46} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} & A_{56} \\ A_{61} & A_{62} & A_{63} & A_{64} & A_{65} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}$$

A matriz $[A]$ traz um total de 36 constantes elásticas, mas para materiais com comportamento elástico a matriz $[A]$ é simétrica ($A_{ij} = A_{ji}$), o que reduz o total de constantes elásticas para 21 (caso mais geral de anisotropia).



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Contudo, quando o material possui planos de simetria elástica, há uma redução ainda maior no número de constantes elásticas a serem determinadas, como nos casos a seguir:

Materiais ortótropos:

Os materiais ortótropos possuem três planos de simetria elástica, os quais são perpendiculares entre si. Considerando que estes planos de simetria elástica sejam os planos xy , yz e zx , as equações constitutivas ficam simplificadas para:



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}$$

Neste caso, são necessárias 9 constantes elásticas independentes para caracterizar o comportamento do material.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Materiais transversalmente isótropos:

Neste caso, todo plano ortogonal a uma dada direção (que define uma direção principal de elasticidade) é um plano de simetria elástica. Considerando que o eixo z seja o que define esta direção principal, as equações constitutivas ficam simplificadas na forma:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}$$

Sendo: $A_{11} = A_{22}$, $A_{13} = A_{23}$, $A_{55} = A_{66}$ e $A_{44} = f(A_{11}, A_{12})$

Neste caso, são necessárias apenas 5 constantes elásticas independentes para caracterizar o comportamento do material.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Materiais isotrópicos:

Neste caso, todo plano é um plano de simetria elástica do material e equações constitutivas ficam simplificadas na forma:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}$$

Sendo: $A_{11} = A_{22} = A_{33}$, $A_{12} = A_{13} = A_{23}$, $A_{44} = A_{55} = A_{66}$ e
 $A_{44} = f(A_{11}, A_{12})$

Neste caso, são necessárias apenas 2 constantes elásticas independentes para caracterizar o comportamento do material.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Utilizando a nomenclatura clássica, e considerando que os eixos x, y e z referem-se às direções 1, 2 e 3 (respectivamente), as equações constitutivas para materiais ortótropos ficam:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= +\frac{\sigma_1}{E_1} - \frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma_2 - \frac{\nu_{31}}{E_3}\sigma_3 & \gamma_{12} &= \frac{\tau_{12}}{G_{12}} \\ \varepsilon_2 &= -\frac{\nu_{12}}{E_1}\sigma_1 + \frac{\sigma_2}{E_2} - \frac{\nu_{32}}{E_3}\sigma_3 & \gamma_{23} &= \frac{\tau_{23}}{G_{23}} \\ \varepsilon_3 &= -\frac{\nu_{13}}{E_1}\sigma_1 - \frac{\nu_{23}}{E_2}\sigma_2 + \frac{\sigma_3}{E_3} & \gamma_{31} &= \frac{\tau_{31}}{G_{31}}\end{aligned}$$

Constantes elásticas independentes:

$$E_1, E_2, E_3, G_{12}, G_{23}, G_{31}, \nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}.$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Utilizando a nomenclatura clássica, e considerando que os eixos x, y e z referem-se às direções 1, 2 e 3 (respectivamente), as equações constitutivas para materiais transversalmente isotrópicos (sendo o plano de isotropia o plano xy = 12) ficam:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= +\frac{\sigma_1}{E_1} - \frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma_2 - \frac{\nu_{31}}{E_3}\sigma_3 & \gamma_{12} &= \frac{\tau_{12}}{G_{12}} \\ \varepsilon_2 &= -\frac{\nu_{12}}{E_1}\sigma_1 + \frac{\sigma_2}{E_2} - \frac{\nu_{32}}{E_3}\sigma_3 & \gamma_{23} &= \frac{\tau_{23}}{G_{23}} \\ \varepsilon_3 &= -\frac{\nu_{13}}{E_1}\sigma_1 - \frac{\nu_{23}}{E_2}\sigma_2 + \frac{\sigma_3}{E_3} & \gamma_{31} &= \frac{\tau_{31}}{G_{31}}\end{aligned}$$

Sendo: $E_1 = E_2$, $G_{23} = G_{31}$, $\nu_{31} = \nu_{32}$ e $G_{12} = E_1/(2(1 + \nu_{12}))$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Utilizando a nomenclatura clássica, as equações constitutivas para materiais isotrópicos ficam:

$$\varepsilon_x = +\frac{1}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\sigma_y - \frac{\nu}{E}\sigma_z \qquad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\nu}{E}\sigma_x + \frac{1}{E}\sigma_y - \frac{\nu}{E}\sigma_z \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\sigma_y + \frac{1}{E}\sigma_z \qquad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

Sendo: $G = E/(2(1 + \nu))$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Ou alternativamente:

$$\sigma_x = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2G\varepsilon_x \qquad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

$$\sigma_y = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2G\varepsilon_y \qquad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}$$

$$\sigma_z = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2G\varepsilon_z \qquad \tau_{zx} = G\gamma_{zx}$$

Sendo:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \qquad \lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Também é possível mostrar que, para materiais isotrópicos, a componente esférica (hidrostática) do tensor das tensões é diretamente proporcional à componente esférica (hidrostática) do tensor das deformações, e que a componente antiesférica (desviante) do tensor das tensões também é diretamente proporcional à componente antiesférica (desviante) do tensor das deformações, valendo:

$$[T]_e = 3K[E]_e$$

$$[T]_{a,b} = 2G[E]_{a,b}$$

Sendo:

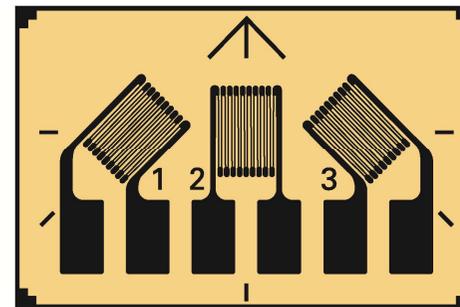
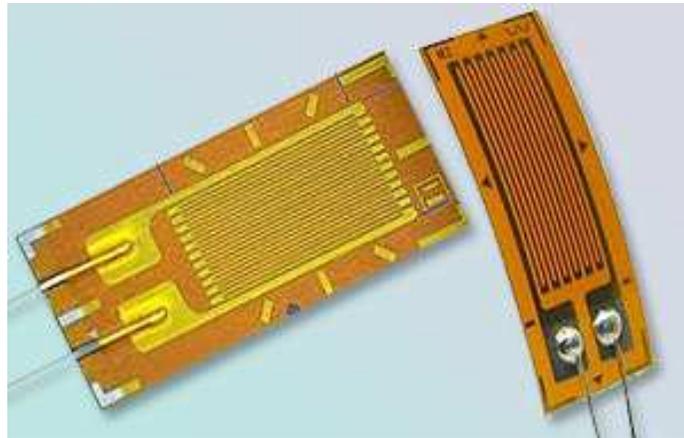
$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (\text{módulo de compressibilidade do material})$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (\text{módulo de cisalhamento do material})$$

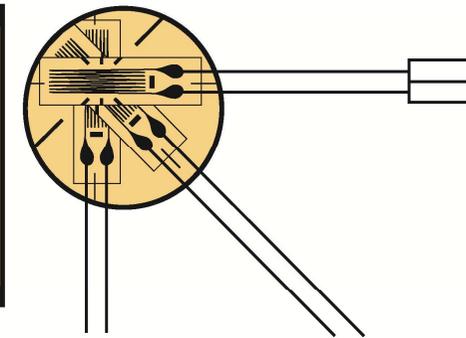


6. Problemas envolvendo extensometria

Os extensômetros (*strain gauges*) são dispositivos utilizados para a medição de deformações na superfície de estruturas. Cada extensômetro fornece uma única deformação medida segundo sua direção longitudinal.



(a) 45° strain gages three-element rosette



(b) Three-element strain-gage rosettes prewired

FIG. 7-36 Three electrical-resistance strain gages arranged as a 45° strain rosette (magnified view).



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

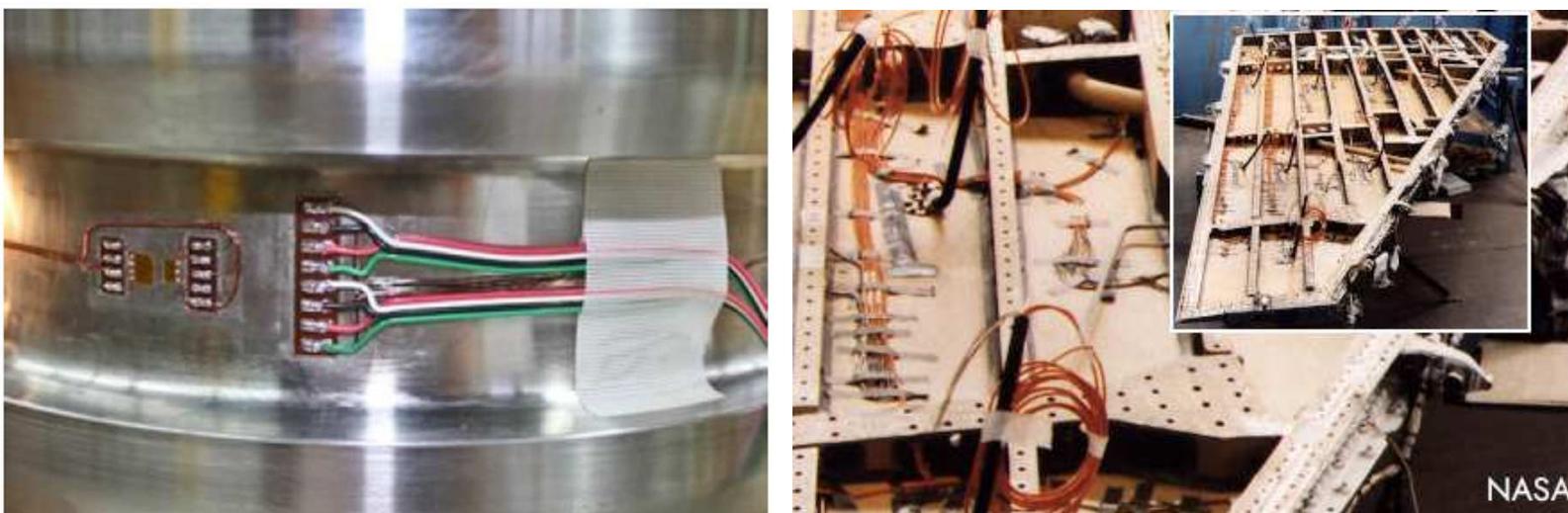


Fig. 1. Exemplos de aplicação de extensômetros na indústria mecânica [4, 5].



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Considerando que o plano em que o extensômetro é colado é o plano xy , observamos que as tensões que atuam na superfície (ou seja, no plano de normal \vec{e}_z) devem ser nulas em grande parte dos casos (ou até mesmo na totalidade dos casos). Desta forma, podemos afirmar que $\sigma_z = 0$, $\tau_{zx} = 0$ e $\tau_{zy} = 0$. Caso o material tenha comportamento elástico linear e seja isótropo, seguem, das equações constitutivas, as seguintes relações:

$$\sigma_z = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2G\varepsilon_z = 0 \iff \varepsilon_z = -\frac{\lambda}{(\lambda + 2G)}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$$

$$\tau_{zy} = G\gamma_{zy} = 0 \iff \gamma_{zy} = 0$$

$$\tau_{zx} = G\gamma_{zx} = 0 \iff \gamma_{zx} = 0$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Além disso, sendo $\sigma_z = 0$, virá :

$$\left[\begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{1}{E} \sigma_x - \frac{\nu}{E} \sigma_y \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} \sigma_y - \frac{\nu}{E} \sigma_x \end{array} \right. \Rightarrow \varepsilon_x + \varepsilon_y = \frac{(1 - \nu)}{E} (\sigma_x + \sigma_y)$$

$$E: \quad \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{\nu}{1 - \nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y)$$

Desta forma, o tensor das pequenas deformações fica escrito como:

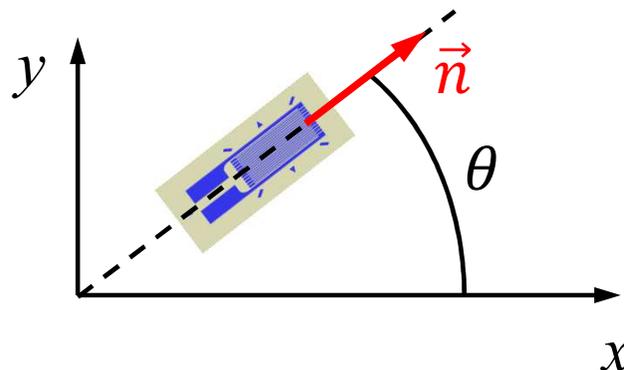


Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$[E]_b = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & 0 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

$$\text{Sendo: } \varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$$

Assim, determinando os alongamentos ε_x e ε_y , e a distorção γ_{xy} , é possível determinar completamente o tensor das pequenas deformações na vizinhança do ponto. Considerando que um extensômetro seja colado sobre a superfície de um sólido de tal forma que o ângulo de sua grade com o eixo x seja θ (vide figura) e que a leitura do extensômetro seja ε_θ (conhecida), teremos:



$$\vec{n} = (\cos\theta, \sin\theta, 0)_b$$

$$\varepsilon_\theta = \{\vec{n}\}^t [E] \{\vec{n}\}$$



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

$$\{\vec{\epsilon}\}_b = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \gamma_{xy}/2 & 0 \\ \gamma_{xy}/2 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \cos\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin\theta \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos\theta + \epsilon_y \sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\epsilon_\theta = \{\vec{n}\}^t [E] \{\vec{n}\} = \epsilon_x \cos^2\theta + \epsilon_y \sin^2\theta + \gamma_{xy} \sin\theta \cos\theta$$

Se forem fornecidas as leituras obtidas por três extensômetros A, B e C, colados na vizinhança de um mesmo ponto, com direções θ_A , θ_B e θ_C conhecidas, podemos obter, a partir da equação acima, um sistema linear nas incógnitas ϵ_x , ϵ_y e γ_y , que, uma vez resolvido, nos permite determinar o tensor das deformações no ponto, bem como os alongamentos principais. Tendo o material comportamento elástico linear e sendo isótropo, a determinação do tensor das tensões e das tensões principais no ponto também será imediata.



Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

Referências:

- [1] Martins, C.A. Introdução ao Estudo das Deformações, (2021), 69p.
- [2] Popov, E.P. Engineering Mechanics of Solids, 2nd ed., Prentice-Hall, Inc., 1998, 864p.
- [3] Gere, J.M., Goodno, B.J. Mecânica dos Materiais – Tradução da 7^a edição norte-americana. Cengage Learning, 2010, 860p, Cap.7
- [4] <https://www.azosensors.com/article.aspx?ArticleID=2029>
- [5] <https://www.explainthatstuff.com/straingauge.html>