Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Departamento de Engenharia Mecânica

PME-3211 - Mecânica dos Sólidos II

Aula #10

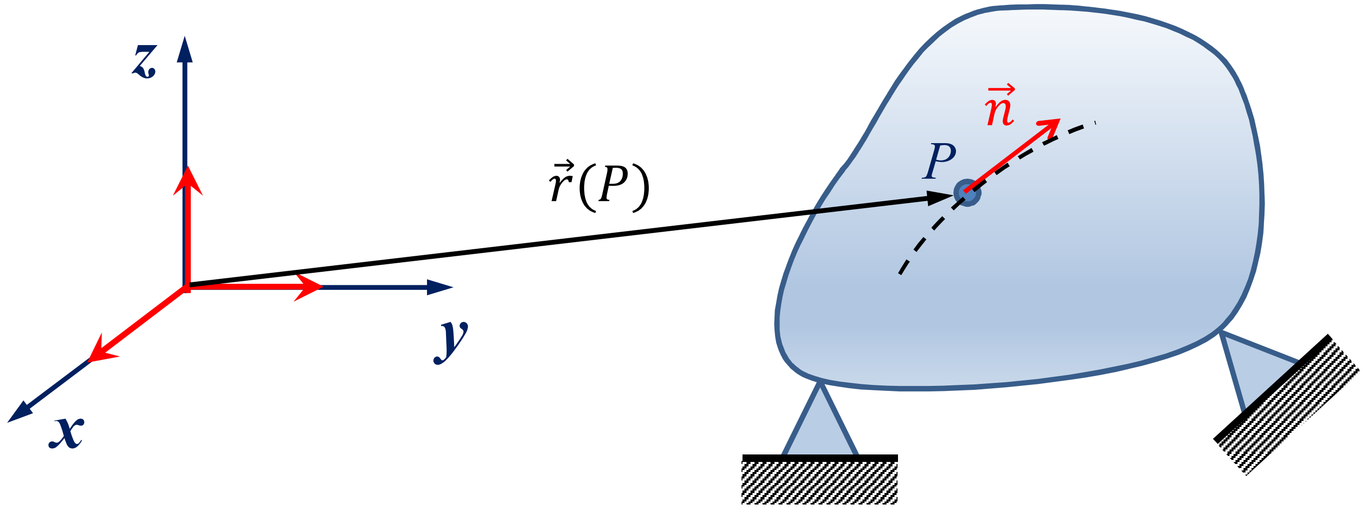
Prof. Dr. Roberto Ramos Jr.

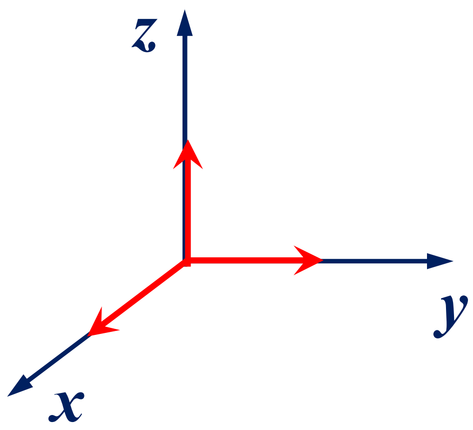
20/09/2023

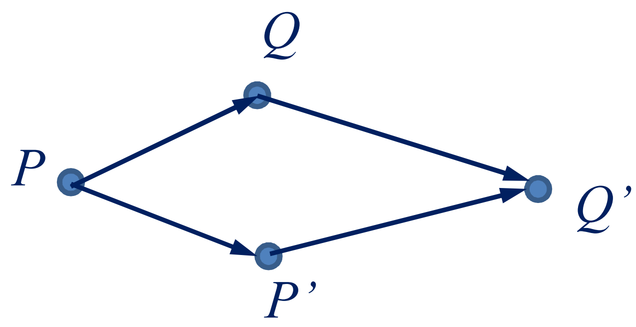
Agenda:

1. Cálculo do alongamento em uma direção qualquer;
2. O tensor das deformações em coordenadas cartesianas;
3. Cálculo da distorção entre duas direções quaisquer;
4. Simetria do tensor das deformações;
5. Vetor deformação e suas componentes;
6. Alongamentos principais e direções principais de deformação.

1. Cálculo do alongamento em uma direção qualquer







$$(Q-P)=(dx,dy,dz)=\left(n_x,n_y,n_z\right).\|Q-P\|=\left(n_x,n_y,n_z\right)dl_r$$

$$(Q'-P')=(Q'-Q)+(Q-P)-(P'-P)$$

$$\overrightarrow{dl}=\vec{u}_Q+\overrightarrow{dl}_r-\vec{u}_P$$

$$\vec{u}_Q - \vec{u}_P = \left(u_Q - u_P, v_Q - v_P, w_Q - w_P\right)$$

$$u_Q - u_P \cong \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)dz$$

$$v_Q - v_P \cong \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)dz$$

$$w_Q - w_P \cong \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)dz$$

$$\vec{u}_Q - \vec{u}_P \cong \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} dl_r$$

Denominamos:

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

(Tensor Gradiente dos Deslocamentos)

$$\{\vec{u}_Q - \vec{u}_P\} = [L]\{\vec{n}\}dl_r$$

Então:

$$\{\vec{dl}\} = \{\vec{u}_Q - \vec{u}_P\} + \{\vec{dl}_r\} = [L]\{\vec{n}\}dl_r + \{\vec{n}\}dl_r$$

$$\{\vec{dl}\} = [L]\{\vec{n}\}dl_r + [I]\{\vec{n}\}dl_r = ([L] + [I])\{\vec{n}\}dl_r$$

$$\lambda^2 = \left(\frac{dl}{dl_r}\right)^2 = \frac{\{\vec{dl}\}^t . \{\vec{dl}\}}{(dl_r)^2} = \frac{\{\vec{n}\}^t([L] + [I])^t([L] + [I])\{\vec{n}\}}{(dl_r)^2}(dl_r)^2$$

$$\lambda^2 = \{\vec{n}\}^t([L]^t + [I])([L] + [I])\{\vec{n}\}$$

$$\lambda^2 = \{\vec{n}\}^t([L] + [L]^t + [L]^t[L] + [I])\{\vec{n}\}$$

$$\lambda^2 = \{\vec{n}\}^t([L] + [L]^t + [L]^t[L] + [I])\{\vec{n}\}$$

$$\lambda^2 = \{\vec{n}\}^t([L] + [L]^t + [L]^t[L])\{\vec{n}\} + \{\vec{n}\}^t[I]\{\vec{n}\}$$

$$2\varepsilon_q = \lambda^2 - 1 = \{\vec{n}\}^t([L] + [L]^t + [L]^t[L])\{\vec{n}\}$$

$$\varepsilon_q = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1) = \{\vec{n}\}^t\left(\frac{[L] + [L]^t + [L]^t[L]}{2}\right)\{\vec{n}\}$$

2. O tensor das deformações em coordenadas cartesianas

Denominamos: $$[E] = \frac{[L] + [L]^t + [L]^t[L]}{2}$$ (tensor das deformações de Green)

Assim, o alongamento quadrático (ou de Green) de uma fibra que passa por um dado ponto P do sólido segundo uma direção dada pelo versor $\vec{n}$ fica dada por:

$$\varepsilon_q = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1) = \{\vec{n}\}^t[E]\{\vec{n}\}$$

...o que demonstra o que foi discutido anteriormente, ou seja, $\varepsilon = \varepsilon(P, \vec{n})$.

Em condições de não linearidade geométrica, vale:

$$[E] = \frac{[L] + [L]^t + [L]^t[L]}{2} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{yx} & \epsilon_{zx} \\ \epsilon_{xy} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{zy} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

...estando as componentes ϵ_{ij} relacionadas com as expressões (não lineares) dos alongamentos e das distorções estudadas na aula #09.

Em condições de linearidade geométrica, as parcelas não lineares decorrentes do produto $[L]^t[L]$ podem ser desprezadas, de forma que o tensor das deformações de Green assume uma forma mais simples dada por:

$$[E] \cong \frac{[L] + [L]^t}{2} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{yx}}{2} & \frac{\gamma_{zx}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{zy}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Onde:

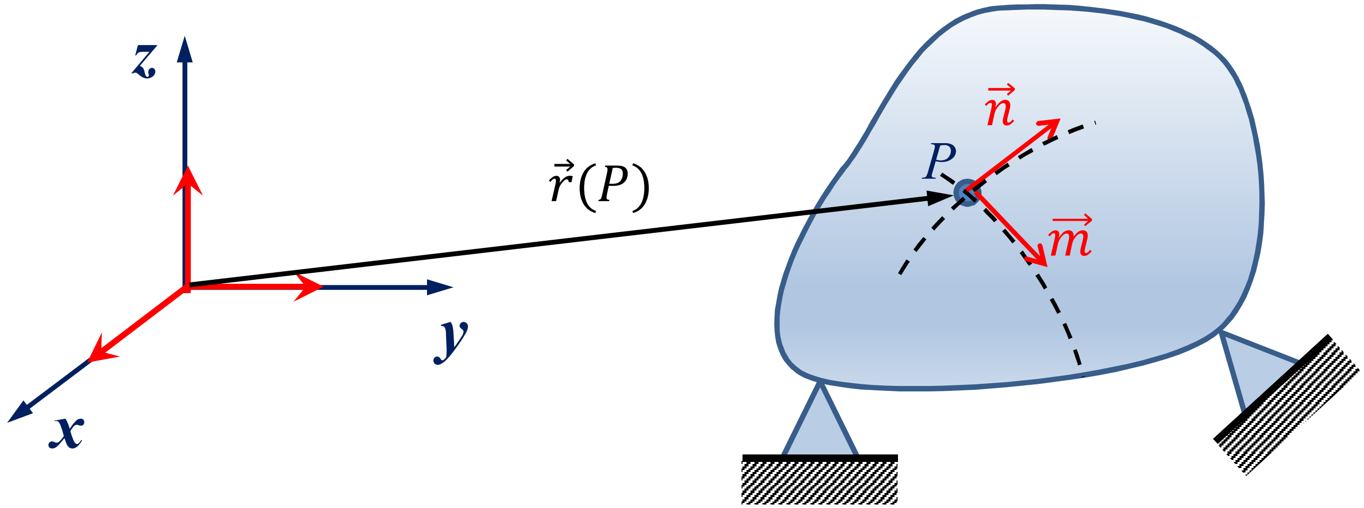
$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \qquad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

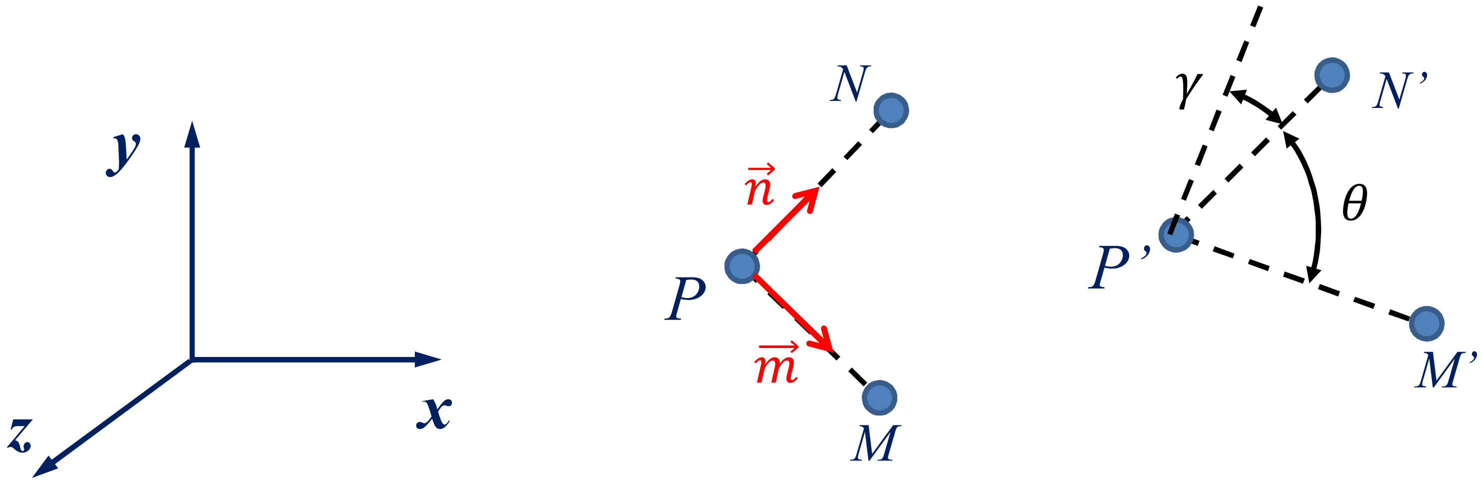
Do exposto, vemos que, se conhecermos as componentes do tensor das deformações de um dado ponto do sólido, podemos determinar o alongamento de qualquer fibra que passa por esse ponto segundo qualquer direção definida pelo versor $\vec{n}$ com a expressão:

$$\varepsilon_q = \{\vec{n}\}^t [E] \{\vec{n}\}$$

3. Cálculo da distorção entre duas direções quaisquer



Cálculo das distorções:



$$\gamma + \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \gamma \quad \Rightarrow \quad cos(\theta) = cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = sen(\gamma)$$

$$sen(\gamma) = cos(\theta) = \left(\frac{N' - P'}{\|N' - P'\|}\right) \cdot \left(\frac{M' - P'}{\|M' - P'\|}\right)$$

$$\lambda_n = \frac{\|N' - P'\|}{\|N - P\|} \Leftrightarrow \|N' - P'\| = \lambda_n dl_{n,r}$$ Sendo: $dl_{n,r} = \|N - P\|$

$$\lambda_m = \frac{\|M' - P'\|}{\|M - P\|} \Leftrightarrow \|M' - P'\| = \lambda_m dl_{m,r}$$ Sendo: $dl_{m,r} = \|M - P\|$

$$(N' - P') = (N' - N) + (N - P) - (P' - P) = \vec{u}_N + \overrightarrow{dl}_{n,r} - \vec{u}_P$$

$$(M' - P') = (M' - M) + (M - P) - (P' - P) = \vec{u}_M + \overrightarrow{dl}_{m,r} - \vec{u}_P$$

$$(N' - P') = \vec{u}_N - \vec{u}_P + \overrightarrow{dl}_{n,r} = [L]\{\vec{n}\}dl_{n,r} + [I]\{\vec{n}\}dl_{n,r} = ([L] + [I])\{\vec{n}\}dl_{n,r}$$

$$(M' - P') = \vec{u}_M - \vec{u}_P + \overrightarrow{dl}_{m,r} = [L]\{\vec{m}\}dl_{m,r} + [I]\{\vec{m}\}dl_{m,r} = ([L] + [I])\{\vec{m}\}dl_{m,r}$$

$$cos(\theta) = \left(\frac{N' - P'}{\|N' - P'\|}\right) \cdot \left(\frac{M' - P'}{\|M' - P'\|}\right) = \frac{\{\vec{n}\}^t([L] + [I])^t([L] + [I])\{\vec{m}\}}{\lambda_n dl_{n,r} . \lambda_m dl_{m,r}} . dl_{n,r} dl_{m,r}$$

$$cos(\theta) = \frac{\{\vec{n}\}^t([L]^t[L] + [L] + [L]^t + [I])\{\vec{m}\}}{\lambda_n . \lambda_m}$$

$$cos(\theta) = \frac{\{\vec{n}\}^t([L]^t[L] + [L] + [L]^t)\{\vec{m}\}}{\lambda_n . \lambda_m} + \frac{\{\vec{n}\}^t[I]\{\vec{m}\}}{\lambda_n . \lambda_m}$$

$$cos(\theta) = \frac{\{\vec{n}\}^t([L]^t[L] + [L] + [L]^t)\{\vec{m}\}}{\lambda_n.\lambda_m}$$

Como: $$[E] = \frac{[L] + [L]^t + [L]^t[L]}{2}$$

Resulta: $$sen(\gamma) = cos(\theta) = 2\frac{\{\vec{n}\}^t[E]\{\vec{m}\}}{\lambda_n.\lambda_m}$$

Em condições de Linearidade Geométrica, a expressão fica simplificada na forma:

$$\gamma = 2\{\vec{n}\}^t[E]\{\vec{m}\}$$

Do exposto, concluímos que, se conhecermos as componentes do tensor das deformações de um dado ponto do sólido, podemos determinar também a distorção entre quaisquer pares de fibras que passam por esse ponto e cujos versores tangente (calculados no ponto em questão) são dados por $\vec{n}$ e $\vec{m}$ (com $\vec{n}$ e $\vec{m}$ ortogonais entre si) por meio das expressões:

$$sen(\gamma) = 2\frac{\{\vec{n}\}^t[E]\{\vec{m}\}}{\lambda_n.\lambda_m}$$ (em condições de não L.G.)

ou

$$\gamma = 2\{\vec{n}\}^t[E]\{\vec{m}\}$$ (em condições de L.G.)

4. Simetria do tensor das deformações

Sendo o tensor das deformações de Green dado por:

$$[E] = \frac{[L] + [L]^t + [L]^t[L]}{2}$$

É imediato verificar que:

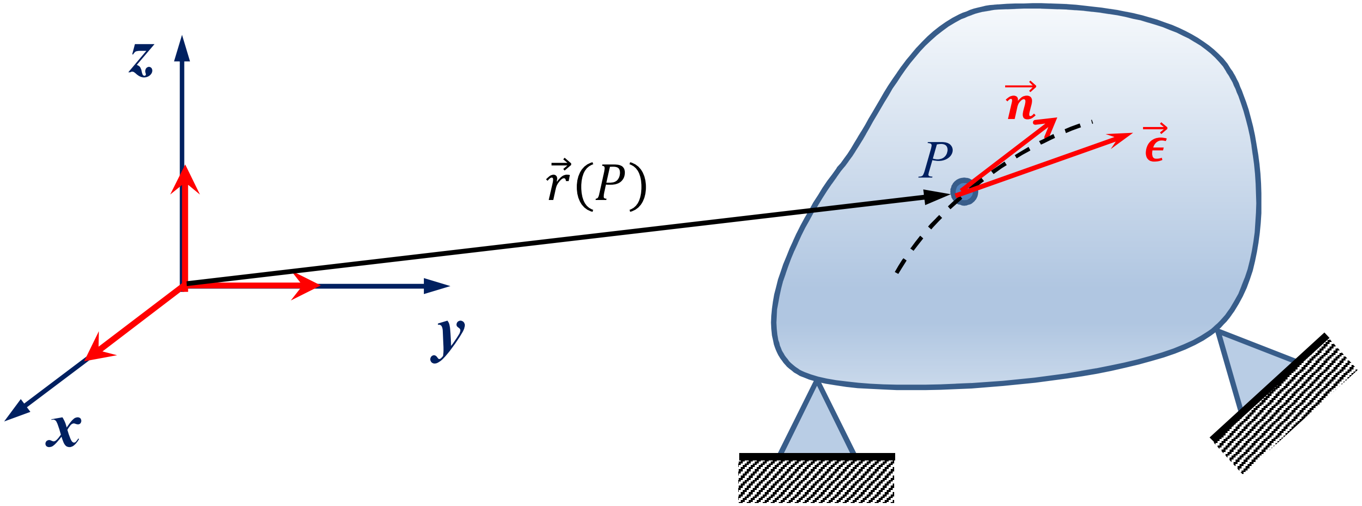
$$[E]^t = \left(\frac{[L] + [L]^t + [L]^t[L]}{2}\right)^t = \frac{[L]^t + [L] + [L]^t[L]}{2} = [E]$$

Ou seja, $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$.

5. Vetor deformação e suas componentes

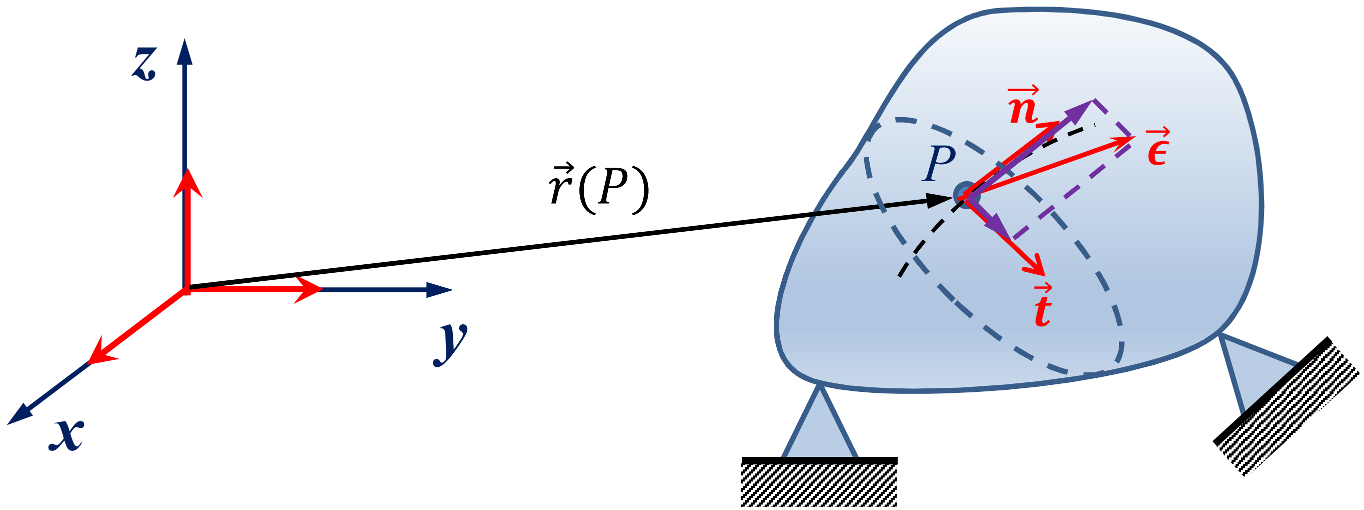
Definimos o vetor deformação associado a um dado ponto P do sólido e a uma dada direção (vetor unitário tangente a uma fibra que passa pelo ponto) como o vetor dado por:

$$\{\vec{\epsilon}\}_b = [E]_b\{\vec{n}\}_b \qquad b = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$$



Vemos que é possível decompor o vetor deformação em duas componentes vetoriais: uma sendo sua projeção segundo o versor dado pela direção $\vec{n}$ e outra sendo sua projeção no plano que é ortogonal a $\vec{n}$:

$$\vec{\epsilon} = a\vec{n} + b\vec{t}$$



Para obtermos o escalar a, basta fazermos o produto escalar entre $\vec{\epsilon}$ e $\vec{n}$:

$$\vec{\epsilon} \cdot \vec{n} = \left(a\vec{n} + b\vec{t}\right) \cdot \vec{n} = a$$

Mas, lembrando que:
$$\begin{cases} \{\vec{\epsilon}\}_b = [E]_b \{\vec{n}\}_b \\ \varepsilon_q = \{\vec{n}\}^t [E] \{\vec{n}\} \end{cases}$$

Concluímos que: $$a = \vec{\epsilon} \cdot \vec{n} = \{\vec{n}\}^t [E] \{\vec{n}\} = \varepsilon_q$$

Ou seja, o escalar a possui um significado físico claro: trata-se do alongamento quadrático associado ao ponto *P* e à direção do versor tangente à fibra (dada pelo versor $\vec{n}$).

Para obtermos o escalar b, procedemos de forma análoga, fazendo o produto escalar entre $\vec{\epsilon}$ e $\vec{t}$:

$$\vec{\epsilon} \cdot \vec{t} = \left(a\vec{n} + b\vec{t}\right) \cdot \vec{t} = b$$

Mas, lembrando que:

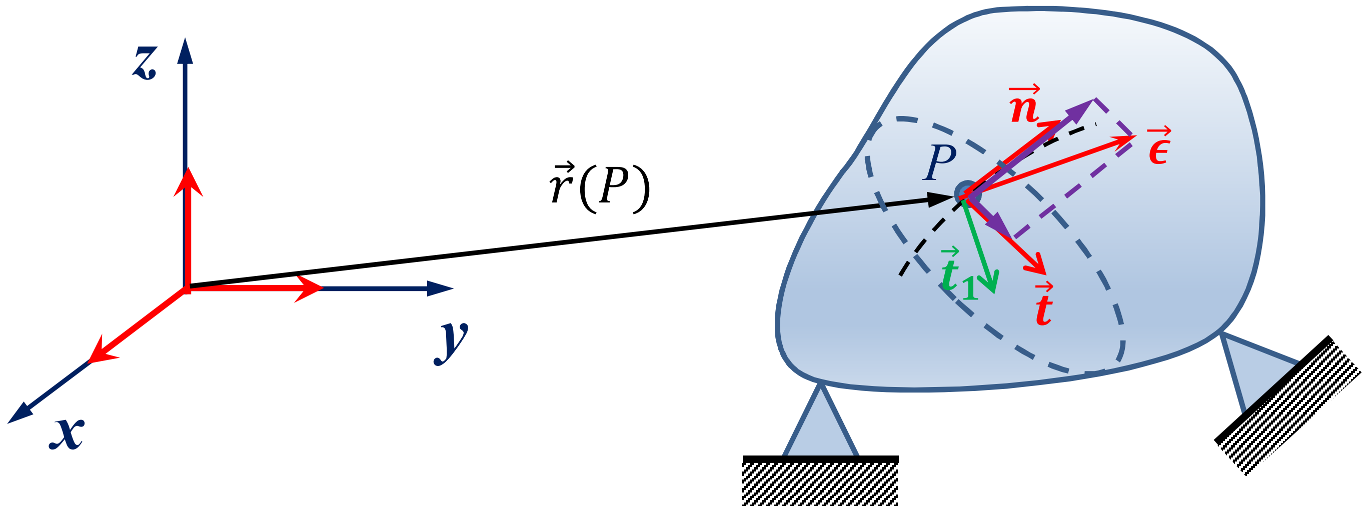
$$\begin{cases} \{\vec{\epsilon}\}_b = [E]_b\{\vec{n}\}_b \\ sen(\gamma) = 2\,\dfrac{\{\vec{t}\}^t[E]\{\vec{n}\}}{\lambda_n.\lambda_t} \end{cases}$$

Concluímos que: $$b = \vec{\epsilon} \cdot \vec{t} = \{\vec{t}\}^t[E]\{\vec{n}\} = \frac{\lambda_n\lambda_t sen(\gamma)}{2}$$

Ou seja, o escalar b também possui um significado físico claro, estando diretamente ligado à distorção entre as direções $\vec{n}$ e $\vec{t}$.

Uma vez encontrados os escalares a e b, podemos rescrever o vetor deformação na forma:

$$\vec{\epsilon} = \varepsilon_q \vec{n} + \left(\frac{\lambda_n \lambda_t sen(\gamma)}{2}\right)\vec{t}$$



Para determinarmos a distorção γ_1 entre as fibras que passam pelo ponto *P* tendo uma a direção do versor $\vec{n}$ (direção fixa) e outra a direção de um versor qualquer $\vec{t}_1$ (porém ortogonal a $\vec{n}$ na configuração de referência), utilizamos a relação já vista:

$$sen(\gamma_1) = 2\frac{\{\vec{t}_1\}^t[E]\{\vec{n}\}}{\lambda_n . \lambda_{t_1}}$$

Mas: $$[E]\{\vec{n}\} = \{\vec{\epsilon}\} = \varepsilon_q\{\vec{n}\} + \left(\frac{\lambda_n \lambda_t sen(\gamma)}{2}\right)\{\vec{t}\}$$

Logo: $$sen(\gamma_1) = \frac{2}{\lambda_n . \lambda_{t_1}}\{\vec{t}_1\}^t\left(\varepsilon_q\{\vec{n}\} + \left(\frac{\lambda_n \lambda_t sen(\gamma)}{2}\right)\{\vec{t}\}\right)$$

$$sen(\gamma_1) = \frac{\lambda_t}{\lambda_{t_1}} sen(\gamma)\{\vec{t}_1\}^t\{\vec{t}\} = \frac{\lambda_t}{\lambda_{t_1}} sen(\gamma)cos(\theta)$$

Em condições de linearidade geométrica, podemos considerar as aproximações:

$$sen(\gamma_1) \cong \gamma_1 \qquad sen(\gamma) \cong \gamma \qquad \frac{\lambda_t}{\lambda_{t_1}} \cong 1$$

Resultando: $$\gamma_1 \cong \gamma cos(\theta)$$

Concluímos, portanto, que a distorção γ é a máxima distorção possível que pode haver entre a fibra de direção $\vec{n}$ e todas as demais fibras que são ortogonais a ela na configuração de referência (pelo menos, em condições de linearidade geométrica). A direção $\vec{t}$, que fornece essa máxima distorção com a direção $\vec{n}$, é facilmente encontrada pela projeção do vetor deformação no plano ortogonal a $\vec{n}$.

6. Alongamentos principais e direções principais de deformação

Dizemos que uma dada direção definida por um versor $\vec{n}$ é uma <u>*direção principal de deformação*</u> se, e somente se:

$$\{\vec{\epsilon}\} = [E]\{\vec{n}\} = \varepsilon\{\vec{n}\}$$

Em outras palavras, o vetor deformação associado a tal direção possui apenas a componente referente ao alongamento da fibra que, na configuração de referência, tem a direção $\vec{n}$. Portanto, tal fibra permanece, na configuração deformada, ortogonal a todas as fibras que eram ortogonais à direção $\vec{n}$ originalmente.

Nesse caso, dizemos que o alongamento ε associado à direção $\vec{n}$ é um <u>*alongamento principal*</u>.

Determinação dos alongamentos principais e das direções principais de deformação:

Considerando que uma dada direção dada pelo versor $\vec{n}$ é uma direção principal de deformação, temos:

$$\{\vec{\epsilon}\} = [E]\{\vec{n}\} = \varepsilon\{\vec{n}\}$$

$$([E] - \varepsilon[I])\{\vec{n}\} = \{\vec{0}\}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon & \gamma_{yx}/2 & \gamma_{zx}/2 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y - \varepsilon & \gamma_{zy}/2 \\ \gamma_{xz}/2 & \gamma_{yz}/2 & \varepsilon_z - \varepsilon \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Para que existam soluções diferentes da solução trivial, devemos impor que:

$$det\begin{bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon & \gamma_{yx}/2 & \gamma_{zx}/2 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y - \varepsilon & \gamma_{zy}/2 \\ \gamma_{xz}/2 & \gamma_{yz}/2 & \varepsilon_z - \varepsilon \end{bmatrix} = 0$$

$$\varepsilon^3 - K_1\varepsilon^2 + K_2\varepsilon - K_3 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} K_1 = tr(E) = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \\ K_2 = \left\|\begin{matrix} \varepsilon_y & \gamma_{zy}/2 \\ \gamma_{yz}/2 & \varepsilon_z \end{matrix}\right\| + \left\|\begin{matrix} \varepsilon_x & \gamma_{zx}/2 \\ \gamma_{xz}/2 & \varepsilon_z \end{matrix}\right\| + \left\|\begin{matrix} \varepsilon_x & \gamma_{yx}/2 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y \end{matrix}\right\| = \\ = \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_z\varepsilon_x - \frac{1}{4}\left(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2\right) \\ K_3 = det(E) \end{array}\right.$$

K_1, K_2, K_3 $\Rightarrow$ Invariantes de deformação.

As três raízes do polinômio característico *serão sempre reais* e seus valores fornecem as deformações (ou alongamentos) principais atuantes nos planos principais.

Notação e Convenção:

$$\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3,$$

Ou seja, ε_1 será sempre o *maior alongamento em valor algébrico* e ε_3 será sempre o *menor alongamento em valor algébrico*.

Para cada raiz $\varepsilon = \varepsilon_i$ encontrada, deve-se determinar a direção principal $\vec{n} = \vec{n}_i$ correspondente usando:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_i & \gamma_{yx}/2 & \gamma_{zx}/2 \\ \gamma_{xy}/2 & \varepsilon_y - \varepsilon_i & \gamma_{zy}/2 \\ \gamma_{xz}/2 & \gamma_{yz}/2 & \varepsilon_z - \varepsilon_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_{x,i} \\ n_{y,i} \\ n_{z,i} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Referências:

[1] Martins, C.A. Introdução ao Estudo das Deformações, (2021), 69p.

[2] Popov, E.P. Engineering Mechanics of Solids, 2nd ed., Prentice-Hall, Inc., 1998, 864p.

[3] Gere, J.M., Goodno, B.J. Mecânica dos Materiais – Tradução da 7ª edição norte-americana. Cengage Learning, 2010, 860p, Cap.7